





TRAITÉ
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET DE
CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

A PARIS,

De la Librairie de J. KLOSTERMANN Fils, Acquéreur du Fonds de madame veuve BERNARD, Libraire des Ecoles impériales Polytechnique, et des Ponts-et-Chaussées, Editeur des Annales de Chimie, rue du Jardinet, n°. 13, quartier Saint-André-des-Arcs.

Et à Saint-Pétersbourg,

Chez KLOSTERMANN Père et Fils.

TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL.

PAR J. A. J. COUSIN, de l'Institut National des Sciences & des Arts.

Opus hoc æternum irrevocabiles habet motus......
Hoc probari, nisi Geometræ adjuverint, non potest.
Sen. Nat. Quest.



A PARIS,

Chez RÉGENT & BERNARD, Libraires, quai des Augustins, N°. 37.

L'AN 4e. — 1796.

DISCOURS
PRÉLIMINAIRE.

LES principes du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral, de la manière dont ils sont présentés dans la plupart des Ouvrages qui en traitent, n'ont point ce degré d'évidence qui est le fondement de la certitude. En effet, quelle idée nette & précise peut-on se former d'une quantité infiniment petite? & l'Analyse, qui a pour objet de calculer les rapports que ces quantités ont entr'elles, peut-elle être regardée comme faisant partie des Sciences exactes?

Tels étoient les raisonnemens de Rolle & des Géomètres qui rejettèrent ces Calculs dans leur naissance. D'autres, comme Nieuwentit, admettoient seulement les infiniment petits du premier ordre; sans faire attention que si l'on pouvoit concevoir dans le cercle une corde infiniment petite du premier ordre, l'abscisse ou sinus verse correspondant seroit infiniment petit du second; & que si la corde étoit infiniment petite du second, l'abscisse seroit infiniment petite du quatrième, &c. puisque le diamètre qui est fini est toujours à la corde, comme la corde est à l'abscisse correspondante. Plusieurs de ceux même qui avoient d'abord été de très-zélés défenseurs des infinis, effrayés des difficultés qu'on leur faisoit, ne regardèrent plus les différentielles comme des quantités infiniment petites; mais comme des quantités incomparablement plus petites que celles dont elles sont les différentielles, ce qui ruinoit absolument l'exactitude de la Méthode.

Cependant Newton avoit publié ses *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*, où toutes ces difficultés sont résolues. Mais alors cet Ouvrage admirable ne pouvoit point être entendu du plus grand nombre des Géomètres. Ceux à la portée de qui il étoit, Leibnitz, les Bernoulli, Taylor, Côtes, le Marquis de l'Hôpital, travaillèrent bien plus à augmenter l'édifice du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral, qu'à en éclairer l'entrée.

Ce que Leibnitz & ses disciples nomment *différence infiniment petite* ou *différentielle*, Newton le nomme *fluxion*. Il considère les quantités mathématiques comme engendrées par le mouvement: il

cherche le rapport des vîteſſes variables avec leſquelles ces quantités ſont décrites ; & ce ſont ces vîteſſes qu'il appelle *fluxions* des quantités. Ces principes ne répugnent point à la rigueur mathématique ; nous dirons cependant qu'introduire dans l'Algebre & dans la Géométrie le mouvement, c'eſt y introduire une idée abſolument étrangère & qui n'eſt point aſſez ſimple. Plus de cinquante ans après, à l'occaſion de quelques Ouvrages qui paroiſſoient contre les nouveaux Calculs, Maclaurin, l'un des plus grands Géomètres que l'Angleterre ait eu, a compoſé un Traité dans lequel il s'eſt propoſé pour but principal de faire voir que la *Méthode directe & inverſe des Fluxions* eſt auſſi rigoureuſe que celle des Anciens. Mais les démonſtrations de cet Auteur ſont auſſi fondées ſur la théorie du mouvement ; & la vraie métaphyſique du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral, celle qui ſe déduit ſi facilement de la Méthode des anciens Géomètres, connue ſous le nom de *Méthode des limites*, étoit abſolument inconnue, lorſque Dalembert l'a publiée dans le tome IV de l'Encyclopédie. Je vais entrer en matière par expoſer cette métaphyſique, & je tâcherai de le faire avec toute la clarté dont elle eſt ſuſceptible.

Les Sciences mathématiques ont pour objet unique de comparer les grandeurs, pour parvenir à connoître les rapports qu'elles ont entr'elles. Dans chaque eſpèce de grandeurs, on en prend une pour unité ; & cette unité, qui eſt abſolument arbitraire, ſert de meſure pour déterminer les rapports des grandeurs de ſon eſpèce. En effet, je ne puis affirmer autre choſe de la diſtance de deux objets, par exemple, ſinon que cette diſtance eſt plus ou moins grande que telle autre ; & définitivement qu'il y a même rapport géométrique entr'elle & ſon unité de convention, qui ſera ſi l'on veut la toiſe, qu'entre un certain nombre abſtrait & l'unité abſtraite. C'eſt dans ce ſens qu'il faut entendre pluſieurs expreſſions abrégées dont ſe ſervent les Géometres, & qui pourroient induire en erreur. Ils diſent, par exemple, qu'un rectangle eſt le produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur ; mais on ne peut pas multiplier une ligne par une ligne, puiſqu'un des facteurs de la multiplication doit néceſſairement être un nombre abſtrait. Que peut donc ſignifier cette propoſition ? Elle ſignifie qu'il y a même rapport géométrique entre le rectangle en queſtion & l'unité de ſurface dont les deux dimenſions ſont égales chacune à l'unité linéaire, qu'entre le nombre abſtrait qui naîtra de la multiplication du nombre d'unités linéaires de la baſe par le nombre d'unités linéaires de la hauteur, & l'unité abſtraite. Une autre de ces expreſſions qui revient très-ſouvent dans les Mathématiques mixtes, c'eſt celle-ci : la vîteſſe

eſt proportionnelle à l'eſpace diviſé par le temps. Eſt-ce qu'on peut comparer des grandeurs d'eſpèce différente ? Ne ſait-on pas que dans toute diviſion, une de ces deux choſes, le diviſeur ou le quotient, doit néceſſairement être un nombre abſtrait ? Mais ſi cette expreſſion ſignifie que la vîteſſe eſt proportionnelle au quotient de la diviſion de deux nombres abſtraits, dont l'un eſt le rapport de l'eſpace à l'unité d'eſpace, & l'autre le rapport du temps à l'unité du temps, il n'y aura plus de difficulté. Enfin, on n'en trouvera aucune à voir dans une même équation des grandeurs de nature différente; puiſqu'effectivement ce ne ſont pas ces grandeurs que l'on compare, mais le rapport de chacune à ſon unité de convention.

Un de ces rapports qui a pour numérateur l'unité, ne deviendra moindre ou plus grand, que parce que ſon dénominateur augmentera ou diminuera. S'il augmente, le rapport approchera continuellement de zéro, ſans jamais devenir nul; d'où il ſuit que l'idée que nous faiſons du zéro, eſt celle d'une limite dont les rapports qui diminuent peuvent approcher continuellement, ſans jamais ſe confondre avec elle. Il n'eſt pas moins clair que pour ce qui eſt de l'accroiſſement dont ce rapport eſt ſuſceptible, nous ne voyons autre choſe ſinon qu'il approchera continuellement de l'infini, ſans jamais pouvoir y atteindre. Ainſi, nous n'avons de l'infini d'autre notion exacte que celle-ci : qu'il eſt la limite dont les rapports qui augmentent approcheront toujours de plus en plus, quoiqu'ils n'y atteignent jamais.

Les grandeurs qui décroiſſent ou croiſſent continuellement, ne tendent pas toutes à s'approcher de zéro ou de l'infini. Pluſieurs ont pour limites d'autres grandeurs. Le cercle, par exemple, eſt la limite des polygones inſcrits & circonſcrits. En augmentant le nombre des côtés de ces polygones, ils s'approcheront toujours du cercle de plus en plus, & pourront en différer auſſi peu qu'on voudra; mais jamais rigoureuſement ils ne ſe confondront avec lui.

De cette autre notion de limite, il eſt facile de conclure ; 1°. que deux grandeurs qui ſont la limite d'une même grandeur, ſont néceſſairement égales entr'elles ; car s'il y avoit entr'elles quelque différence, la troiſième ne pourroit approcher de l'une des deux de plus près que de cette différence, ce qui eſt contre l'hypothèſe ; 2°. que ſi deux grandeurs, qui croiſſent ou décroiſſent continuellement, conſervent entr'elles la même raiſon invariable, cette raiſon ſera celle des limites des deux grandeurs. C'eſt ſur ces deux propoſitions ſi ſimples que la Méthode des Limites eſt fondée ; elles ſont les principes de toute la Géométrie tranſcendante ; principes qu'il faudroit ſur-tout

employer dans les Ouvrages élémentaires, où il est si important de ne point donner d'idées vagues & imparfaites, pour en bannir ce genre de démonstrations qui suppose que l'on puisse concevoir l'infini comme existant réellement.

Je remarquerai à ce sujet qu'il y a deux choses très-distinctes à considérer dans la manière de traiter quelque partie que ce soit des Sciences Mathématiques ; les principes fondamentaux de la Méthode qui n'ont pas pu varier ; & la Méthode elle-même qui est devenue plus générale & plus simple. On a prétendu qu'en se simplifiant elle avoit perdu de sa rigueur ; comme si l'exactitude consistoit à fatiguer son Lecteur dans une route tortueuse & embarrassée. Celle que les Anciens ont suivie, l'est à un point, que des propositions, qu'à peine les Géomètres les plus habiles pourroient entendre dans leurs Ouvrages, se démontrent maintenant avec la plus grande facilité. Hé quoi ! ne rencontre-t-on point assez de difficultés naturelles à vaincre dans une carrière aussi étendue que celle des Mathématiques, pour n'en point faire naître d'inutiles? Le seul but que l'on doive se proposer, est d'arriver le plus directement qu'il est possible à la certitude ; & elle est uniquement fondée sur l'évidence des principes.

Cependant il faut avoir attention de ne point transporter les principes d'une Science moins simple, dans une qui l'est davantage ; comme, par exemple, de ne point faire usage dans la Géométrie des principes de la Méchanique. Mais on a pu appliquer l'Algèbre à la Géométrie, & chacune de ces deux Sciences à la Méchanique. C'est même à l'application que Descartes a faite de l'Algèbre à la Géométrie, qu'on doit fixer l'époque de la révolution qui a rapidement élevé toutes les parties des Mathématiques au degré de perfection où nous les voyons aujourd'hui.

L'Algèbre nous a donné les moyens d'exprimer généralement les grandeurs dont celles que l'on nomme transcendantes sont les limites ; & de trouver par-là d'autres limites des premières quantités, qui seront les valeurs des transcendantes. Pour donner un exemple bien simple de l'usage dont cette règle peut être ; nous remarquerons que le cercle étant la limite des polygones inscrits, on trouvera la surface du cercle, en cherchant d'abord la surface de tout polygone régulier inscrit. Celle-ci a pour expression le produit de trois facteurs qui sont, le rapport du contour du polygone au rayon, la moitié du rayon & l'excès du rayon sur la flèche. Or, plus la flèche diminuera, plus le rapport du contour du polygone au rayon approchera du rapport

de la circonférence du cercle au rayon ; & plus par conséquent l'expression dont il s'agit approchera du produit fait de la circonférence multipliée par la moitié du rayon. Donc ce produit, qui est la limite de l'expression de tout polygone régulier inscrit, est égal à la surface du cercle. Maintenant voici un Théorême dont la démonstration est fondée sur le second principe.

Si on conçoit qu'un cercle & un ellipse aient un axe commun, que je supposerai être le grand axe de l'ellipse ; tout polygone inscrit dans le cercle sera au polygone correspondant inscrit dans l'ellipse, comme le grand axe de l'ellipse est au petit axe. Or plus on augmentera le nombre des côtés de ces polygones, plus ils approcheront, l'un du cercle, l'autre de l'ellipse, en conservant toujours entre eux la même raison. Ainsi, par le second principe, cette raison invariable doit être celle de leurs limites, c'est-à-dire, du cercle & de l'ellipse.

Toute la Géométrie transcendante ne consiste qu'en des usages semblables des deux principes que nous avons énoncés. S'il s'agissoit de trouver les tangentes de toutes sortes de courbes, leurs plus grandes ou leurs moindres abscisses & ordonnées, leurs points d'inflexion & de rebroussement, leurs développées, leurs points multiples, &c. on feroit voir par des constructions bien simples que ces questions peuvent se réduire à chercher, au moyen de l'équation de la courbe, la limite du rapport entre la différence de deux abscisses consécutives, & celles des deux ordonnées correspondantes. Ces différences sont ce qu'on appelle *différence* de l'abscisse & *différence* de l'ordonnée ; en général la *différence* d'une variable est la quantité dont cette variable augmente ou diminue dans un temps donné. Ainsi le Problême auquel se réduisent les questions précédentes doit s'énoncer comme il suit : Trouver les limites des rapports entre les *différences* des quantités variables dont le rapport est donné. Le Problême inverse, où il s'agit de remonter des limites des rapports entre les *différences* au rapport même des quantités, s'étend aux Quadratures des lignes courbes, à leurs Rectifications, à leurs Centres de gravité, aux Solides formés par leurs révolutions, aux Surfaces de ces Solides, aux Centres de gravité de ces Surfaces & de ces Solides, &c. ; de sorte que si les déterminations précises de toutes ces choses sont impossibles, il donne les moyens d'en approcher assez, pour que dans l'usage on n'ait rien à desirer. Le Calcul Différentiel & le Calcul Intégral, ou la Méthode directe & la Méthode inverse des fluxions, n'ont pour objet que les solutions de ces deux Problêmes.

Newton avoit trouvé ces Calculs dès 1669. Ce ne fut cependant que vers 1687, qu'ils commencèrent à fixer l'attention des Géomètres. Leibnitz & les deux frères Jacques & Jean Bernoulli, doivent être regardés comme les premiers qui les rendirent célèbres par le grand nombre d'applications qu'ils en firent. En 1690, Jacques Bernoulli s'en servit pour résoudre le Problême de la courbe isochrone, que Leibnitz avoit proposé quelques années auparavant ; & proposa lui-même celui de la chaînette qui fut résolu par son frère. Celui-ci publia en 1697, les premiers essais du Calcul Exponentiel ; cette même année ayant résolu le Problême de la *Brachystochrone* ou *de la ligne de la plus vîte descente*, il le proposa aux Géomètres. Le temps donné pour le résoudre étant expiré, on n'en vit paroître que quatre solutions qui étoient de Newton, Leibnitz, Jacques Bernoulli & le Marquis de l'Hôpital. Le Marquis de l'Hôpital avoit publié l'année précédente son *Analyse des infiniment petits*, Ouvrage où les principaux usages du Calcul Différentiel sont exposés avec beaucoup d'ordre & de clarté.

Les Géomètres s'occupèrent ensuite de plusieurs autres questions dont nous ne citerons que les plus célèbres. Telle est celle des *Trajectoires orthogonales*, dont la solution générale dépend d'un très-beau Théorême de Leibnitz pour différentier sous le signe. Tels sont deux autres Problêmes du genre de celui de la *Brachystochrone ;* je veux parler du Problême des *Isopérimètres* que Jacques Bernoulli proposa publiquement à son frère, en joignant à son cartel la promesse d'une certaine somme ; & de celui *du solide de la moindre résistance* dont Newton avoit donné la solution sans analyse dans l'Ouvrage des *Principes* imprimé pour la première fois en 1687. Tel est encore le Problême des *Courbes tautochrones*. L'histoire des différentes solutions qu'on a données de ces Problêmes depuis le temps dont nous parlons jusqu'à nos jours, seroit bien propre à faire voir les progrès successifs de l'Analyse.

Ces espèces de défis que se faisoient les Géomètres, les encouragèrent à perfectionner l'instrument de la victoire ; & dès-lors le Calcul Intégral fit des progrès assez considérables. Nous voyons qu'en 1702, Jean Bernoulli avoit indiqué la manière d'intégrer les fractions rationnelles ; qu'il s'occupa à-peu-près dans le même temps avec succès de la séparation des variables dans les équations différentielles. Le Traité de Newton sur la *quadrature des courbes* parut en 1704 ; il renferme de très-belles méthodes pour rapporter autant qu'il est possible les intégrales aux aires des sections coniques ; théorie que Côtes simplifia beaucoup en faisant voir qu'on peut toujours réduire

ces intégrales aux logarithmes & aux arcs de cercle. Côtes étoit mort fort jeune, lorsque son Livre, qui a pour titre *Harmonia mensurarum*, fut publié par Robert Smith en 1722. Cet Ouvrage fut mieux reçu des Géomètres du continent que celui de Taylor, intitulé *Methodus incrementorum*, qui avoit paru sept ans auparavant. Ce savant homme est traité dans plusieurs écrits avec une injustice dont malheureusement l'histoire des Sciences & des Lettres n'offre que trop d'exemples.

Plus on avançoit dans les Théories dont nous venons de parler, plus on sentoit la nécessité de perfectionner celle des Suites qui prit naissance plusieurs années avant l'époque de la découverte des nouveaux Calculs. L'*Arithmétique des infinis* de Wallis, qui vit le jour en 1655, renferme de très-belles choses sur cette matière, dont plusieurs furent immédiatement perfectionnées par Milord Brouncker, que la découverte des fractions continues a rendu célèbre, par Mercator & par Jacques Grégori. Dans le temps que ces nouveautés faisoient le plus de bruit, c'est-à-dire, vers l'an 1669, Newton avoit composé tous les matériaux qu'il a mis depuis en œuvre dans l'Ouvrage intitulé *Methodus fluxionum & serierum infinitarum*, qui fut achevé en 1671. Cet ouvrage ne parut qu'après sa mort; les chagrins que ce grand homme éprouva long-temps à l'occasion de ses nombreuses découvertes, ne lui permirent pas de céder aux sollicitations de plusieurs savans Géomètres qui le pressoient de le donner au Public. Il en tira en 1711 son *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*, qu'il publia avec trois autres Ecrits latins, qui ont pour titre: *De quadratura curvarum*, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, & *Methodus differentialis*, dont les deux premiers paroissoient pour la seconde fois. L'Ouvrage entier ne fut publié qu'en 1736, par Colson, qui même ne le donna pas en original, mais traduit en anglois. C'est sur cette version que fut faite la traduction françoise donnée en 1740 par Buffon, & qu'il accompagna d'une très-belle Préface historique.

Ceux des matériaux dont nous venons de parler, qui ont le plus de rapport à la théorie des séries, sont la *formule du binome*, le *parallélogramme analytique*, la méthoque du *retour des suites*, une méthode pour résoudre par approximation les équations numériques. Leibnitz, Jacques & Jean Bernoulli enrichirent à-peu-près dans le même temps cette théorie de plusieurs découvertes importantes. On en trouve une du même genre, bien digne d'être remarquée, dans l'Ouvrage de Taylor; c'est son Théorème pour développer les fonctions en suites infinies au moyen du Calcul Différentiel. Moivre fait usage de la Méthode différentielle de Newton, ou du Calcul des *différences finies*

pour trouver le terme général des suites qu'il nomme récurrentes. Il transporte ce même Calcul dans la théorie des probabilités dont il recule les limites.

Les progrès d'une Science dépendent de la rapidité avec laquelle se succédent les générations d'hommes doués du génie nécessaire pour les cultiver avec succès. Les Mathématiques jouissent de ce rare avantage depuis plus d'un siècle. Descartes, Huyghens, Roberval, Fermat, &c. furent immédiatement suivis de Newton, Leibnitz, Jacques & Jean Bernoulli, &c. qui virent naître les Géomètres qui ont illustré ces derniers temps, & que je vais tâcher de faire connoître, sans cependant trop m'écarter des bornes que je dois prescrire à ce Discours.

La théorie des *Equations de condition*, dont Nicolas Bernoulli donna les premiers essais dans son Mémoire sur les *Trajectoires orthogonales*, est une de celles qui ont le plus occupé les Géomètres dont nous allons parler. Euler, après avoir découvert plusieurs beaux Théorêmes relatifs à cette théorie, en fit usage pour intégrer les équations différentielles, en les multipliant par des facteurs convenables; on ne connoissoit guères alors d'autres manières de parvenir à ces intégrales, que la séparation des variables, sur laquelle Jean & Nicolas Bernoulli, Herman, le Comte Riccati & Euler lui-même venoient de donner de très-belles recherches. Le Mémoire d'Euler, dont il s'agit maintenant, ne parut qu'en 1740, dans le volume qui renferme les travaux faits à l'Académie de Pétersbourg pendant les années 1734 & 1735; il avoit publié quatre ans auparavant sa Méchanique, où il fait plusieurs applications de l'un de ses Théorêmes, celui sur l'intégration des fonctions homogènes. Fontaine fournissoit en France la même carrière avec un égal succès. Le volume de l'Académie des Sciences pour 1734, renferme sa belle méthode pour résoudre le Problême des tautochrones qui prouve que dès-lors il étoit sur la voie de toutes ces découvertes. Ce ne fut cependant qu'en 1739 qu'il présenta à cette même Académie les Théorêmes dont nous venons de parler, avec des applications qui embrassent le théorie générale des équations différentielles. L'année suivante Clairaut publia un Mémoire sur la même matière, qui ne renferme rien de neuf; mais l'usage qu'il fit à-peu-près dans le même temps des équations de condition dans la théorie des fluides, & plusieurs autres découvertes que renferme son Traité de la Figure de la Terre, publié en 1743, annoncent l'homme de génie, qui a depuis rendu des services si importans à l'Astronomie physique.

La théorie des fluides avoit déjà fait de très-grands progrès entre les

les mains de Daniel Bernoulli, dont l'Hydrodynamique parut en 1738. Cet Ouvrage excellent, quant à la partie mathématique, est de plus un modèle de l'art de se conduire dans la Physique expérimentale. On peut dire la même chose de beaucoup d'autres Ouvrages de cet homme célèbre, dont plusieurs enrichissent le Recueil des pièces qui ont remporté les prix à l'Académie des Sciences.

Qu'on me permette de remarquer ici que les plus grands Physiciens de chaque siècle, ceux à qui l'on doit les découvertes les plus importantes par leur utilité, étoient aussi de profonds Géomètres. Les Auteurs anciens ne parlent qu'avec admiration des inventions d'Archimède, qui défendit trois ans Syracuse contre une armée Romaine. Mais pourquoi chercher dans des temps reculés des preuves d'une vérité dont nous avons sous les yeux des témoignages subsistans? N'est-ce pas à Galilée que nous devons les grandes lunettes & la première idée des pendules? Que de services Huyghens n'a-t-il pas rendus à l'Horlogerie? C'est Toricelli, Descartes & Paschal qui nous ont appris à construire des baromètres. Newton, dont les fameuses expériences sur la lumière sont connues de tout le monde, est l'inventeur des télescopes à réflexion. C'est Euler qui nous a donné les lunettes acromatiques; j'en pourrois citer beaucoup d'autres, si je ne craignois de faire une trop longue digression. L'étude des Mathématiques transcendantes rompt l'esprit aux méditations profondes; elle lui donne de l'étendue & de la justesse; elle l'exerce à suivre la vérité dans les dédales les plus tortueux, sans s'égarer.

Ce sont sans doute de semblables réflexions qui ont déterminé l'Assemblée nationale à exiger cette étude préliminaire des jeunes gens qui se présentent pour entrer dans le Génie Militaire & celui des Ponts & Chaussées, dans l'Artillerie & dans la Marine; loi à laquelle on s'est parfaitement bien conformé dans les écoles qui leur sont destinées. Il en est sorti un très-grand nombre de gens instruits, qui en portant leurs lumières dans les arts dont ils ont continuellement besoin, ne pourront que beaucoup en accélérer les progrès. Mais, dira-t-on, est-ce que les arts utiles ont attendu d'être cultivés par des Savans pour faire des progrès? Non, sans doute; des millions d'hommes, pendant plusieurs siècles, ont pu, en épuisant presque toutes les combinaisons possibles, arriver à celle dont la perfection d'un art dépendoit. S'ensuit-il de-là qu'il ne seroit pas infiniment avantageux d'épargner aux Artistes ces essais inutiles, en leur donnant des règles certaines; ce que ces Savans ont fait, comme nous le remarquions il n'y a qu'un instant, pour les arts qu'ils ont eu occasion d'étudier?

Euler avoit ouvert une carrière où il marchoit à grand pas. Dès 1744, il publia son Traité des *Isopérimètres*, qui renferme une méthode générale pour résoudre tous les Problêmes de ce genre. Les équations auxquelles il arrive, sont aussi celles qui doivent avoir lieu & être identiques, pour qu'une différentielle d'un ordre quelconque soit exacte; par cette remarque il enrichit le Calcul Intégral d'un nouveau Théorême. Les différens Ouvrage d'Euler annonçoienr qu'il avoit fait de profondes réflexions sur la science du Calcul; ce qui fut confirmé par l'introduction à l'Analyse des infinis & par les Institutions du Calcul différentiel, Ces deux excellens Traités, qui parurent l'un en 1748, & l'autre en 1755, forment, avec le Calcul Intégral publié en 1768, le corps de doctrine le plus parfait que nous ayons dans ce genre.

Les équations de condition sont aux différences partielles, je m'explique. Si on veut imaginer une fonction de plusieurs variables, & supposer qu'on l'a différentiée par rapport à une des variables seulement, on aura l'idée de ce qu'on appelle une différence partielle. Or une équation aux différences partielles, est une équation entre plusieurs variables, une fonction de ces variables & les différences partielles de cette fonction. Le facteur propre à rendre intégrable une différentielle proposée, est renfermé dans une semblable équation; & l'intégration de toute équation différentielle dépend de trouver une valeur qui satisfasse à l'équation de condition; Problême important que nous ne savons encore résoudre que dans quelques cas particuliers.

La plupart des Problêmes de Physique conduisent aussi à des équations aux différences partielles; mais alors si on se contentoit de satisfaire à ces équations, on n'auroit point résolu le Problême. Par exemple, l'expression de la force accélératrice nécessaire pour le *tautochronisme*, est renfermée dans une équation aux différences partielles; on eut satisfait aisément à cette équation dans beaucoup d'hypothèses particulières sur la résistance du milieu, mais ce n'étoit pas ce dont il s'agissoit; il falloit trouver une expression de la force qui pût convenir à toutes les hypothèses possibles. Cela exigeoit nécessairement que cette expression renfermât quelque fonction arbitraire où la vitesse & l'espace parcouru pussent entrer. Voilà donc un nouveau genre d'intégration où les arbitraires ne sont pas des constantes, mais des fonctions de variables. Euler le découvrit en 1734. En 1747 Dalembert en fit le plus bel usage dans ses *Recherches sur les vibrations des Cordes sonores*, & dans ses *Réflexions sur la cause générale des*

Vents. Mais ce fut sur-tout cinq ans après, lorsqu'il publia son *Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des Fluides*, que les Géomètres virent que les solutions qu'ils avoient jusqu'alors regardées comme générales, ne l'étoient point; & les Sciences Physico-Mathématiques changèrent absolument de face.

Alors ces nouvelles théories fixèrent plus particuliérement l'attention d'Euler. Il fit une remarque qui ouvre un champ bien vaste à ceux qui voudront appliquer le Calcul aux Sciences physiques. C'est que rien ne doit limiter la généralité des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales complètes des équations aux différences partielles; qu'on y doit comprendre les fonctions irrégulières & discontinues. Ainsi, par exemple, dans le Problême des cordes vibrantes, la courbe initiale pourra n'être point assujettie à la loi de continuité; elle pourra être l'assemblage de courbes différentes.

On ne sentit pas d'abord toute la justesse de la remarque d'Euler; elle occasionna des doutes qui ne furent bien éclaircis que par les savantes recherches de Lagrange *sur la nature & la propagation du Son*. Ces recherches se trouvent dans les Mémoires de Turin, dont le premier volume parut en 1759; ils renferment plusieurs autres découvertes qui méritèrent à ce Géomètre une grande célébrité à laquelle ne firent qu'ajouter les Pièces qui remportèrent les Prix de l'Académie des Sciences en 1764, 1766, 1772, 1774, 1780, & beaucoup d'autres Ouvrages.

Un Problême important dans les applications du Calcul Intégral des équations aux différences partielles, c'est celui de déterminer les fonctions arbitraires d'après des conditions données. On trouve dans le volume de l'Académie des Sciences de 1771, & dans le tome VII des Savans Etrangers, plusieurs beaux Mémoires où l'on démontre qu'on peut toujours faire dépendre ces sortes de questions de l'intégration d'équations aux différences finies. Cette nouvelle branche du Calcul Intégral méritoit encore d'être cultivée, par l'usage dont elle est dans la théorie des séries & dans celle des hasards; c'est ce que Laplace l'un des Géomètres, à qui l'on doit la découverte dont je viens de parler, a fait avec beaucoup de succès.

On peut juger par cet essai, tout imparfait qu'il est, combien une histoire détaillée des progrès de Mathématiques depuis le commencement du siècle, sera intéressante; sur-tout si elle nous est donnée par une main aussi habile que celle à qui nous devons les siècles précédens. On y verra toutes les théories modernes prendre naissance dans le livre immortel *des Principes mathématiques de la Philosophie na-*

TABLE SOMMAIRE
DE LA PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE II.

DE LA MÉTHODE DES INDÉTERMINÉES.

CHAPITRE III.

DE LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES.

CHAPITRE IV.

De la méthode des anciens Géomètres connues sous le nom de méthode des limites.

CHAPITRE V.

USAGE DE LA MÉTHODE DES LIMITES POUR DÉMONTRER LES PRINCIPES DE LA MÉCHANIQUE.

De

TRAITÉ

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DU CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE II.

DES PRINCIPAUX USAGES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE III.

DU CALCUL INTÉGRAL EN GÉNÉRAL.

CHAPITRE IV.

DE LA MÉTHODE DES VARIATIONS.

Fin de la Table.

TRAITÉ

TRAITÉ DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL.

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER.

Application de l'Algèbre a la Géométrie.

DESCARTES, en appliquant l'Algèbre à la Géométrie, a étendu & ſimplifié la méthode de réſoudre les problêmes. Tout ſe réduit à ſe procurer des équations : & comme la Géométrie ne nous offre pour cela que des triangles ſemblables ou des triangles rectangles ; il ne s'agit que de former des triangles ſemblables ou des triangles rectangles, au moyen de quelque conſtruction ſimple que la nature du problême indique.

(1). Nous commencerons par appliquer ces principes à la recherche des quantités qui tirent leur origine du cercle : & d'abord ſi dans la circonférence *AMBm* (*fig. I*), on mène un diamètre *AB* & des perpendiculaires à ce diamètre *MPm*, *NQn*, également diſtantes du centre *C* ; par la propriété de la courbe les parties *PM*, *Pm*, *QN*, *Qn*, qu'on appelle ordonnées, ſeront égales entre elles. Ces ordonnées n'ont pas la même direction. Pour les diſtinguer, lorſqu'elles ſont en ſens contraires, on les affecte de ſignes différens ; ſi l'on convient d'affecter du ſigne +, *PM*, *QN*, il faudra donner le ſigne — à *Pm*, *Qn*, & ainſi des deux abſciſſes *CP*, *CQ*, dont l'une *CP* étant priſe poſitivement, l'autre *CQ* doit l'être négativement. Mais il reſte à examiner ſi cela convenu, nous pourrons parvenir à repréſenter par ces lignes, ou à conſtruire toutes les racines de l'équation de la courbe.

(2). Je tire *CM*, & nommant le rayon, r, *CP*, x, *PM*, y, le triangle rectangle *CPM* donne $y^2 = r^2 - x^2$ & par conſéquent $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

Donc à la valeur positive de x, il doit répondre deux ordonnées égales entre elles PM, Pm, l'une positive, l'autre négative ; & à la valeur négative de x, deux autres ordonnées égales entr'elles & aux deux premières, QN, Qn, l'une positive, l'autre négative. Ainsi toutes les propriétés déduites de l'équation de la courbe sont exactement représentées par la construction précédente.

(3). Si l'on prend le rayon pour l'unité & qu'on nomme l'arc AM, m, l'ordonnée PM sera le sinus de cet arc, & l'abscisse CP son cosinus. On est convenu de représenter par sin. m le sinus de l'arc m, & par cos. m son cosinus ; alors l'équation de la circonférence prend une autre forme que voici : sin. $m^2 +$ cos. $m^2 = 1$.

(4). Par le centre C, je mène DCd perpendiculaire à AB ; & comme ces deux diamètres divisent la circonférence en quatre parties égales, l'arc DM sera $= 90^\circ - m$; on le nomme complément de l'arc AM, & il a pour sinus une perpendiculaire Mq sur CD, laquelle est égale à $CP =$ cos. m. Si de plus on tire par le point M, TMt perpendiculairement au rayon CM, MT sera la tangente de l'arc m qu'on représente par tang. m, & Mt la tangente de son complément ou sa cotangente, qu'on est convenu de représenter par cot. m. Maintenant les triangles semblables TMC, MPC donnent $CP : PM :: CM : MT$ $=$ tang. $m = \frac{\text{sin. } m}{\text{cos. } m}$; on tire aussi des triangles semblables tMC, MqC, $Cq\ qM :: CM : Mt =$ cot. $m = \frac{\text{cos. } m}{\text{sin. } m}$.

(5). Je nomme π le rapport de la demi-circonférence au rayon, ou simplement la demi-circonférence, le rayon étant pris pour l'unité, & il sera facile de déduire de ce qui précède que lorsque $m = 0$, sin. $m = 0$ & cos. $m = 1$, que sin. $\frac{1}{2}\pi = 1$, cos. $\frac{1}{2}\pi = 0$, sin. $\pi = 0$, cos. $\pi = -1$, sin. $\frac{3}{2}\pi = -1$, cos. $\frac{3}{2}\pi = 0$, sin. $2\pi = 0$, cos. $2\pi = 1$; que

$$\text{sin. } (\tfrac{1}{2}\pi \pm m) = + \text{cos. } m,\ \text{cos. } (\tfrac{1}{2}\pi \pm m) = \mp \text{sin. } m,$$
$$\text{sin. } (\pi \pm m) = \mp \text{sin. } m,\ \text{cos. } (\pi \pm m) = - \text{cos. } m,$$
$$\text{sin. } (\tfrac{3}{2}\pi \pm m) = - \text{cos. } m,\ \text{cos. } (\tfrac{3}{2}\pi \pm m) = \pm \text{sin. } m,$$
$$\text{sin. } (2\pi \pm m) = \pm \text{sin. } m,\ \text{cos. } (2\pi \pm m) = + \text{cos. } m.$$

Toutes ces formules sont comprises dans d'autres plus générales que voici, où m & n sont deux angles quelconques & $m > n$:

$$\text{sin. } (m \pm n) = \text{sin. } m \text{ cos. } n \pm \text{cos. } m \text{ sin. } n ;$$
$$\text{cos. } (m \pm n) = \text{cos. } m. \text{ cos. } n \mp \text{sin. } m \text{ sin. } n.$$

Nous allons en rappeller la démonstration en peu de mots.

(6). Soient représentés par AM & AN (*fig. II*) les deux arcs m & n & soient tirés du centre C les rayons CA, CM, CN, & sur CA, CN les perpendiculaires MP, NQ, Mm. A cause des triangles semblables CQN, CPR, on aura cos. n : sin. n :: cos. m ; $PR = \frac{\text{sin. } n}{\text{cos. } n}$ cos. m ; donc $MR =$ sin. $m + \frac{\text{sin. } n}{\text{cos. } n}$ cos. m.

Deux autres triangles femblables NQC, RmM donneront enfuite $1 : \cos. n ::$ $\text{fin.}\, m + \frac{\text{fin.}\, n}{\cos.\, n} \cos.\, m : \text{fin.}\,(m+n) = \text{fin.}\, m \cos.\, n + \cos.\, m\ \text{fin.}\, n.$

Les triangles CQN, MPn qui ont leurs côtés perpendiculaires font femblables & donnent $\cos.\, n : \text{fin.}\, n :: \text{fin.}\, m : Pn = \frac{\text{fin.}\, n}{\cos.\, n} \text{fin.}\, m$; donc $Cn = \cos.\, m - \frac{\text{fin.}\, n}{\cos.\, n} \text{fin.}\, m$. Ceux-ci CQN, Cmn donnent $1 : \cos.\, n :: \cos.\, m - \frac{\text{fin.}\, n}{\cos.\, n} \text{fin.}\, m : \cos.\,(m+n) = \cos.\, m \cos.\, n - \text{fin.}\, m\ \text{fin.}\, n.$

Pour démontrer les deux autres formules, on repréfentera par NM le plus grand arc m & par AN le moindre ; alors AM fera égal à la différence $m - n$. Les triangles femblables CQN, Cmn donneront $\cos.\, n : \text{fin.}\, n :: \cos.\, m : mn = \frac{\text{fin.}\, n}{\cos.\, n} \cos.\, m$; donc $Mn = \text{fin.}\, m - \frac{\text{fin.}\, n}{\cos.\, n} \cos.\, m$. On aura auffi, à caufe des triangles femblables CQN, MPn, $1 : \cos.\, n :: \text{fin.}\, m - \frac{\text{fin.}\, n}{\cos.\, n} \cos.\, m : \text{fin.}\,(m-n) = \text{fin.}\, m \cos.\, n - \cos.\, m\ \text{fin.}\, n.$

Les triangles femblables NQC, RmM donnent $\cos.\, n : \text{fin.}\, n :: \text{fin.}\, m : mR = \frac{\text{fin.}\, n}{\cos.\, n} \text{fin.}\, m$; donc $CR = \cos.\, m + \frac{\text{fin.}\, n}{\cos.\, n} \text{fin.}\, m$. Les deux autres triangles femblables CQN, CPR donnent $1 : \cos.\, n :: \cos.\, m + \frac{\text{fin.}\, n}{\cos.\, n} \text{fin.}\, m : \cos.\,(m-n) = \cos.\, m \cos.\, n + \text{fin.}\, m\ \text{fin.}\, n.$

(7). En ajoutant enfemble les deux équations

$$\text{fin.}\,(m+n) = \text{fin.}\, m \cos.\, n + \cos.\, m\ \text{fin.}\, n,$$
$$\text{fin.}\,(m-n) = \text{fin.}\, m \cos.\, n - \cos.\, m\ \text{fin.}\, n,$$

ôtant enfuite la feconde de la première, on en tire

$$2\ \text{fin.}\, m \cos.\, n = \text{fin.}\,(m+n) + \text{fin.}\,(m-n),$$
$$2 \cos.\, m\ \text{fin.}\, n = \text{fin.}\,(m+n) - \text{fin.}\,(m-n).$$

On tire des deux autres équations, en opérant de la même manière,

$$2 \cos.\, m \cos.\, n = \cos.\,(m+n) + \cos.\,(m-n),$$
$$2\ \text{fin.}\, m\ \text{fin.}\, n = \cos.\,(m-n) - \cos.\,(m+n).$$

(8). On tire des deux équations

$$\text{fin.}\,(m+n) = \text{fin.}\, m \cos.\, n + \cos.\, m\ \text{fin.}\, n,$$
$$\cos.\,(m+n) = \cos.\, m \cos.\, n - \text{fin.}\, m\ \text{fin.}\, n,$$

en faifant

$$m = n,\ \text{fin.}\, 2n = 2\ \text{fin.}\, n \cos.\, n,\ \cos.\, 2n = \cos.\, n^2 - \text{fin.}\, n^2$$
$$= 2 \cos.\, n^2 - 1,$$

$m = 2\,n$, $\text{ſin.}\ 3\,n = \text{ſin.}\ 2\,n \cos.\ n + \cos.\ 2\,n\ \text{ſin.}\ n = 4\ \text{ſin.}\ n \cos.\ n^2$

$\quad - \text{ſin.}\ n = 3\ \text{ſin.}\ n - 4\ \text{ſin.}\ n^3$,

$\quad \cos.\ 3\,n = \cos.\ 2\,n \cos.\ n - \text{ſin.}\ 2\,n\ \text{ſin.}\ n = 4 \cos.\ n^3 -$

$\quad 3 \cos.\ n$,

$m = 3\,n$, $\text{ſin.}\ 4\,n = \text{ſin.}\ 3\,n \cos.\ n + \cos.\ 3\,n\ \text{ſin.}\ n =$

$\quad - 4 \cos.\ n\ \text{ſin.}\ n^3 + 4\ \text{ſin.}\ n \cos.\ n^3 = \cos.\ n\ (4\ \text{ſin.}\ n - 8\ \text{ſin.}\ n^3)$;

$\quad \cos.\ 4\,n = \cos.\ 3\,n \cos.\ n - \text{ſin.}\ 3\,n\ \text{ſin.}\ n = 8 \cos.\ n^4 -$

$\quad 8 \cos.\ n^2 + 1 = 8\ \text{ſin.}\ n^4 + 8 \cos.\ n^2 - 7$,

& ainſi de ſuite. Il ſera donc facile de former les deux tables ſuivantes, dont nous ferons un fréquent uſage dans le calcul intégral :

$$2\ \text{ſin.}\ n^2 = 1 - \cos.\ 2\,n,$$
$$4\ \text{ſin.}\ n^3 = 3\ \text{ſin.}\ n - \text{ſin.}\ 3\,n,$$
$$8\ \text{ſin.}\ n^4 = 3 - 4 \cos.\ 2\,n + \cos.\ 4\,n,$$
$$16\ \text{ſin.}\ n^5 = 10\ \text{ſin.}\ n - 5\ \text{ſin.}\ 3\,n + \text{ſin.}\ 5\,n;$$
$$32\ \text{ſin.}\ n^6 = 10 - 15 \cos.\ 2\,n + 6 \cos.\ 4\,n - \cos.\ 6\,n;$$

&c.

$$2 \cos.\ n^2 = 1 + \cos.\ 2\,n,$$
$$4 \cos.\ n^3 = 3 \cos.\ n + \cos.\ 3\,n;$$
$$8 \cos.\ n^4 = 3 + 4 \cos.\ 2\,n + \cos.\ 4\,n;$$
$$16 \cos.\ n^5 = 10 \cos.\ n + 5 \cos.\ 3\,n + \cos.\ 5\,n;$$
$$32 \cos.\ n^6 = 10 + 15 \cos.\ 2\,n + 6 \cos.\ 4\,n + \cos.\ 6\,n;$$

&c.

(9). Il ne feroit pas plus difficile de former des tables analogues pour les tangentes & cotangentes au moyen des théorêmes ſuivans :

$$\text{tang.}\ (m+n) = \frac{\text{ſin.}\ m \cos.\ n + \cos.\ m\ \text{ſin.}\ n}{\cos.\ m \cos.\ n - \text{ſin.}\ m\ \text{ſin.}\ n} = \frac{\text{tang.}\ m + \text{tang.}\ n}{1 - \text{tang.}\ m\ \text{tang.}\ n},$$

$$\cot.\ (m+n) = \frac{\cot.\ m \cot.\ n - 1}{\cot.\ m + \cot.\ n}.$$ On trouvera de la même manière

$$\text{tang.}\ (m-n) = \frac{\text{tang.}\ m - \text{tang.}\ n}{1 + \text{tang.}\ m\ \text{tang.}\ n},\ \cot.\ (m-n) = \frac{\cot.\ m \cot.\ n + 1}{\cot.\ n - \cot.\ m}.$$

Soit $m + n = \alpha$, $m - n = \beta$, on en tire $m = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $n = \frac{\alpha-\beta}{2}$, &, ſubſtituant ces valeurs dans les formules du nº. 7,

$$\text{ſin.}\ \alpha + \text{ſin.}\ \beta = 2\ \text{ſin.}\ \frac{\alpha+\beta}{2} \cos.\ \frac{\alpha-\beta}{2},$$

ſin.

$$\sin. \alpha - \sin. \beta = 2 \cos. \frac{\alpha+\beta}{2} \sin. \frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos. \alpha + \cos. \beta = 2 \cos. \frac{\alpha+\beta}{2} \cos. \frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos. \beta - \cos. \alpha = 2 \sin. \frac{\alpha+\beta}{2} \sin. \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

On aura donc

$$\frac{\sin. \alpha + \sin. \beta}{\cos. \alpha + \cos. \beta} = \text{tang.} \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \frac{\sin. \alpha - \sin. \beta}{\cos. \alpha - \cos. \beta} = -\cot. \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\frac{\sin. \alpha - \sin. \beta}{\cos. \alpha + \cos. \beta} = \text{tang.} \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \frac{\sin. \alpha + \sin. \beta}{\cos. \alpha - \cos. \beta} = -\cot. \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(10). Nous prendrons pour second exemple de l'application de l'Algèbre à la Géométrie le calcul d'un triangle quelconque ABC (*fig. III*). Toute la construction consiste à abaisser d'un des angles une perpendiculaire CP sur le côté opposé, & à former par-là deux triangles rectangles APC, BPC. Cela posé, on considère dans un triangle trois côtés, trois angles, le périmètre & la surface. Je nomme les trois côtés AC, a, CB, b, AB, c, le périmètre, p, la perpendiculaire CP, q, la surface $\frac{cq}{2}$, s; je nomme aussi l'angle A, α, l'angle B, β; & parce que l'angle $C = 180° - \alpha - \beta$, on aura $\sin. C = \sin. (\alpha + \beta)$, $\cos. C = -\cos. (\alpha + \beta)$.

(11). En nommant l'un des segmens AP, x, l'autre PB sera $c - x$, & les deux triangles rectangles donneront

$$a^2 = x^2 + q^2, \; b^2 = c^2 - 2cx + x^2 + q^2,$$

d'où l'on tire $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$, &

$$4c^2q^2 = 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 =$$
$$4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = [(a+b)^2 - c^2][-(a-b)^2 + c^2] =$$
$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b).$$

(12). Le triangle rectangle CPA donne $x = a \cos. \alpha$, $q = a \sin. \alpha$, &, à cause de $\frac{ac \sin. \alpha}{2} = s$, $c = \frac{2s}{a \sin. \alpha}$. On trouve ensuite

$$b^2 = c^2 - 2cx + x^2 + q^2 = \frac{4s^2}{a^2 \sin. \alpha^2} - \frac{4s \cos. \alpha}{\sin. \alpha} + a^2,$$

$$b^2 = (p - a - c)^2 = p^2 - 2\left(a + \frac{2s}{a \sin. \alpha}\right)p + a^2 + \frac{4s}{\sin. \alpha} + \frac{4s^2}{a^2 \sin. \alpha^2};$$

& en rapprochant ces deux valeurs de b^2, l'équation

$$2pa^2 - \left(p^2 + 4s\frac{1 + \cos. \alpha}{\sin. \alpha}\right)a = -\frac{4ps}{\sin. \alpha}.$$

En calculant l'autre triangle CPB, on trouvera $c = \frac{2s}{b \sin. \beta}$ & l'équation

$$2pb^2 - \left(p^2 + 4s\frac{1 + \cos. \beta}{\sin. \beta}\right)b = -\frac{4ps}{\sin. \beta}.$$

Ainsi l'un des deux angles α ou $\mathcal{C}$, le périmètre & la surface étant donnés, on trouvera facilement les trois côtés & les deux autres angles. Le calcul du triangle n'auroit pas plus de difficulté, si c'étoit les deux angles α & $\mathcal{C}$ qui fussent donnés avec l'une de ces deux choses, le périmètre ou la surface; car il suffiroit d'éliminer p ou s au moyen des deux équations précédentes, & de combiner la résultante avec celle-ci a sin. $\alpha = b$ sin. $\mathcal{C}$ pour avoir a & b.

(13). En substituant dans la première équation $\frac{2s}{c \text{ sin. } \alpha}$ au lieu de a, & dans la seconde $\frac{2s}{c \text{ sin. } \mathcal{C}}$ au lieu de b, on a en c deux équations semblables à celles qu'on auroit trouvées, si on avoit mis c pour a dans la première, & c pour b dans la seconde; donc a & c sont les racines de l'une, & b & c celles de l'autre. On le démontrera différemment, en se rappellant que dans toute équation, ordonnée de manière que la plus haute puissance de l'inconnue n'ait pas de co-efficient, le co-efficient du second terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines; car il suit delà que $\frac{1}{2p}\left[p^2 + 4s.\frac{1+\text{cos. }\alpha}{\text{sin. }\alpha}\right] = a + c$, $\frac{1}{2p}\left[p^2 + 4s\frac{1+\text{cos. }\mathcal{C}}{\text{sin. }\mathcal{C}}\right] = b + c$, desquelles on tire, en les ajoutant ensemble, $2s\left[\frac{1+\text{cos. }\alpha}{\text{sin. }\alpha} + \frac{1+\text{cos. }\mathcal{C}}{\text{sin. }\mathcal{C}}\right] = cp$, ou

a cos. $\alpha + b$ cos. $\mathcal{C} = c$ qui n'est autre que $x + c - x = c$.

(14). Puisque q est donné en fonction des trois côtés & qu'on a sin. $\alpha = \frac{q}{a}$, sin. $\mathcal{C} = \frac{q}{b}$, il est clair que les trois côtés étant donnés, on connoîtra facilement tout le reste; il en sera de même si deux côtés & un angle sont donnés, pourvu que l'angle soit opposé à l'un des côtés. Mais si l'angle est compris entre les deux côtés, si l'angle C est donné avec les deux côtés a & b, on en conclura les deux autres angles au moyen des formules du n°. 9,

$$\frac{\text{sin. }\alpha + \text{sin. }\mathcal{C}}{\text{cos. }\alpha + \text{cos. }\mathcal{C}} = \text{tang. }\frac{\alpha+\mathcal{C}}{2},\quad \frac{\text{sin. }\alpha - \text{sin. }\mathcal{C}}{\text{cos. }\alpha + \text{cos. }\mathcal{C}} = \text{tang. }\frac{\alpha-\mathcal{C}}{2};$$

car en substituant à sin. α sa valeur $\frac{b \text{ sin. }\mathcal{C}}{a}$, on en tire

$$\frac{a+b}{a}\,\frac{\text{sin. }\mathcal{C}}{\text{cos. }\alpha + \text{cos. }\mathcal{C}} = \text{tang. }\frac{\alpha+\mathcal{C}}{2},\quad \frac{b-a}{a}\,\frac{\text{sin. }\mathcal{C}}{\text{cos. }\alpha + \text{cos. }\mathcal{C}} = \text{tang. }\frac{\alpha-\mathcal{C}}{2},$$

où $a + b : b - a ::$ tang. $\frac{\alpha+\mathcal{C}}{2}$: tang. $\frac{\alpha-\mathcal{C}}{2}$;

or $\alpha + \mathcal{C}$ est connu puisque $C = 180° - \alpha - \mathcal{C}$, on connoîtra $\alpha - \mathcal{C}$ par la proportion précédente, on aura donc α & $\mathcal{C}$.

(15). Sur une droite AB (*fig. IV & V*) prolongée s'il est nécessaire & divisée par le milieu en C, je prends deux points fixes F & f également distans de C & une infinité d'autres points, tels que H. Du point F comme centre & du rayon AH, du point f comme centre & du rayon BH, je décris deux circonférences qui se coupent en M & m de part & d'autre de la ligne AB;

& je demande la nature de la courbe qui passera par les points, tels que M, m. Pour y parvenir, je tire Mm, qui est perpendiculaire sur AB & les droites FM, fM, Fm, fm; je forme par-là des triangles rectangles MPF, MPf, mPF, mPf. Je nomme AB, $2a$, CF ou Cf, i, AP, x, PM, y; je nomme aussi FM, z, d'où je tire, à cause de $fM + FM = 2a$, $fM = 2a \mp z$.

Cela posé, si (*fig. IV*) $FP = AP - AF = AP - AC + CF = x - a + i$, $fP = BP - Bf = BP - BC + Cf = a + i - x$, les deux triangles rectangles FPM, fPM donnent $y^2 = z^2 - x^2 + 2(a - i)x - (a - i)^2 = 4a^2 - 4az + z^2 - (a + i)^2 + 2(a + i)x - x^2$; & par conséquent $z = a - i + \frac{ix}{a}$. On a dû remarquer que $FM = AH$ doit toujours être plus grand que AF, & qu'ainsi les points H ne peuvent être pris qu'entre les points F & f. Mais en substituant la valeur de z dans l'une des deux équations, on en tire $y^2 = \frac{a^2 - i^2}{a^2}(2ax - x^2)$,

qui est celle de la courbe entre les deux *co-ordonnées* perpendiculaires entr'elles, dont l'une x est nommée l'abscisse & l'autre y est nommée l'ordonnée. On trouveroit la même équation en calculant les deux autres triangles FPm, fPm; donc si MP est une des racines de cette équation, mP sera l'autre; & si l'on prend PM pour la racine positive, Pm sera la négative. On a donné le nom d'*ellipse* à la courbe dont il s'agit; elle passe par les points A & B, puisque $x = 0$ & $x = 2a$, racines de l'équation $2ax - x^2 = 0$, donnent l'une & l'autre $y = 0$. La ligne AB a été nommée le *grand axe* de l'ellipse; pour trouver le *petit axe*, des points F, f comme centre & des rayons AC, BC, on décrit des circonférences qui se coupent en D, d; & par ces points, qui appartiennent à la courbe, on tire Dd qui passe par le point C & qui est perpendiculaire sur AB; c'est pourquoi si l'on nomme $2b$ le petit axe Dd, à cause de $FD = fD = a$, on aura $b^2 = a^2 - i^2$. Autrement, le petit axe étant la double ordonnée qui passe par le centre C & qui répond à l'abscisse a, on doit le trouver en faisant $x = a$ dans l'équation de la courbe; en effet on en tire $b^2 = a^2 - i^2$. En substituant cette valeur, l'équation de l'ellipse prend une autre forme que voici : $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$.

(16). Si (*fig. V*) $FP = AP - AF = AP - CF + CA = x - i + a$, $fP = BP + Bf = BA + AP + Cf - CB = a + i + x$, les deux triangles rectangles FPM, fPM donnent $y^2 = z^2 - x^2 + 2(i - a)x - (i - a)^2 = 4a^2 + 4az + z^2 - x^2 - 2(a + i)x - (a + i)^2$, & par conséquent $z = i - a + \frac{ix}{a}$. Nous remarquerons que $FM = AH$ doit être plus grand que AF, & que dans ce second cas les points H ne peuvent être pris entre les points F & f. Mais en substituant la valeur de z dans l'une des deux équations, on en tire $y^2 = \frac{i^2 - a^2}{a^2}(2ax + x^2)$,

qui est celle de la courbe à laquelle on a donné le nom d'*hyperbole*; elle passe par le point A, car $x = 0$ donne $y = 0$. La droite AB est son grand axe; mais

si par le centre C, on mène la perpendiculaire Dd, telle que $\overline{CD}^2$ ou $\overline{Cd}^2 = b^2 - a^2$, les points D, d, n'appartiendront point à l'hyperbole, comme le fait voir la construction & comme on le tire de l'équation même, car en y faisant $x = -a$, on trouve pour y^2 une valeur négative, ou pour y une valeur imaginaire. Cependant nous prendrons pour l'équation de l'hyperbole

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

où a & b seront, comme dans l'ellipse, les *demi-axes conjugués*. Toutes les valeurs négatives de x moindres que $2a$, donneront pour y une valeur imaginaire. Mais si l'on fait $x = -2a$, on aura $y = 0$; si de plus l'on fait $x = -(2a + t)$; en nommant u l'ordonnée correspondante, on aura $u^2 = \frac{b^2}{a^2}(2au + t^2)$, équation d'une hyperbole semblable à la première, qui lui est opposée ; cette seconde hyperbole a son sommet au point B. Dans les *hyperboles* opposées, plus l'abscisse augmente, plus l'ordonnée correspondante augmente ; c'est-à-dire, que les branches de ces courbes s'étendent à l'infini ; il n'en est pas de même de l'ellipse qui est une courbe fermée.

(17). Sur le prolongement d'une droite BA (*fig. VI*), je prends un point fixe F, tel que $AF = BA$ & une infinité d'autres points P, par lesquels je mène librement des perpendiculaires MPm à BP ; puis du point F comme centre & des rayons BP, je décris des circonférences qui coupent ces perpendiculaires en des points M, m, & je demande la nature de la courbe qui passe par ces points. En tirant FM, Fm, je forme deux triangles rectangles qui doivent conduire à la même équation. Or si je nomme AB ou AF, a, AP, x, PM, y, à cause de $FM = a + x$, $FP = x - a$, le triangle FPM donnera $a^2 + 2ax + x^2 = y^2 + x^2 - 2ax + a^2$, & par conséquent $y^2 = 4ax$ qui est l'équation de la courbe, qu'on nomme *parabole*. Dans celle-ci, comme dans l'hyperbole, plus l'abscisse augmente, plus l'ordonnée augmente ; c'est-à-dire, que les branches de la parabole s'étendent à l'infini. On voit en outre que $x = 0$ donne $y = 0$, & que par conséquent la courbe passe par le point A.

(18). Les trois courbes dont nous venons de donner les équations, ont le nom de *sections coniques*, parce que si l'on coupe un cône par un plan qui ne passe pas par le sommet & qui ne soit pas parallèle à la base, la ligne courbe formée par la rencontre de ce plan avec la surface conique, est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Imaginez par le sommet du cône un plan parallèle au plan d'une section conique & qui rencontre le plan de la base du cône dans une droite indéfinie qu'on appelle directrice : la section conique sera une ellipse, lorsque la directrice tombera toute entière au-dehors du cercle, qui est la base du cône ; une hyperbole lorsqu'elle le traversera ; une parabole lorsqu'elle sera tangente à ce cercle. Cette proposition se trouvera démontrée dans la théorie des surfaces courbes, n°. 60.

Dans la parabole le point fixe F, dans l'ellipse & l'hyperbole les points fixes F, f, sont nommés les *foyers* de ces courbes. On appelle *paramètre* dans la parabole le

le quadruple de AF ou $4a$; dans les deux autres courbes, la troisième proportionnelle aux deux axes, est appellée *paramètre* de celui qui est le premier terme de la proportion.

(19). Une ligne droite qui ne rencontre une courbe qu'en un seul point, & qui, étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe audehors, est appellée tangente en ce point. Soit une courbe AMN (*fig. VII*) & deux ordonnées perpendiculaires à l'axe, MP, NQ; je tire la corde NMS & j'abaisse sur NQ la perpendiculaire MO; je nomme ensuite AP, x, AQ, X, PM, y, QN, Y, & les triangles semblables NOM, MPS donnent

$$NO,\ Y-y,\ :\ OM,\ X-x,\ ::\ y\ :\ PS=\frac{X-x}{Y-y}\,y.$$

Cela posé, si MT est tangente au point M, plus le point N approchera du point M, plus NMS approchera de se confondre avec MT; on aura la sous-tangente PT en faisant $X=x$, $Y=y$ dans l'expression de PS. Mais alors cette expression se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, ce qui ne nous apprendroit rien, si pour chaque courbe particulière, elle ne prenoit une valeur déterminée.

Si la courbe est une parabole dont p est le paramètre, on a $y^2=px$, $Y^2=pX$, d'où l'on tire Y^2-y^2 ou $(Y+y)(Y-y)=p(X-x)$, & par conséquent $\frac{X-x}{Y-y}\,y=\frac{Y+y}{p}\,y$, expression qui se change en celle-ci, $\frac{2y^2}{p}$ lorsqu'on fait $Y=y$ & $X=x$. Donc lorsque la courbe est une parabole

$$PT=\frac{2y^2}{p}=2x.$$

Si la courbe est une ellipse ou une hyperbole, on a

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax\mp x^2),\quad Y^2=\frac{b^2}{a^2}(2aX\mp X^2);$$

d'où l'on tire Y^2-y^2 ou $(Y+y)(Y-y)=\frac{b^2}{a^2}\left[2a(X-x)\mp(X+x)(X-x)\right]$, & par conséquent

$$\frac{X-x}{Y-y}\,y=\frac{y(Y+y)}{\frac{b^2}{a^2}(2a\mp(X+x))},$$

expression qui se change en celle-ci

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a\mp x)},$$

lorsqu'on fait $X=x$ & $Y=y$.

Donc lorsque la courbe est une ellipse ou une hyperbole,

la sous-tangente $PT=\frac{2ax\mp x^2}{a\mp x}$.

On appelle *normale* une perpendiculaire MR à la tangente MT, & *sous-normale* la partie PR de la ligne des abscisses. Or PR sera donné par cette proportion

$PT : PM :: PM : PR$; les deux triangles rectangles TPM, MPR donneront ensuite la tangente MT & la normale MR.

Dans la parabole $PR = \frac{p}{2}$, $\overline{MT}^2 = x\,(4x + p)$, $\overline{MR}^2 = \frac{p}{4}(4x + p)$.

Dans l'ellipse & l'hyperbole $PR = \frac{b^2}{a^2}\,(a \mp x)$, $\overline{MT}^2 =$

$$(2ax \mp x^2)\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{2ax \mp x^2}{(a \mp x)^2}\right),\ \overline{MR}^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(2ax \mp x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a \mp x)^2\right).$$

Mais cette théorie des tangentes ne pourra trouver son entier développement que dans les applications du calcul différentiel; nous allons nous occuper des autres affections des courbes algébriques, en présentant le problème sous la forme la plus générale.

(20). Imaginez deux droites AE, BF (*fig. VIII* & *IX*) qui se coupent en faisant entr'elles un angle BHA (m), & une droite Mm qui, prolongée s'il est nécessaire, coupe BF en faisant avec elle un angle BNM (q); soient aussi tirées des points B, M, m les droites parallèles BD, MP, mp qui font avec AE un angle (n).

On nommera AD (x), BD (y), AP (X), PM (Y), Ap (X'), pm (Y'), BN (T), MN (V), mN (V');
& les deux triangles semblables BDH, HPu donneront

$$BH = \frac{y \sin. n}{\sin. m},\ DH = \frac{y \sin. (m+n)}{\sin. m},\ Pu = \frac{(X-x)\sin. m}{\sin. (m+n)} - y,$$

$$Hu = \frac{(X-x)\sin. n}{\sin. (m+n)} - \frac{y \sin. n}{\sin. m},$$

$$uM = Y + y - \frac{(X-x)\sin. m}{\sin. (m+n)}.$$

Dans le triangle uMN, l'angle $M = m + n - q$; donc

$$MN\,(V) = (Y+y)\frac{\sin. (m+n)}{\sin. q} - (X-x)\frac{\sin. m}{\sin. q},$$

$$uN = \frac{\sin. (m+n-q)}{\sin. (m+n)}\,V;\ \text{donc}$$

$$BN\,(T) = (X-x)\frac{\sin. n.}{\sin. (m+n)} + \frac{\sin. (m+n-q)}{\sin. (m+n)}\,V.$$

On tire de ces équations

$$(1) \ldots.\ (X - x)\ \sin. n = T \sin. (m+n) - V \sin. (m+n-q)$$

$$(2) \ldots.\ (Y+y)\sin. (m+n) = V \sin. q + \frac{\sin. m}{\sin. n}\Big[T \sin. (m+n) - V(\sin. (m+n-q)\Big].$$

(21). Dans le triangle Hpt,

$$pt = \frac{(X'-x)\sin. m}{\sin. (m+n)} - y,\ Ht = \frac{(X'-x)\sin. n}{\sin. (m+n)} - \frac{y \sin. n}{\sin. m}.$$

Partant $tm = \pm \left[\frac{(X' - x) \text{ fin. } m}{\text{fin. } (m + n)} - y - Y' \right]$,

$$mN(V') = \pm \left[\frac{(X' - x) \text{ fin. } m}{\text{fin. } q} - (y + Y') \frac{\text{fin. } (m + n)}{\text{fin. } q} \right],$$

$Nt = \pm \frac{\text{fin. } (m + n - q)}{\text{fin. } (m + n)} V'$; on en tire une autre valeur de

$$BN(T) = (X' - x) \frac{\text{fin. } n}{\text{fin. } (m + n)} \mp \frac{\text{fin. } (m + n - q)}{\text{fin. } (m + n)} V'.$$

On aura donc ces deux équations

$$(3) \ldots . (X' - x) \text{ fin. } n = T \text{ fin. } (m + n) \pm V' \text{ fin. } (m + n - q);$$

$$(4) \ldots . (Y' + y) \text{ fin. } (m + n) = \frac{\text{fin. } m}{\text{fin. } n} \left[T \text{ fin. } (m + n) \pm V' \text{ fin. } (m + n - q) \right] \mp V' \text{ fin. } q.$$

(22). Si M & m font deux points d'une courbe propofée, V & V' feront deux des racines de fon équation; & il fuffira des équations 1 & 2, ou 3 & 4, en mettant fucceffivement pour V dans les deux premières, ou pour V' dans les deux autres, toutes les racines de l'équation propofée.

Des courbes du fecond ordre.

(23). Nous repréfenterons toutes les équations des courbes du fecond ordre par

$$aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX + f = 0;$$

& fi l'on fuppofe que les co-ordonnées Y & X font perpendiculaires entr'elles, l'angle n fera droit, & à caufe de

$$\text{fin. } (m + n) = \cos. m, \text{ fin. } (m + n - q) = \cos. (q - m),$$

les équations 1 & 2 deviendront

$$X - x = T \cos. m - V \cos. (q - m),$$
$$Y + y = T \text{ fin. } m + V \text{ fin. } (q - m).$$

Nous mettrons pour X & Y leurs valeurs dans la propofée, & après avoir fait pour abréger,

$$a \text{ fin. } (q - m)^2 - b \text{ fin. } (q - m) \cos. (q - m) + c \cos. (q - m)^2 = E,$$

$$2a \text{ fin. } m \text{ fin. } (q - m) + b \left(\cos. m \text{ fin. } (q - m) - \text{fin. } m \cos. (q - m) \right) - 2c \cos. m \cos. (q - m) = F,$$

$$a \text{ fin. } m^2 + b \text{ fin. } m \cos. m + c \cos. m^2 = G,$$

$$(2ay - bx - d) \text{ fin. } (q - m) - (by - 2cx - e) \cos. (q - m) = H,$$

$$(2ay - bx - d) \text{ fin. } m + (by - 2cx - e) \cos. m = I,$$

$$ay^2 - bxy + cx^2 - dy + ex - f = K,$$

nous donnerons à la transformée la forme suivante:

$$EV^2 + (FT - H)V + GT^2 - IT + K = 0.$$

(24). Pour que $K=0$, il suffit que le point B soit un des points de la courbe, ce qu'on peut toujours supposer. On peut faire en outre $F=0$, $H=0$ qui serviront à déterminer les angles m & q; il est donc démontré que toute équation du second degré peut se réduire à une de cette forme:

$$aY^2 + cX^2 + eX = 0:$$

& si l'on fait dans celle-ci les mêmes substitutions que dans la première, on aura pour transformée

$EV^2 + (FT - H)V + GT^2 - IT + K = 0$, où

$E = a$ sin. $(q-m)^2 + c$ cos. $(q-m)^2$,

$F = 2a$ sin. m sin. $(q-m) - 2c$ cos. m cos. $(q-m)$,

$G = a$ sin. $m^2 + c$ cos. m^2,

$H = 2ay$ sin. $(q-m) + (2cx+e)$ cos. $(q-m)$,

$I = 2ay$ sin. $m - (2cx+e)$ cos. m,

$K = ay^2 + cx^2 + ex$.

Mais l'équation $Y^2 = -\frac{c}{a}(X^2 + \frac{e}{c}X)$ est celle de toutes les sections coniques; elle l'est de l'ellipse, lorsque c & a étant positifs, on a e négatif; de l'hyperbole, lorsque a étant positif, on a c & e négatifs; de la parabole, lorsque $c=0$. Il n'y a donc de courbes du second ordre que les sections coniques.

Des sections coniques.

(25). Premièrement je ferai $K=0$, puisqu'on peut toujours supposer que A & B sont deux points de la courbe. Secondement le co-efficient $\frac{FT-H}{E}$, pris avec un signe contraire, étant égal à la somme des racines, si l'on fait $FT - H = 0$, les deux racines, ou les deux valeurs de V, deviendront égales, l'une positive, l'autre négative. Mais au centre tous les Mm qui y passent doivent être divisés en deux parties égales; ainsi, pour trouver le centre, il faudra faire que l'équation $FT - H = 0$ ait lieu, quelque soit l'angle $q-m$, ce qui donnera

T sin. $m = y$, T cos. $m = -x - \frac{e}{2c}$; & éliminant T

$$x + \frac{y \text{ cos. } m}{\text{sin. } m} = -\frac{e}{2c}.$$

Déterminons l'angle m de manière que BF passe par ce centre; à cause de $AH = x + \frac{y \text{ cos. } m}{\text{sin. } m}$, nous aurons $AH = -\frac{e}{2c}$, qui sera positif pour l'ellipse, négatif pour l'hyperbole & infini pour la parabole.

(26).

(26). Troisièmement la même équation $FT - H = 0$, servira à déterminer les diamètres, s'ils doivent avoir autant d'ordonnées positives que de négatives, égales chacune à chacune; & comme cette équation est du premier degré, ces diamètres seront des lignes droites. Supposons la droite FF un de ces diamètres; l'équation devra être vérifiée dans toute son étendue; c'est-à-dire, qu'il faudra qu'elle ait lieu quelque soit T. On en tirera par conséquent $F = 0$, $H = 0$; & comme nous l'avons déjà trouvé, $x + \frac{y \cos. m}{\sin. m} = -\frac{e}{2c}$; on aura en outre

$$\frac{\sin. (q - m)}{\cos. (q - m)} = \frac{c}{a} \frac{\cos. m}{\sin. m}.$$

En faisant dans la transformée F, H, K nuls, elle devient

$$V^2 = -\frac{G}{E} (T^2 - \frac{I}{G} T), \text{ où}$$

$$\frac{I}{G} = \frac{2y}{\sin. m} = 2BH \;\&\; \frac{G}{E} = \frac{a \sin. m^2}{c \cos. (q - m)^2};$$

cette dernière quantité est positive pour l'ellipse, négative pour l'hyperbole, & infinie pour la parabole.

(27). Les ordonnées MP, mp étant perpendiculaires à AH, il sera un des demi-axes de la section conique. Nommons le h, & i le demi-axe conjugué; nous aurons dans l'ellipse $\frac{e}{c} = -2h$, & faisant $X = h$, $Y = i$ dans l'équation de la courbe, $\frac{c}{a} = \frac{i^2}{h^2}$; nous aurons dans l'hyperbole $\frac{e}{c} = 2h$, & faisant $X = -h$, $Y = i$ dans l'équation de la courbe, $\frac{c}{a} = -\frac{i^2}{h^2}$; car $\frac{c}{a}$ doit être négatif. Ainsi l'équation $Y^2 = \frac{i^2}{h^2} (2hX \mp X^2)$ sera celle de ces sections coniques, par rapport aux axes, le signe $-$ étant pour l'ellipse & le signe $+$ pour l'hyperbole. En nommant X' l'abscisse prise du centre, on a $X' = h \mp X$, & par conséquent $2hX \mp X^2 = \pm h^2 \mp X'^2$. L'équation des deux sections coniques peut donc prendre cette autre forme $Y^2 = \pm \frac{i^2}{h^2} (h^2 - X'^2)$.

Nommons h' le demi-diamètre BH & i' son demi-diamètre conjugué; nous aurons dans l'ellipse $\frac{I}{G} = 2h'$, & faisant $T = h'$, $V = i'$ dans la transformée, $\frac{G}{E} = \frac{i'^2}{h'^2}$; nous aurons dans l'hyperbole $\frac{I}{G} = -2h'$, & faisant $T = -h'$, $V = i'$ dans la transformée, $\frac{G}{E} = -\frac{i'^2}{h'^2}$, car $\frac{G}{E}$ doit être négatif. Ainsi l'équation $V^2 = \frac{i'^2}{h'^2} (2h'T \mp T^2)$, sera celle de ces sections coniques, par rapport aux diamètres, le signe $-$ étant pour l'ellipse & le signe $+$ pour l'hyperbole. En nommant T' l'abscisse prise du centre, la même équation prendra cette autre forme $V^2 = \pm \frac{i'^2}{h'^2} (h'^2 - T'^2)$, où le signe $+$ est pour l'ellipse & le signe $-$ pour l'hyperbole.

Il eſt donc démontré que la propriété des deux ſections coniques relative aux deux axes, s'étend à deux diamètres conjugués quelconques.

(28). Nous avons trouvé $y = h'$ ſin. m, $y^2 \frac{\text{cos. } m^2}{\text{ſin. } m^2} = (h \mp x)^2$

$= h^2 \mp \frac{h^2}{i^2} y^2$; partant ſin. $m^2 \pm \frac{i^2}{h^2}$ cos. $m^2 = \pm \frac{i^2}{h'^2}$.

On tire de celle-ci ſin. $m^2 = \pm \frac{i^2}{h'^2} \; \frac{h^2 - h'^2}{h^2 \mp i^2}$, cos. $m^2 = \frac{h^2}{h'^2} \; \frac{h'^2 \mp i^2}{h^2 \mp i^2}$;

& par conſéquent $\frac{\text{ſin. } (q-m)^2}{\text{cos. } (q-m)^2} = \frac{i^4}{h^4} \frac{\text{cos. } m^2}{\text{ſin. } m^2} = \pm \frac{i^2}{h^2} \; \frac{h'^2 \mp i^2}{h^2 - h'^2}$,

$$\text{ſin. } (q-m)^2 = \pm \frac{i^2}{h^2} \frac{h'^2 \mp i^2}{h^2 - h'^2 \pm \frac{i^2}{h^2}(h'^2 \mp i^2)} = \frac{\pm i^2 (h'^2 \mp i^2)}{(h^2 \mp i^2)(h^2 \pm i^2 - h'^2)},$$

$$\text{cos. } (q-m)^2 = \frac{h^2 - h'^2}{h^2 - h'^2 \pm \frac{i^2}{h^2} (h'^2 \mp i^2)} = \frac{\pm h^2 (h^2 - h'^2)}{(h^2 \mp i^2)(h^2 \pm i^2 - h'^2)},$$

$$\text{ſin. } (q-m)^2 \pm \frac{i^2}{h^2} \text{ cos. } (q-m)^2 = \frac{\pm i^2}{h^2 \pm i^2 - h'^2}.$$

Mais $\frac{\text{ſin. } m^2 \pm \frac{i^2}{h^2} \text{cos. } m^2}{\text{ſin. } (q-m)^2 \pm \frac{i^2}{h^2} \text{cos. } (q-m)^2} = \frac{G}{E} = \pm \frac{i'^2}{h'^2}$;

donc $h^2 \pm i^2 = h'^2 \pm i'^2$; c'eſt-à-dire, que la ſomme des quarrés de deux diamètres conjugués dans l'ellipſe, ou la différence de ces quarrés dans l'hyperbole, eſt conſtamment la même pour tous les points de la courbe.

(29). On verra aiſément que ſin. $q =$ ſin. m cos. $(q-m)$ + cos. m ſin. $(q-m)$; en mettant dans cette équation pour ſin. m, cos. m, ſin. $(q-m)$, cos. $(q-m)$ leurs valeurs, on aura

$$\text{ſin. } q = \frac{ih\sqrt{\pm 1}}{h' \sqrt{h^2 \pm i^2 - h'^2}} \text{ : à cauſe de } h^2 \pm i^2 - h'^2 = \pm i'^2,$$

on en tire $h' i'$ ſin. $q = hi$; ainſi dans l'une & l'autre ſection conique, le produit de deux diamètres conjugués, multipliés par le ſinus de l'angle que ces diamètres font entr'eux, eſt une quantité conſtamment la même pour tous les points de la courbe.

(30). Maintenant je ſuppoſe que le diamètre BF coupe une corde quelconque en faiſant avec elle, prolongée s'il eſt néceſſaire, un angle q; alors le co-efficient du ſecond terme ne diſparoîtra plus dans la transformée, à laquelle on pourra donner la forme ſuivante $V^2 + \frac{FT - II}{E} V + \frac{GT^2 - IT}{E} = 0$.

Cette équation a pour racines NM & Nm; & comme par la nature des équations, le troisième terme est égal au produit des racines, on aura $NM.Nm = \frac{GT^2 - IT}{E}$. Mais si l'on fait passer par le même point N une autre corde $M'm'$ qui fasse avec BF un angle q', en nommant E' ce que devient E lorsqu'on y change q en q', on aura aussi $NM'.Nm' = \frac{GT^2 - IT}{E'}$. Donc

$$NM.Nm : NM'.Nm' :: E' : E :: \text{fin.}(q' - m)^2 + \frac{c}{a}\cos.(q' - m)^2 : \text{fin.}(q - m)^2 + \frac{c}{a}\cos.(q - m)^2.$$

Parallélement aux deux cordes, tirons du centre deux demi-diamètres λ, λ', & par les points où ils rencontrent la courbe, abaissons sur l'axe des ordonnées λ fin. $(q - m)$, λ' fin. $(q' - m)$; les abscisses correspondantes prises du centre seront λ cos. $(q - m)$, λ' cos. $(q' - m)$, & l'on aura

$$\lambda^2 \text{fin.}(q - m)^2 = \pm \frac{i^2}{h^2}\left(h^2 - \lambda^2 \cos.(q - m)^2\right),$$

$$\lambda'^2 \text{fin.}(q' - m)^2 = \pm \frac{i^2}{h^2}\left(h^2 - \lambda'^2 \cos.(q' - m)^2\right),$$

d'où il sera facile de tirer

$$\text{fin.}(q - m)^2 \pm \frac{i^2}{h^2}\cos.(q - m)^2 = \pm \frac{i^2}{\lambda^2},$$

$$\text{fin.}(q' - m)^2 \pm \frac{i^2}{h^2}\cos.(q' - m)^2 = \pm \frac{i^2}{\lambda'^2},$$

& à cause de $\frac{c}{a} = \pm \frac{i^2}{h^2}$, la proportion suivante

$$NM.Nm : NM'.Nm' :: \lambda^2 : \lambda'^2.$$

Dans le cercle $\lambda = \lambda'$, & $NM.Nm = NM'.Nm'$.

(31). En continuant de regarder le point B comme un des points de la courbe, nous supposerons que BF passe par le foyer, & dans la transformée nous ferons $q = 180^\circ$, fin. $q = 0$, cos. $q = -1$, fin. $(q - m) =$ fin. m, cos. $(q - m) = -$ cos. m; d'où

$$E = G = -\frac{F}{2} = a\left(\text{fin.}\, m^2 \pm \frac{i^2}{h^2}\cos.\, m^2\right),$$

$$I = -H = 2a\left[y\,\text{fin.}\, m \mp \frac{i^2}{h^2}(x \mp h)\cos.\, m\right].$$

Mais en nommant AH, $\mathfrak{C}$, BH, r', on a $y = r'$ fin. m,

$$x = \mathfrak{C} - r'\cos.\, m, \;\&\; I = -H = 2a\left[r'\left(\text{fin.}\, m^2 \pm \frac{i^2}{h^2}\cos.\, m^2\right) \mp \frac{i^2}{h^2}(\mathfrak{C} \mp h)\cos.\, m\right].$$

En fubftituant ces valeurs dans la transformée, elle devient

$$V + T - 2r' \pm \frac{2i^2}{h^2} \frac{(\epsilon \mp h)\cos. m}{\text{fin}. m^2 \pm \frac{i^2}{h^2}\cos. m^2} = 0.$$

Or r' eft une partie de la droite $V + T$; fi l'on nomme r l'autre partie, on aura $r - r' = \frac{2i^2}{h^2} \frac{(h \mp \epsilon)\cos. m}{1 - \frac{h^2 \mp i^2}{h^2}\cos. m^2}$,

ou, mettant $(h \mp \epsilon)^2$ pour $h^2 \mp i^2$, on aura

$$r - r' = \frac{2i^2}{h^2} \cdot \frac{(h \mp \epsilon)\cos. m}{1 - \frac{(h \mp \epsilon)^2}{h^2}\cos. m^2} = \frac{i^2}{h}\left[\frac{1}{1 - \frac{h \mp \epsilon}{h}\cos. m} - \frac{1}{1 + \frac{h \mp \epsilon}{h}\cos. m}\right].$$

On appelle *rayon vecteur* toute ligne tirée du foyer à un point de la courbe; ainfi r & r' font deux rayons vecteurs; & comme ils ne peuvent différer que par le figne de cos. m, & que d'ailleurs lorfque m eft nul, $r' = \epsilon$ & $r = \pm 2h - \epsilon$, on aura

$$r' = \frac{i^2}{h + (h \mp \epsilon)\cos. m},\ r = \frac{i^2}{h - (h \mp \epsilon)\cos. m}.$$

Ces équations font connues fous le nom d'équations polaires des deux fections coniques.

(32). Dans l'hyperbole les deux branches de la courbe s'étendent à l'infini. Il y a des lignes qui en approchent fans ceffe fans pouvoir les atteindre; on les a nommées *afymptotes*. Si BF eft une de ces afymptotes, il faut qu'elle ne puiffe pas rencontrer l'hyperbole ni fon oppofée, telle valeur que l'on donne à V; ce qu'on obtiendra en faifant en forte qu'une des racines de la transformée, réfolue par rapport à T, foit infinie, ou, ce qui eft la même chofe, en rendant nul le co-efficient de T^2. Or de l'équation $G = 0$, on tire $\frac{\text{fin}. m^2}{\cos. m^2} = \mp \frac{i^2}{h^2}$, qui eft impoffible pour l'ellipfe, & effectivement l'ellipfe n'a pas de branche qui s'étende à l'infini; elle donne pour l'hyperbole, $\frac{\text{fin}. m}{\cos. m} = \pm \frac{i}{h}$. Ainfi l'hyperbole a deux afymptotes qu'on conftruira de la manière fuivante: on mènera par fon fommet une parallèle au fecond axe qui lui foit égale & qui foit divifée en deux également par le premier axe; enfuite on tirera du centre deux lignes par les extrémités de cette parallèle; ces lignes, prolongées de part & d'autre, feront les afymptotes des hyperboles oppofées.

(33). Je fuppoferai l'ordonnée à BF parallèle à l'autre afymptote, c'eft-à-dire, que je ferai $q = 2m$, d'où $E = G = 0$,

F

$$F = 2a\left(\text{fin. } m^2 + \frac{i^2}{h^2}\cos. m^2\right),$$

$$H = 2a\left(y \text{ fin. } m - \frac{i^2}{h^2}(x+h)\cos. m\right)$$

$$I = 2a\left(y \text{ fin. } m + \frac{i^2}{h^2}(x+h)\cos. m\right)$$

$$K = a\left(y^2 - \frac{i^2}{h^2}(x^2 + 2hx)\right).$$

Cela posé, V doit diminuer à mesure que T augmente, sans cependant que cette ordonnée puisse devenir nulle ; on satisfera à cette condition, en faisant en sorte que V soit une fraction qui ait pour dénominateur T & pour numérateur une quantité constante. Alors la transformée sera réduite à $FTV = K$, & il faudra que H & I soient nuls, d'où l'on tirera $y = 0$, $x = -h$ & $K = a\, i^2$. Mais fin. $m^2 = \frac{i^2}{h^2 + i^2}$, cos. $m^2 = \frac{h^2}{h^2 + i^2}$; donc $F = a\,\frac{4 i^2}{h^2 + i^2}$.

Donc $TV = \frac{h^2 + i^2}{4}$; dans cette équation aux asymptotes, $\frac{h^2 + i^2}{4}$ a été nommé *puissance de l'hyperbole.*

(34). Imaginons une droite quelconque terminée de part & d'autre par les asymptotes, & supposons comme ci-dessus $y = 0$, $x = -h$; la transformée prendra la forme suivante $V^2 + \frac{F}{E}TV + \frac{K}{E} = 0$, où $\frac{K}{E}$ est égal au produit des racines, ou au produit des parties de la droite dont il s'agit comprises entre l'asymptote BF & les deux branches de la courbe. Si cette droite est perpendiculaire à l'axe, $q - m = 90^\circ$, $E = a$ & le produit en question $= i^2$. Je passe aux propriétés de la parabole.

(35). Pour cette courbe l'équation $FT - H = 0$ devient

$$2a(T \text{ fin. } m - y)\text{ fin. }(q - m) - e\cos.(q - m) = 0,$$

qui ne peut avoir lieu quelque soit $q - m$, que e ne soit nul ; d'où il faut conclure que la parabole n'a pas de centre. Cette même équation étant celle du diamètre, pour le déterminer, on fera en sorte qu'elle ait lieu quelque soit T, d'où l'on tirera

$$2a \text{ fin. } m \text{ fin. }(q - m) = 0,\ 2ay \text{ fin. }(q - m) + e\cos.(q - m) = 0;$$

puis fin. $m = 0$, qui indique que tout diamètre de la parabole est parallèle à l'axe, & $\frac{\text{fin. } q}{\cos. q} = -\frac{e}{2ay}$. Lorsque $K = 0$, celle-ci donne

fin. $q^2 \left(= \frac{e^2}{4a^2y^2 + e^2}\right) = \frac{e}{e - 4ax}$. Alors la transformée devient

$V^2 = \frac{I}{E}T$, où $\frac{I}{E} = \frac{-e}{a \text{ fin. } q^2} = 4x - \frac{e}{a}$.

Or $-\frac{e}{a}$, ou le paramètre de l'axe, eſt quatre fois la diſtance du ſommet de la courbe au foyer; de même le paramètre du diamètre eſt quatre fois la diſtance de ſon ſommet au foyer.

(36). Je ne regarde plus Mn comme une double ordonnée, mais comme une corde coupée par le diamètre BF. Dans cette ſuppoſition, on a toujours $m=0$, & la transformée devient

$V^2 - \frac{2ay \text{ ſin. } q + e \text{ cos. } q}{a \text{ ſin. } q^2} V + \frac{eT}{a \text{ ſin. } q^2} = 0$, où $\frac{eT}{a \text{ ſin. } q^2}$ eſt le produit des racines NM & Nn. C'eſt pourquoi ſi l'on imagine une autre corde $M'm'$ qui paſſe par le même point N & faſſe avec BF un angle q', on aura

$$NM . Nm : NM' . Nm' :: \text{ſin. } q'^2 : \text{ſin. } q^2.$$

Ayant mené deux tangentes μT, $\mu' t$ (*fig. X*) qui rencontrent l'axe de la parabole aux points T & t, & qui ſe coupent en un point u, ſi l'on nomme les angles μTA, q, $\mu' tA$, q', on aura $\pi\mu = \mu T$ ſin. q, $\pi T = 2 A\pi = \mu T$ cos. q, $\mu'\pi' = \mu' t$ ſin. q', $2 A\pi' = \mu' t$ cos. q'; partant

$$\mu T = -\frac{e}{2a} \frac{\text{cos. } q}{\text{ſin. } q^2}, \quad \mu' t = -\frac{e}{2a} \frac{\text{cos. } q'}{\text{ſin. } q'^2}. \text{ Mais}$$

$$Tt = \frac{\mu T \text{ cos. } q - \mu' t \text{ cos. } q'}{2} = \frac{e}{4a} \left(\frac{\text{cos. } q'^2}{\text{ſin. } q'^2} - \frac{\text{cos. } q^2}{\text{ſin. } q^2} \right) =$$

$$\frac{e}{4a} \frac{\text{ſin. } (q' + q)}{\text{ſin. } q' \text{ ſin. } q} \left(\frac{\text{cos. } q'}{\text{ſin. } q'} - \frac{\text{cos. } q}{\text{ſin. } q} \right);$$

ainſi dans le triangle Tut ſi l'on fait

$$\text{ſin. } (q' + q) : Tt :: \text{ſin. } q' : Tu :: \text{ſin. } q : tu, \text{ on aura}$$

$$Tu = \frac{e}{4a \text{ ſin. } q} \left(\frac{\text{cos. } q'}{\text{ſin. } q'} - \frac{\text{cos. } q}{\text{ſin. } q} \right), \quad tu = \frac{e}{4a \text{ ſin. } q'} \left(\frac{\text{cos. } q'}{\text{ſin. } q'} - \frac{\text{cos. } q}{\text{ſin. } q} \right)$$

& par conſéquent

$$\mu u = \frac{-e}{4a \text{ ſin. } q} \left(\frac{\text{cos. } q}{\text{ſin. } q} + \frac{\text{cos. } q'}{\text{ſin. } q'} \right), \quad \mu' u = \frac{-e}{4a \text{ ſin. } q'} \left(\frac{\text{cos. } q}{\text{ſin. } q} + \frac{\text{cos. } q'}{\text{ſin. } q'} \right);$$

donc $\mu u : \mu' u ::$ ſin. q' : ſin. q, d'où il eſt facile de conclure que ſi ces tangentes ſont parallèles aux cordes Mm, $M'm'$, on aura

$$NM . Nm : NM' . Nm' :: \overline{\mu u}^2 : \overline{\mu' u}^2.$$

(37). Suppoſons que BF (*fig. IX & VIII*) paſſe par le foyer, & faiſons dans la transformée $q = 180°$; elle devient, à cauſe de $E = G = a$ ſin. m^2, $F = 2a$ ſin. m^2, $H = 2ay$ ſin. $m - e$ cos. $m = I$, elle devient, dis-je, $V + T = \frac{2ay \text{ ſin. } m - e \text{ cos. } m}{a \text{ ſin. } m^2}$. Mais H étant le foyer, ſi l'on nomme r' le rayon vecteur BH & r celui qui lui eſt oppoſé; on aura $V + T = r + r'$, $y = r'$ ſin. m &

$$r - r' = \frac{-e\cos. m}{a\sin. m^2} = \frac{e}{2a}\left[\frac{1}{1+\cos. m} - \frac{1}{1-\cos. m}\right].$$

De plus, si l'on veut faire attention que les deux rayons vecteurs ne peuvent différer que par le signe de cos. m, & que la supposition de $m = 0$ doit rendre r' égal au quart du paramètre & r infini, on verra qu'on doit tirer nécessairement de l'équation précédente $r = \frac{-e}{2a} \cdot \frac{1}{1-\cos. m}$, $r' = \frac{-e}{2a} \cdot \frac{1}{1+\cos. m}$.

Enfin les deux branches de la parabole qui s'étendent à l'infini, ont-elles des asymptotes? Non, car il faudroit que la transformée fût telle, que la supposition de T infini rendît V nul & TV une quantité constante; ce qui n'arrive pas ici, puisque de $G = 0$, on tire sin. $m = 0$ & $F = 0$.

(38). Ayant une courbe du second ordre & deux droites AB, MN (*fig. XI*) qui s'y coupent, si l'équation entre AP, X, PM, Y peut être représentée par $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX = 0$, AP, PB feront les deux racines de cette équation résolue par rapport à X, & PM, PN les deux racines de la même équation résolue par rapport à Y. Or, pour trouver AB, il faudra y faire Y nul, ce qui donnera $cX^2 + eX = 0$, dont les deux racines $X = 0$, $X = \frac{-e}{c}$ serviront à déterminer, l'une le point A & l'autre le point B; donc $PB = -\frac{e}{c} - X$ & $AP \cdot BP = \frac{eX + cX^2}{c}$. Mais par la nature des équations $\frac{eX + cX^2}{a}$ est le produit des deux valeurs de Y; donc $MP \cdot NP : AP \cdot BP :: c : a$, proposition que nous avons démontrée plus haut d'une autre manière.

(39). La courbe étant du troisième ordre, (*fig. XII*) si l'on représente son équation par

$$aY^3 + (bX + c)\,Y^2 + (dX^2 + eX + f)\,Y + gX^3 + hX^2 + iX = 0,$$

AP, BP, PD feront les racines de cette équation résolue par rapport à X, MP, OP, PN les racines de la même équation résolue par rapport à Y; & si l'on fait $Y = 0$, d'où $gX^3 + hX^2 + iX = 0$, les trois racines de celle-ci $X = 0$, $X = -\frac{h}{2g} - \sqrt{\frac{h^2}{4g^2} - \frac{i}{g}}$, $X = -\frac{h}{2g} + \sqrt{\frac{h^2}{4g^2} - \frac{i}{g}}$ serviront à déterminer les points A, B, D, & on aura

$$BP = X + \frac{h}{2g} + \sqrt{\frac{h^2}{4g^2} - \frac{i}{g}},\quad DP = X + \frac{h}{2g} - \sqrt{\frac{h^2}{4g^2} - \frac{i}{g}};$$

partant $AP \cdot BP \cdot DP = \frac{gX^3 + hX^2 + iX}{g}$.

Mais par la nature des équations, $\frac{gX^3 + hX^2 + iX}{a}$, pris avec un ſigne contraire, eſt égal au produit des trois racines de l'équation réſolue par rapport à Y, ou à $MP \cdot OP \cdot PN$; donc

$$MP \cdot OP \cdot NP : AP \cdot BP \cdot DP :: g : a.$$

Des courbes d'un ordre quelconque.

(40). Mais ſans nous arrêter plus long-temps à ces cas particuliers, il nous faut conſidérer les courbes de tous les ordres, de l'ordre n, dans l'équation deſquelles ſi nous faiſons les ſubſtitutions tirées des équations 1 & 2, nous en aurons une de la forme de la propoſée que nous pourions repréſenter par

$$V^n + \alpha V^{n-1} + \beta V^{n-2} + \gamma V^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + \varepsilon V + \tau = 0, \text{ où}$$
$$\alpha = a1T + b1, \beta = a2T^2 + b2T + c2, \gamma = a3T^3 + b3T^2 + c3T + d3;$$
$$\ldots\ldots\ldots \tau = anT^n + bnT^{n-1} + cnT^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + tn.$$

Il ne faut pas perdre de vue que dans toute équation telle que la précédente, le co-efficient du ſecond terme avec un ſigne contraire, ou $-\alpha$, eſt égal à la ſomme des racines; le co-efficient du troiſième terme, ou β, eſt égal à la ſomme des produits des racines priſes deux à deux; le co-efficient du quatrième terme avec un ſigne contraire, ou $-\gamma$, eſt égal à la ſomme des produits des racines priſes trois à trois; & ainſi de ſuite juſqu'au dernier terme τ qui eſt le produit de toutes les racines, en changeant ſon ſigne ſi n eſt impair, & en le conſervant ſi n eſt pair.

(41). On appelle *centre* d'une courbe un point par lequel toute droite qui y paſſe eſt coupée de manière que ſes parties compriſes entre ce point & les différentes branches de la courbe d'un côté ſoient égales aux parties compriſes entre ce même point & les différentes branches de l'autre côté, chacune à chacune. Or pour que V, paſſant par ce point, ſatisfît à toutes ces conditions, il faudroit qu'il fût donné par une équation dont tous les termes fuſſent de degré pair; ce qui arrivera toujours, ſoit que n ſoit pair ou impair, en égalant à zéro les co-efficiens des rangs pairs, ou faiſant $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, &c. Dans le premier cas l'équation ſe réduit à

$$V^n + \beta V^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + \rho V^2 + \tau = 0,$$

dont tous les termes ſont de degré pair; lorſque n eſt impair, elle ſe réduit à

$$V^n + \beta V^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + \varepsilon V = 0,$$

qui diviſée par V en donne une dont tous les termes ſont encore de degré pair. Ainſi dans l'un & l'autre cas, l'équation étant réſolue, donnera $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ racines de cette forme $V^2 = +$; de laquelle on tirera de part & d'autre du centre des valeurs égales de V. Ayant les équations $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, &c. il

il faudra qu'elles aient lieu indépendamment des valeurs données à l'angle $q - m$.

(42). On distingue différens genres de *diamètres*. Toute ligne par rapport à laquelle la somme des racines positives, est égale à la somme des racines négatives, est un diamètre du premier genre. Sa nature sera déterminée par l'équation $\alpha = 0$, qui étant du premier degré, indique que ce diamètre est une ligne droite. Toute ligne par rapport à laquelle la somme des produits positifs des racines prises deux à deux, est égale à la somme des produits négatifs, est un diamètre du second genre. Sa nature sera déterminée par l'équation $C = 0$, qui étant du second degré, indique que ce diamètre est une courbe du second ordre. Toute ligne par rapport à laquelle la somme des produits positifs des racines prises trois à trois, est égale à la somme des produits négatifs, est un diamètre du troisième genre. Sa nature sera déterminée par l'équation $\gamma = 0$, qui étant du troisième degré, indique que ce diamètre est une courbe du troisième ordre; & ainsi de suite.

Si on vouloit un *diamètre absolu*, c'est-à-dire, un diamètre qui eût autant d'ordonnées positives que de négatives, égales chacune à chacune, il faudroit faire en sorte de réduire la transformée à n'avoir que des termes de degré pair. Or, si l'on pouvoit découvrir quelque relation entre les sinus & cosinus des angles m & $q - m$, qui étant substitués dans tous les termes, feroient que ceux de degré impair eussent un ou plusieurs facteurs communs, en égalant à zéro chacun de ces facteurs, on rendroit nuls ces termes, & on construiroit autant de diamètres qu'il y auroit de facteurs. Il pourroit arriver que quelqu'une de ces suppositions fît disparoître des termes de degré pair; si elle les faisoit disparoître tous, l'égalité du facteur à zéro ne construiroit pas un diamètre. Lorsque l'équation est de degré pair, le problème des diamètres absolus est résolu par les mêmes équations que celui des centres; toutefois avec cette différence que dans le premier les équations $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, &c. doivent être vérifiées dans toute l'étendue de T, c'est-à-dire, avoir lieu, quelque soit T; au lieu que pour le problême des centres elles doivent avoir lieu, quelque soit l'angle $q - m$.

Des courbes du troisième ordre.

(43). Pour appliquer ces principes aux courbes du troisième ordre dont l'équation générale peut être représentée par

$$a Y^3 + (bX + c) Y^2 + (dX^2 + eX + f) Y + gX^3 + hX^2 + iX + k = 0,$$

nous ferons dans cette équation les substitutions du n°. 20, & il en résultera la transformée

$$EV^3 + (FT + G) V^2 + (HT^2 + IT + K) V + LT^3 + MT^2 + NT + P = 0,$$

dans laquelle on a, en faisant pour abréger $q - m = \mu$,

$$E = a \text{ sin. } \mu^3 - \text{sin. } \mu \text{ cos. } \mu \,(b \text{ sin. } \mu - d \text{ cos. } \mu) - g \text{ cos. } \mu^3,$$

$$L = a \text{ sin. } m^3 + \text{sin. } m \text{ cos. } m \,(b \text{ sin. } m + d \text{ cos. } m) + g \text{ cos. } m^3,$$

$$F = 3a \sin. m \sin. \mu^2 + b \sin. \mu (\cos. m \sin. \mu - 2 \sin. m \cos. \mu) + d \cos. \mu$$
$$(\sin. m \cos. \mu - 2 \cos. m \sin. \mu) + 3g \cos. m \cos. \mu^2,$$

$$H = 3a \sin. m^2 \sin. \mu - b \sin. m (\sin. m \cos. \mu - 2 \cos. m \sin. \mu) + d \cos. m$$
$$(\cos. m \sin. \mu - 2 \sin. m \cos. \mu) - 3g \cos. m^2 \cos. \mu,$$

$$G = + c \sin. \mu^2 - e \sin. \mu \cos. \mu + h \cos. \mu^2 - 3(av \sin. \mu^2 - gx \cos. \mu^2)$$
$$+ b \sin. \mu (x \sin. \mu + 2y \cos. \mu) - d \cos. \mu (y \cos. \mu + 2x \sin. \mu),$$

$$M = c \sin. m^2 + e \sin. m \cos. m + h \cos. m^2 - 3(ay \sin. m^2 - gx \cos. m^2)$$
$$+ b \sin. m (x \sin. m - 2y \cos. m) - d \cos. m (y \cos. m - 2x \sin. m),$$

$$I = 2(c \sin. m \sin. \mu - h \cos. m \cos. \mu) - 6(ay \sin. m \sin. \mu + gx$$
$$\cos. m \cos. \mu) + e(\cos. m \sin. \mu - \sin. m \cos. \mu) + 2b(x \sin. m$$
$$\sin. \mu + y(\sin. m \cos. \mu - \cos. m \sin. \mu)) + 2d(y \cos. m \cos. \mu$$
$$+ x(\cos. m \sin. \mu - \sin. m \cos. \mu)),$$

$$K = 3(ay^2 \sin. \mu - gx^2 \cos. \mu) - b(y^2 \cos. \mu + 2xy \sin. \mu) +$$
$$(f - 2cy) \sin. \mu - (i + 2hx) \cos. \mu + e(x \sin. \mu + y \cos. \mu)$$
$$+ d(x^2 \sin. \mu + 2xy \cos. \mu),$$

$$N = 3(ay^2 \sin. m + gx^2 \cos. m) + b(y^2 \cos. m - 2xy \sin. m) +$$
$$(f - 2ey) \sin. m + (i + 2hx) \cos. m + e(x \sin. m - y \cos. m)$$
$$+ d\ x^2 \sin. m - 2xy \cos. m),$$

$$P = -ay^3 + (bx + c)y^2 - (dx^2 + ex + f)y + gx^3 + hx^2$$
$$+ ix + k.$$

(44). Pour trouver les centres des courbes du troisième ordre, nous formerons les équations

$$FT + G = 0,\ LT^3 + MT^2 + NT + P = 0,$$

dont la première devant avoir lieu quelque soit μ, donne

$$(3a \sin. m + b \cos. m) T + c - 3ay + bx = 0,$$
$$(3g \cos. m + d \sin. m) T + h + 3gx - dy = 0,$$
$$(b \sin. m + d \cos. m) 2T + e - 2by + 2dx = 0,$$

qu'on pourra beaucoup simplifier en faisant x & y nuls. On en tire alors, en éliminant T,

$$c(3g \cos. m + d \sin. m) = h(3a \sin. m + b \cos. m),$$
$$2c(b \sin. m + d \cos. m) = e(3a \sin. m + b \cos. m),$$

& par conséquent

$$\frac{\sin. m}{\cos. m} = \frac{bh - 3cg}{cd - 3ah} = \frac{be - 2cd}{2bc - 3ae}.$$

On aura donc pour première équation de condition

$$9aeg - 6bcg + 2b^2h - 6adh + 2cd^2 - bde = 0;$$

on trouvera l'autre en mettant dans $LT^3 + MT^2 + NT + P = 0$, au lieu de T, sin. m, cos. m, leurs valeurs.

(45). Pour déterminer les diamètres absolus des mêmes courbes, on fera $E = 0$, $HT^2 + IT + K = 0$: & parce que la seconde doit être vérifiée dans toute l'étendue de T, on en tirera $H = 0$, $I = 0$, $K = 0$; quant à la première, elle donnera le rapport de sin. μ à cos. μ par une équation du troisième degré, d'où il suit que ces courbes ne peuvent avoir qu'un ou trois diamètres absolus. Si nous prenons pour exemple celle qui a pour équation

$$Y^3 - X^3 + hX^2 + iX = 0, \text{ nous aurons}$$

$$\text{sin. } \mu^3 + \text{cos. } \mu^3 = 0, \text{ sin. } m^2 \text{ sin. } \mu + \text{cos. } m^2 \text{ cos. } \mu = 0,$$

$$(h - 3x) \text{ cos. } m \text{ cos. } \mu + 3y \text{ sin. } m \text{ sin. } \mu = 0,$$

$$3 (y^2 \text{ sin. } \mu + x^2 \text{ cos. } \mu) - (i + 2hx) \text{ cos. } \mu = 0.$$

On ne trouve qu'une seule valeur réelle de $\frac{\text{sin. } \mu}{\text{cos. } \mu}$ qui est -1, & cette valeur étant substituée dans l'équation suivante, on en tire $\frac{\text{sin. } m}{\text{cos. } m} = \pm 1$; les deux autres donnent ensuite

$$h - 3x \mp 3y = 0, i + 2hx + 3(y^2 - x^2) = 0,$$

& pour équation de condition $h^2 + 3i = 0$.

Des branches infinies des courbes d'un ordre quelconque.

(46). Nous passons à la recherche des branches infinies des courbes, & nous rappellerons en peu de mots ce que nous avons dit de celles du second ordre dont nous représenterons l'équation par $aY^2 + cX^2 + eX + f = 0$.

Pour déterminer les branches infinies qu'elles peuvent avoir dans la direction de T, il faut faire $G = 0$ dans la transformée du n°. 24, d'où $\frac{\text{sin. } m^2}{\text{cos. } m^2} = -\frac{c}{a}$; qui indique deux branches infinies, hors le cas où $\frac{c}{a}$ seroit positif, qui est celui de l'ellipse & du cercle. Si ces branches infinies ont des asymptotes, il est nécessaire que V supposé nul rende T infini & TV une quantité constante. Nommons r cette constante; la transformée où l'on fera V nul, après avoir substitué r à TV, deviendra $Fr + IT - K = 0$, dans laquelle T ne peut être infini à moins que I ne soit nul. On aura donc ces deux équations $I = 0$, $Fr = K$; desquelles on tire, en supposant T une des asymptotes & V l'ordonnée parallèle à l'autre, d'où $q = 2m$,

$$\frac{\text{sin. } m}{\text{cos. } m} = \frac{2cx + e}{2ay}, - 2(a \text{ sin. } m^2 - c \text{ cos. } m^2) r = ay^2 + cx^2 + ex + f.$$

La première, combinée avec celle-ci $\frac{\text{sin. } m^2}{\text{cos. } m^2} = -\frac{c}{a}$, donne $ay^2 + cx^2 +$

$ex + \frac{e^2}{4c} = 0$; ainſi, à cauſe de ſin. $m^2 = \frac{-c}{a-c}$, cos. $m^2 = \frac{a}{a-c}$, d'où a ſin. $m^2 - c$ cos. $m^2 = \frac{-2ac}{a-c}$, on a $\frac{4acr}{a-c} = f - \frac{e^2}{4c}$, ou $r = (a-c)\frac{4cf-e^2}{16ac^2}$. Il eſt clair que lorſque $c = 0$, qui eſt le cas de la parabole, les branches infinies n'ont point d'aſymptotes; ce qui fait diſtinguer deux eſpèces de cours infinis, dont les uns ont des aſymptotes & ſe nomment *cours hyperboliques*, & dont les autres n'ont pas d'aſymptotes & ſe nomment *cours paraboliques*.

(47). De ces cas particuliers nous conclurons généralement, que lorſque quelques valeurs réelles des ſinus & coſinus des angles introduits rendront nul le co-efficient de V^n, il y aura cours infini dans la direction de V; que ce cours infini ſera dans la direction de T, ſi c'eſt le co-efficient de T^n qui diſparoît. Mais pour abréger, nous ne conſidérerons que les cours infinis dans la direction de T, & nous dirons : lorſque les ſubſtitutions rendront nuls en même temps les co-efficiens de T^n, T^{n-1}, T^{n-2}, &c. il y aura autant de cours infinis dans la direction de T, que les ſubſtitutions auront fait diſparoître de ces termes; il ne s'agit plus que de reconnoître de ces cours infinis, ceux qui ſont paraboliques & ceux qui ſont hyperboliques.

(48). Nous donnerons à la transformée du degré n la forme ſuivante :

$$AT^n + (A1V + B)T^{n-1} + (A2V^2 + B1V + C)T^{n-2} + (A3V^3 + B2V^2 + C1V + D)T^{n-3} + \&c. = 0,$$

où nous mettrons r pour VT, ce qui la changera en celle-ci

$$AT^n + BT^{n-1} + (A1r + C)T^{n-2} + (B1r + D)T^{n-3} + (A2r^2 + C1r + E)T^{n-4} + (B2r^2 + D1r + F)T^{n-5} + (A3r^3 + C2r^2 + E1r + G)T^{n-6} + \&c. = 0.$$

Cela poſé, ſi la courbe a n cours infinis dans la direction de T, l'équation $A = 0$, qui eſt du degré n, relativement à $\frac{\text{ſin. } m}{\text{cos. } m}$, aura n racines réelles; & ſi ces cours ſont hyperboliques, comme alors la ſuppoſition de V nul doit rendre T infini, on aura $B = 0$, qui ſervira à conſtruire les aſymptotes; la transformée ſera réduite à $A1r + C = 0$, de laquelle on tirera la valeur de r. Cela ſuppoſe que $A = 0$ ne rende pas $A1 = 0$; car alors le cours, au lieu d'être hyperbolique, ſeroit parabolique. Mais ſi la ſuppoſition de $A = 0$ fait diſparoître tout le ſecond terme, $(A1V + B)T^{n-1}$, les aſymptotes des cours hyperboliques ſeront déterminés par l'équation $C = 0$ & r par $B1r + D = 0$, ou par $A2r^2 + C1r + E = 0$, ſi la même ſuppoſition faiſoit diſparoître en même temps $A1$ & B, $B1$ & D. Si en faiſant diſparoître le ſecond terme, elle rendoit nuls auſſi $A2$ & $B1$, le cours, au lieu d'être hyperbolique, ſeroit parabolique. Mais il y auroit cours hyperbolique, ſi le ſecond & le troiſième terme ſeulement diſparoiſſoient, c'eſt-à-dire, ſi $A = 0$ rendoit nuls $A1$, B, $A2$, $B1$, C; alors l'équation $D = 0$ ſerviroit à conſtruire les aſymptotes, & r ſeroit donné par

C

$Cr + E = 0$; & ainsi de suite. Ces principes deviendront encore plus clairs en les appliquant aux courbes du troisième ordre.

Des branches infinies des courbes du troisième ordre.

(49). Je fais dans la transformée du n°. 43, $TV = r$, & je la change en celle-ci

$$LT^3 + MT^2 + (Hr + N) T + Ir + P + EV^3 + GV^2 + (Fr + K) V = 0.$$

Ainsi pour trouver les branches infinies dans la direction de T, il faudra faire $L = 0$, & cette équation du troisième degré aura au moins une racine réelle. Supposons-les toutes trois réelles & égales, L sera de cette forme $(\alpha \text{ sin. } m + \mathit{6} \text{ cos. } m)^3$, ensorte qu'on aura $a = \alpha^3$, $g = \mathit{6}^3$, $b = 3\,\alpha^2\mathit{6}$, $d = 3\,\alpha\mathit{6}^2$; & comme H devient $3\,(\alpha \text{ sin. } \mu - \mathit{6} \text{ cos. } \mu)\,(\alpha \text{ sin. } m + \mathit{6} \text{ cos. } m)^2$, la supposition de $L = 0$ le rendra nul. Il s'ensuit que si la même supposition ne fait pas disparoître M, la courbe n'aura qu'un cours parabolique. Or, toutes réductions faites, $M = c \text{ sin. } m^2 + h \text{ cos. } m^2 + e \text{ sin. } m \text{ cos. } m$, qui étant égalé à zéro & combiné avec $\alpha \text{ sin. } m + \mathit{6} \text{ cos. } m = 0$ donnera les conditions pour que M disparoisse. Alors la transformée, où l'on fera V nul, sera réduite à $NT + Ir + P = 0$; & parce que $V = 0$ doit rendre T infini, on en tirera $N = 0$, qui servira à construire les asymptotes, & $Ir + P = 0$, qui donnera la valeur de r. Or, $N = (e \text{ sin. } m + 2h \text{ cos. } m)\,x - (2c \text{ sin. } m + e \text{ cos. } m)\,y + f \text{ sin. } m + i \text{ cos. } m$; ainsi $N = 0$ n'étant que du premier degré en x & y, ne peut donner qu'un cours hyperbolique; ou un cours parabolique, si la même supposition faisoit disparoître I.

(50). Supposons toujours les trois racines réelles, mais seulement deux égales, L sera de cette forme $(\alpha \text{ sin. } m + \mathit{6} \text{ cos. } m)^2\,(\gamma \text{ sin. } m + \delta \text{ cos. } m)$; & on aura $a = \alpha^2\gamma$, $g = \mathit{6}^2\delta$, $b = \alpha^2\delta + 2\,\alpha\mathit{6}\gamma$, $d = \mathit{6}^2\gamma + 2\,\alpha\mathit{6}\delta$; & comme H devient $(\alpha \text{ sin. } m + \mathit{6} \text{ cos. } m)\,[(3\,\alpha\gamma \text{ sin. } m + 2\,\alpha\delta \text{ cos. } m + \mathit{6}\gamma \text{ cos. } m) \text{ sin. } \mu - (3\,\mathit{6}\delta \text{ cos. } m + 2\,\mathit{6}\gamma \text{ sin. } m + \alpha\delta \text{ sin. } m) \text{ cos. } \mu]$, la supposition de $\alpha \text{ sin. } m + \mathit{6} \text{ cos. } m = 0$ le rendra nul, d'où il suit que si la même supposition ne fait pas disparoître M, la courbe n'aura qu'un cours parabolique; au lieu que la racine simple $\gamma \text{ sin. } m + \delta \text{ cos. } m = 0$ de l'équation $L = 0$, qui ne peut pas rendre H nul, donnera toujours un cours hyperbolique. Mais si $\alpha \text{ sin. } m + \mathit{6} \text{ cos. } m = 0$, qui rend nécessairement H nul, fait en outre disparoître M, on fera $N = 0$, qui étant du second degré en y & x indiquera deux branches infinies, lesquelles seront hyperboliques, si I ne devient pas nul, autrement elles seront paraboliques. Il pourroit arriver que les deux racines de $N = 0$ fussent imaginaires, auquel cas la courbe n'auroit pas de cours infinis pour $\alpha \text{ sin. } m + \mathit{6} \text{ cos. } m = 0$, si cette supposition faisoit aussi disparoître M.

(51). Si des trois racines de l'équation $L = 0$, deux sont imaginaires & une réelle, comme l'egalité à zéro de cette racine simple réelle ne pourra pas faire disparoître H, il y aura une branche hyperbolique donnée par l'équation $M = 0$

qui n'eſt que du premier degré en y & x. Enfin ſi les trois racines ſont réelles & inégales, il y aura pour chacune un cours infini hyperbolique.

(52). Reprenons la première transformée (n°. 43). Si l'on y fait E ou L nul, comme ces équations du troiſième degré ont au moins une racine réelle, il y a au moins une hypothèſe propre à faire diſparoître le terme affecté de Y^3 ou le terme affecté de X^3 dans la propoſée; on pourra donc repréſenter par

$$(bX+c)Y^2+(dX^2+eX+f)Y+gX^3+hX^2+iX+k=0$$

toutes les équations des courbes du troiſième ordre. Je la réſous; & déſignant par PN, PM (*fig. XIII*) les deux valeurs de Y, & par ρ la partie irrationnelle de ces valeurs, j'ai

$$PN=-\frac{dX^2+eX+f}{2(bX+c)}+\rho,\ PM=-\frac{dX^2+eX+f}{2(bX+c)}-\rho;$$

donc 2ρ eſt la valeur de la droite MN compriſe entre les deux branches de la courbe. Imaginons une autre courbe qui coupe toutes les MN en deux parties égales, elle aura pour ordonnée

$$Pn=PM+\rho=-\frac{dX^2+eX+f}{2(bX+c)}.$$

Cette courbe eſt donc par la nature du problème une hyperbole ou une parabole. Dans le premier cas nous prendrons pour ligne des abſciſſes l'aſymptote de l'hyperbole: & nommant t l'abſciſſe Ap, $\frac{a}{2t}$, ou a eſt conſtant, l'ordonnée correſpondante pn, parallèle à l'autre aſymptote, & dans la direction de PN dont la poſition dépend de nous; nous aurons pour les ordonnées aux deux branches de la courbe du troiſième ordre $pN=\frac{a}{2t}+\rho$, $pM=\rho-\frac{a}{2t}$, dont l'une étant priſe poſitivement l'autre doit l'être négativement. Donc nommant t & u les nouvelles co-ordonnées de la courbe du troiſième ordre, nous aurons pour ſon équation $(u-\frac{a}{2t}-\rho)(u-\frac{a}{2t}+\rho)$ ou $u^2-\frac{au}{t}+\frac{a^2}{4t^2}-\rho^2=0$, dans laquelle

$$\rho^2=\left[\frac{dX^2+eX+f}{2(bX+c)}\right]^2-\frac{gX^3+hX^2+iX+k}{bX+c}.$$

Mais Pn ne diffère de pn que de l'ordonnée Pp de l'aſymptote; & l'aſymptote étant une ligne droite, ſon ordonnée ne peut être que de la forme $\beta X+\gamma$, ou β & γ ſont conſtans. On peut auſſi ſuppoſer que $bX+c$ eſt à t dans un rapport conſtant; donc la courbe du troiſième ordre prendra la forme

$$tu^2-au=g't^3+h't^2+i't+k'.$$

(53). Lorſque b eſt nul, la courbe qui coupe les MN en deux parties égales eſt une parabole. On pourra faire diſparoître dans la propoſée le terme gX^3, & l'ayant miſe en faire ſous cette forme

$$(dY+h)X^2+(eY+i)X+cY^2+fY+k=0,$$

ſi l'on prend Y pour l'abſciſſe & X pour l'ordonnée, elle ne ſera plus qu'un

cas particulier de celle que nous venons de discuter, & que par les mêmes transformations nous ramènerons à la forme suivante

$$tu^2 - \alpha u = g' t^2 + h' t + i'.$$

L'équation sera encore plus simple, si b & c sont nuls en même temps.

(54). Mais b, c, d étant nuls en même temps, si la proposée se trouve réduite à $(eX + f)Y + gX^3 + hX^2 + iX + k = 0$, il suffira de faire $Y = u$, $X + \frac{f}{e} = t$, pour la ramener à la forme $tu = g't^3 + k't^2 + i't + k'$.

(55). En se rappellant la valeur de Pn, on verra que si b & d ou e & f sont nuls en même temps, la ligne qui coupe les MN en deux parties égales est une ligne droite. Or prenant cette droite elle-même pour ligne des abscisses, les ordonnées correspondantes seront ρ & $-\rho$, & on aura pour équation $u^2 = \rho^2$; ai si il suffira de faire $X = t$, pour que dans le premier cas, où $\rho^2 = \frac{(eX+f)^2}{4c^2} - \frac{1}{c}(gX^3 + hX^2 + iX + k)$, l'équation du troisième degré prenne la forme $u^2 = g't^3 + h't^2 + i't + k'$, & pour que dans le second cas, où $\rho^2 = \frac{(dX+e)^2}{4b^2} - \frac{1}{b}\left(gX^2 + hX + i + \frac{k}{X}\right)$, elle prenne la forme $tu^2 = g't^3 + h't^2 + i't + k'$.

(56). Enfin lorsque b, c, d, e seront nuls en même temps, l'équation du troisième degré prendra naturellement la forme $u = g't^3 + h't^2 + i't + k'$. Il suit des détails dans lesquels nous venons d'entrer, que les équations des courbes du troisième ordre peuvent se réduire aux quatre formes suivantes

$$tu^2 - \alpha u = \psi,\ tu = \psi,\ u^2 = \psi,\ u = \psi,$$

où $\psi = g't^3 + h't^2 + i't + k'$,

car $tu^2 = \psi$ est renfermée dans la première.

Des surfaces courbes.

(57). Soit une courbe EZH (*fig. XIV*) rapportée à son axe AC au moyen des ordonnées perpendiculaires ZQ, HC; toute la figure $AEHC$ en faisant une révolution entière sur l'axe AC, engendrera un solide qu'on nomme *solide de révolution*. Or voici le problême qu'on se propose de résoudre : étant donné l'équation de la courbe EZH, trouver celle de la surface du solide décrite par cette courbe dans sa révolution sur l'axe AC? Sur un plan donné de position, que je suppose coïncider avec le plan du cercle $HBID$, je tire une droite BD aussi donnée de position; puis d'un point Z quelconque de la surface courbe j'abaisse une perpendiculaire ZM sur le plan donné de position, & du point M une perpendiculaire MP sur la droite BD. Je nomme CP, X, PM, Y, MZ, Z, le rayon CH ou CB, r; & la nature de la surface courbe sera déterminée par une équation entre les trois co-ordonnées X, Y, Z.

Si EZH eſt une ligne droite, le ſolide ſera un cône droit ; & nommant H la hauteur de ce cône, on aura $HM : Z :: r : H$. Mais

$$HM = CH - CM = r - \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ ; donc}$$

$r(H - Z) = H\sqrt{X^2 + Y^2}$ eſt l'équation de la ſurface du cône droit.

Si EZH eſt une courbe du ſecond ordre dont on peut repréſenter l'équation par $a\overline{ZQ}^2 + c\overline{CQ}^2 + eCQ + f = 0$, l'équation de la ſurface ſera

$$a(X^2 + Y^2) + cZ^2 + eZ + f = 0.$$

On trouvera de la même manière les équations des ſurfaces de ſolides de révolution des ordres ſupérieurs.

(58). Nous avons ſuppoſé que la ſurface étoit celle d'un ſolide de révolution. Dans toute autre ſuppoſition, ſoit (*fig. XV*) Z un point quelconque de la ſurface courbe ; de ce point j'abaiſſe une perpendiculaire ZM ſur un plan fixe que je ſuppoſe être celui de la planche & dans lequel j'imagine un axe AC donné de poſition ; je tire enſuite MP perpendiculaire à cet axe. La nature de la ſurface courbe ſera définie par la relation entre les trois co-ordonnées AP, x, PM, y, MZ, z. Cela poſé, ſi une ſurface quelconque eſt coupée par un plan, il en réſultera une ſection qui aura une certaine courbure ; on demande cette courbure pour une ſection quelconque ?

(59). Je ſuppoſe qu'elle paſſe par le point Z & que BE ſoit la commune ſection du plan ſécant & du plan MAC. Du point M, j'abaiſſe MN perpendiculairement ſur BE, & je tire ZN qui ſera auſſi perpendiculaire ſur BE ; je fais $AB = h$, l'angle $CBE = m$ & l'angle MNZ, qui eſt l'inclinaiſon du plan ZBE ſur le plan MAC, $= n$.

Les triangles rectangles BPO, MNO donnent $1 : \text{tang.}\, m :: x - h : PO$; donc $MO = y - (x - h)\,\text{tang.}\, m$; $\cos.\, m : 1 :: x - h : BO$, $1 : \cos.\, m :: MO : MN$, $1 : \text{ſin.}\, m :: MO : ON$; donc $BN = BO + ON = y\,\text{ſin.}\, m + (x - h)\cos.\, m$. De plus le triangle rectangle ZNM donne

$$\cos.\, n : 1 :: MN : ZN = \frac{y\cos.\, m - (x - h)\,\text{ſin.}\, m}{\cos.\, n},$$

$$1 : \text{tang.}\, n :: MN : MZ = (y\cos.\, m - (x - h)\,\text{ſin.}\, m)\,\text{tang.}\, n.$$

Donc ſi nous nommons t & u les co-ordonnées BN & NZ de la ſection, nous aurons

$t = y\,\text{ſin.}\, m + (x - h)\cos.\, m$, $u\cos.\, n = y\cos.\, m - (x - h)\,\text{ſin.}\, m$.

Si je multiplie la première par $\cos.\, m$, la ſeconde par $\text{ſin.}\, m$, & que j'ôte enſuite la ſeconde de la première, j'aurai $t\cos.\, m - u\,\text{ſin.}\, m\cos.\, n = x - h$; donc $x = h + t\cos.\, m - u\,\text{ſin.}\, m\cos.\, n$, $y = t\,\text{ſin.}\, m + u\cos.\, m\cos.\, n$, on aura en outre $z = u\,\text{ſin.}\, n$.

On mettra ces valeurs de x, y, z dans l'équation de la ſurface courbe, & on aura celle qui déterminera la courbure de la ſection.

(60).

(60). Nous prendrons pour exemple la ſurface du cône droit qui a pour équation $r(H-Z)=H\sqrt{X^2+Y^2}$. Nous ferons $Z=z$, $Y=y$, & $X=x-i$; puis ſubſtituant pour z, y, x leurs valeurs, nous aurons $X^2+Y^2=(h-i)^2+2(h-i)(t \cos. m - u \sin. m \cos. n)+t^2+u^2 \cos. n^2$, $(H-Z)^2=H^2-2Hu \sin. n+u^2 \sin. n^2$; partant on aura l'équation $H^2 t^2+(H^2 \cos. n^2-r^2 \sin. n^2)u^2+2H^2(h-i)t \cos. m+(2Hr^2 \sin. n-2H^2(h-i)\sin. m \cos. n)u+H^2((h-i)^2-r^2)=0$. La poſition de l'axe AC & l'origine des abſciſſes étant tout-à-fait arbitraires, nous ferons $(h-i)^2=r^2$, ou $h-i=\pm r$, $m=90°$, ou $\cos. m=0$, & l'équation précédente deviendra

$$H^2 t^2-(r^2 \sin. n^2-H^2 \cos. n^2)u^2+(r \sin. n \mp H \cos. n)2Hru=0,$$

qui eſt l'équation générale des ſections coniques. A cauſe de $r^2 \sin. n^2 - H^2 \cos. n^2=(r \sin. n+H \cos. n)(r \sin. n - H \cos. n)$, ſi l'on fait $r \sin. n - H \cos. n=0$, qui indique que ZN eſt parallèle au côté du cône qui lui eſt oppoſé, la ſection ſera une parabole qui aura pour équation $t^2+4r \cos. n \cdot u=0$. Pour les deux autres cas, nous reprendrons l'équation générale à laquelle nous donnerons la forme ſuivante :

$$t^2=\frac{r^2 \sin. n^2-H^2 \cos. n^2}{H^2}\left[u^2-\frac{H^3}{r \sin. n \pm H \cos. n}2ru\right],$$

& il ſera facile de voir qu'elle appartient à l'ellipſe, lorſque $r \sin. n$ eſt moindre que $H \cos. n$, ou lorſque $\tang. n<\frac{H}{r}$, auquel cas la directrice tombe toute entière au-dehors du cercle qui eſt la baſe du cône : elle appartient à l'hyperbole lorſque $r \sin. n$ eſt plus grand que $H \cos. n$; alors cette même baſe du cône eſt traverſée par la directrice.

(61). Nous prendrons pour ſecond exemple le ſphéroïde elliptique de révolution. L'équation de l'ellipſe génératrice pouvant être repréſentée par $\overline{ZQ}^2+c\overline{CQ}^2=b^2$, celle de l'ellipſoïde ſera $X^2+Y^2+cZ^2=b^2$. On fera $Z=z$, $Y=y$, $X=x-i$, & on aura l'équation $(h-i)^2-b^2+2(h-i)\cos. m.t-2(h-i)\sin. m \cos. n.u+t^2+(c \sin. n^2+\cos. n^2)u^2=0$, dans laquelle on peut ſuppoſer $h-i=b$, $\cos. m=0$, ce qui la réduit à

$$t^2=(c \sin. n^2+\cos. n^2)\left[\frac{2b \cos. n}{c \sin. n^2+\cos. n^2}u-u^2\right],$$

qui eſt l'équation d'une ellipſe, à moins que la ſection ne ſoit parallèle au plan du cercle $HBID$, qu'on nomme *équateur* du ſphéroïde lorſqu'il le diviſe en deux parties égales, car alors on a $\sin. n=0$, $\cos. n=1$ & $t^2=2bu-u^2$, équation au cercle.

Un cas qui paroît échapper, c'eſt celui où la ſection ſeroit perpendiculaire au

plan de l'équateur & où l'on auroit fin. $n = 1$, cos. $n = 0$. Mais alors y cos. $m - (x - h)$ fin. $m = 0$, $t = y$ fin. $m + (x - h)$ cos. m, $z = u$, d'où l'on tire $x = h + t$ cos. m, $y = t$ fin. m, $z = u$, & faifant les fubftitutions convenables dans l'équation de l'ellipfoïde,

$$(h - i)^2 - b^2 + 2\,(h - i)\,\text{cos.}\,m.\,t + t^2 + cu^2 = 0,$$

dans laquelle on ne peut faire en même temps $(h - i)^2 = b^2$ & cos. $m = 0$.

Si l'on y fait $h - i = - b$, on aura $u^2 = \frac{1}{c}\,(2\,b\,\text{cos.}\,m \cdot t - t^2)$;

dans la fuppofition de cos. $m = 0$, on aura $t^2 + cu^2 = b^2 - (h - i)^2$, qui devient $t^2 + cu^2 = b^2$, lorfque $h = i$, & donne une ellipfe femblable à l'ellipfe génératrice. Nous développerons davantage la théorie des furfaces courbes dans les applications du calcul différentiel.

Des lieux géométriques.

(62). Sur une droite AB (*fig. XVI*) je prends $AP = X$ & je tire $PM = Y$, qui faffe avec AP un angle quelconque; à cette droite MP ou MM', je mène une infinité de parallèles telles que NN'; & fi les points M, M', N, N', &c. appartiennent à une courbe dont la nature foit donnée par une équation entre Y & X, cette courbe fera ce qu'on appelle le *lieu* de l'équation indéterminée. Tout fe réduit à ce problême : une équation entre les deux variables Y & X étant donnée, déterminer la courbe qui conftruit cette équation. Nous prendrons pour exemple l'équation du fecond degré $aY^2 + bXY + cX^2 + dY + eX + f = 0$. On mettra dans cette équation pour Y, X leurs valeurs tirées des équations 1 & 2 du n°. 20; & fi le fecond terme de la transformée eft $\frac{FT - H}{E}\,V$, on fera $F = 0$, $H = 0$, pour que les ordonnées foient à un diamètre, & enfuite $q = 90°$, pour que ce diamètre foit un axe. On aura de cette manière l'équation de la courbe la plus fimple & la plus facile à conftruire.

(63). Il fera plus court de fuppofer d'abord $q = 90°$ dans les équations 1 & 2 qui deviennent par-là

$$(X - x)\,\text{fin.}\,n = T\,\text{fin.}\,(m + n) + V\,\text{cos.}\,(m + n),$$
$$(Y + y)\,\text{fin.}\,n = T\,\text{fin.}\,m + V\,\text{cos.}\,m;$$

& au lieu de faire de nouvelles fubftitutions, on pourra fe fervir de la transformée du n°. 23, en y mettant $\frac{\text{fin.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n}$, $\frac{\text{cos.}\,(m+n)}{\text{fin.}\,n}$, $\frac{\text{fin.}\,m}{\text{fin.}\,n}$, $\frac{\text{cos.}\,m}{\text{fin.}\,n}$, au lieu de cos. m, $-$ cos. $(q - m)$, fin. m, fin. $(q - m)$. Ainfi, faifant pour abréger $m + n = \mu$, on tirera des équations $H = 0$, $F = 0$, ces deux-ci

$$(2\,ay - bx - d)\,\text{cos.}\,m + (by - 2\,cx - e)\,\text{cos.}\,\mu = 0,$$

$$2\,a\,\text{fin.}\,m\,\text{cos.}\,m + b\,(\text{cos.}\,m\,\text{fin.}\,\mu + \text{fin.}\,m\,\text{cos.}\,\mu) + 2\,c\,\text{fin.}\,\mu\,\text{cos.}\,\mu = 0.$$

Soit cos. $m = \zeta$ cos. μ, fin. $m = \gamma$ fin. μ, γ & ζ feront donnés par les deux

équations $\beta = -\frac{by-2cx-e}{2ay-bx-d}$, $2a\beta\gamma + b(\beta+\gamma) + 2c = 0$. On aura ensuite $\beta^2 \cos.\mu^2 + \gamma^2 \sin.\mu^2 = 1$, d'où il sera facile de tirer

$\cos.\mu = \pm\sqrt{\frac{1-\gamma^2}{\beta^2-\gamma^2}}$, $\sin.\mu = \pm\sqrt{\frac{\beta^2-1}{\beta^2-\gamma^2}}$; partant on connoîtra les angles m & n. On fera $K = 0$ pour que B soit un des points de la courbe; puis sur la droite BF comme axe (*fig. XVII*), on décrira la section conique $EV^2 + GT^2 - IT = 0$, dont les co-ordonnées BN, T, NM, V sont perpendiculaires entr'elles; & ayant tiré AE qui fasse avec BF un angle m, & MP qui fasse avec AE un angle n, il sera clair que $AP = X$, $PM = Y$, & que par conséquent la courbe que nous venons de décrire est le lieu de l'équation proposée.

De la construction des équations déterminées.

(64). Soit l'équation déterminée du quatrième degré

$$x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = 0.$$

Je fais disparoître les deux premiers termes en supposant

$$(1) \ldots\ldots x^2 + bx = ay, \text{ \& il me vient}$$

$$(2) \ldots\ldots y^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{c}{a}x^2 - dx - af = 0;$$

dont le lieu est une parabole, une ellipse ou une hyperbole selon que b^2 est égal, moindre ou plus grand que ac. On tire delà qu'avec une parabole & une autre section conique, on peut toujours construire la proposée. On mettra dans l'équation 2 pour x^2 sa valeur $ay - bx$, 1°. dans le terme $-\frac{b^2}{a^2}x^2$, 2°. dans le terme $\frac{c}{a}x^2$, 3°. dans les deux termes $-\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{c}{a}x^2$, & on aura les trois équations

$$(3) \ldots\ldots y^2 - \frac{b^2}{a}y + \frac{c}{a}x^2 + \left(\frac{b^3}{a^2} - d\right)x - af = 0,$$

$$(4) \ldots\ldots y^2 + cy - \frac{b^2}{a^2}x^2 - \left(\frac{bc}{a} + d\right)x - af = 0,$$

$$(5) \ldots\ldots y^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}y\right) - \left(d + \frac{bc}{a} - \frac{b^3}{a^2}\right)x - af = 0;$$

dont la première appartient à une ellipse, qui devient cercle lorsque c étant $= a$, l'angle des co-ordonnées x, y est droit; dont la seconde appartient à une hyperbole, qui devient équilatère lorsque $b = a$, & dont la troisième appartient à une parabole. On trouvera deux autres équations que voici, en retranchant l'équation 1 de l'équation 5 & en la lui ajoutant ensuite:

$$(6) \ldots\ldots y^2 - x^2 + \left(c + a - \frac{b^2}{a}\right)y + \left(d - b - \frac{bc}{a} + \frac{b^3}{a^2}\right)x - af = 0;$$

$$(7) \ldots\ldots y^2 + x^2 + \left(b - d - \frac{bc}{a} + \frac{b^3}{a^2}\right)x + \left(c - a - \frac{b^2}{a}\right)y - af = 0,$$

dont la première eſt une hyperbole équilatère & la ſeconde un cercle, lorſque l'angle des co-ordonnées x & y eſt droit.

(65). Pour réſoudre l'équation déterminée du quatrième degré au moyen de ce cercle & de la parabole qui a pour équation $x^2 + bx = ay$; ſur une droite AG (*fig. XVIII*), on prendra de part & d'autre du point A, $AP = x$, $AD = \frac{1}{2}b$, & ſur une perpendiculaire à AP, $PM = y$. Par le point D, on mènera parallélement à PM une droite CDR, ſur laquelle on prendra $DC = \frac{b^2}{4a}$; puis ſur cette droite comme axe, on décrira une parabole qui ait pour paramètre a & ſon ſommet en C. Si elle paſſe par le point M; à cauſe de $CR = \frac{b^2}{4a} + y$ & de $RM = \frac{1}{2}b + x$, on aura $(\frac{1}{2}b + x)^2 = a(\frac{b^2}{4a} + y)$, ou $bx + x^2 = ay$ qui eſt l'équation 1.

Cela fait, on mènera par le point A une parallèle à PM, ſur laquelle on prendra $AB = \frac{a - c}{2} + \frac{b^2}{2a}$, ſi elle eſt dans la direction de PM, ou $AB = \frac{c - a}{2} - \frac{b^2}{2a}$, ſi elle eſt dans une direction oppoſée; puis on tirera, parallélement à AP & dans un ſens oppoſé, BK ſur laquelle on prendra $BE = \frac{1}{2}d - \frac{b}{2a}(a - c) - \frac{b^3}{2a^2}$, dans le premier cas, ou $= \frac{1}{2}d + \frac{b}{2a}(a - c) + \frac{b^3}{2a^2}$ dans l'autre cas; on tirera en outre $EA = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{BE}^2}$ qu'on fera $= m$ pour abréger. Alors ſi l'on fait attention que BE & AP doivent avoir des ſignes différens, on verra aiſément que $EM = \sqrt{(BE + AP)^2 + (PM - AB)^2}$, après y avoir ſubſtitué pour $x^2 + y^2$ ſa valeur tirée de l'équation 7, devient $EM = \sqrt{m^2 + af}$. De ce rayon & du centre E, on décrira un cercle; & s'il rencontre la parabole dans les points M, M', M'', M''', & que de ces points on abaiſſe les perpendiculaires MP, $M'P'$, $M''P''$, $M'''P'''$ ſur DA prolongée de part & d'autre du point D, les lignes AP, AP', AP'', AP''' feront les racines de l'équation déterminée du quatrième degré. En effet, ſi on tire EM, EM', &c. on aura $\overline{EM}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mM}^2$, $\overline{EM'}^2 = \overline{Em'}^2 + \overline{M'm'}^2$, &c. leſquelles, à cauſe de $EM = EM' =$, &c. ne ſont autres que

$$y^2 + x^2 + (c - a - \frac{b^2}{a})y + (b - d - \frac{bc}{a} + \frac{b^3}{a^2})x - af = 0,$$

qui étant combinée avec $x^2 + bx = ay$, donne l'équation du quatrième degré

$$x^4 + 2bx^3 + acx^2 - a^2dx - a^3f = 0.$$

(66). La même méthode ſervira à conſtruire les équations du troiſième degré, que pour cet effet on elèvera au quatrième degré en les multipliant par des facteurs

facteurs convenables. Soit proposé de construire l'équation du troisième degré

$$x^3 - hx^2 + apx + a^2 q = 0;$$

on la multipliera par $x + h$ pour avoir celle du quatrième degré

$$x^4 + (ap - h^2)x^2 + a(aq + hp)x + a^2 hq = 0,$$

où le second terme manque. En la comparant à l'équation générale du quatrième degré, on trouve $b = 0$, partant $AD = 0$, $DC = 0$, d'où il faut conclure que les points A & D se confondent avec le sommet C de la parabole & que le point B tombe sur le point K. On a AB ou $CK = \frac{a - c}{2}$, BE ou $KE = \frac{1}{2} d$, $m = \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + d^2}$ & $EM = \sqrt{m^2 + af}$. Mais en continuant la comparaison des deux équations du quatrième degré, on trouve

$$CK = \frac{a}{2} - \frac{p}{2} + \frac{h^2}{2a},\ KE = \frac{q}{2} + \frac{hp}{2a},\ m = \sqrt{\overline{CK}^2 + \overline{KE}^2},\ EM = \sqrt{m^2 - hq};$$

d'où l'on tire la construction suivante.

On mènera par le point C (*fig. XIX*) une perpendiculaire à l'axe, sur laquelle ayant pris $CF = h$, on tirera du point F une parallèle à ce même axe qui rencontrera la parabole en un point A. Sur le milieu de la corde CA, on élèvera une perpendiculaire indéfinie qui rencontrera l'axe en un point G. On prendra de G vers C, $GK = \frac{1}{2} p$, & sur une perpendiculaire à l'axe menée par le point K & qui rencontre OG en un point H, on prendra $HE = \frac{1}{2} q$; puis du centre E & du rayon EA, on décrira une circonférence de cercle. Cette circonférence coupera la parabole en des points M, & si de ces points on abaisse des perpendiculaires telles que MQ sur l'axe, elles seront les racines de l'équation du troisième degré; quant à $AD = h$, elle appartient à l'équation du quatrième degré résultante de la multiplication de celle du troisième par un facteur $x + h$. Tout se réduit à démontrer que $EA = \sqrt{m^2 - hq}$. Or a étant le paramètre de la parabole, on a $CD = \frac{h^2}{a}$, &, à cause de $CO = \frac{1}{2} CA$, $CL = \frac{h^2}{2a}$ & la perpendiculaire LO à l'axe égale à $\frac{h}{2}$. Donc, à cause de $\overline{OL}^2 = CL \cdot LG$, $LG = \frac{1}{2} a$ & $CK = \frac{h^2}{2a} + \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} p$. Enfin les triangles semblables GLO, GKH donnent $KH = \frac{hp}{2a}$ & $KE = \frac{hp}{2a} + \frac{1}{2} q$; partant

$$EA = \sqrt{\left(h - \tfrac{1}{2}q - \frac{hp}{2a}\right)^2 + \left(\frac{h^2}{2a} - \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}p\right)^2} = \sqrt{m^2 - hq}.$$

(67). Le problème de la trisection de l'angle conduit à une équation du troisième degré. Car si l'on nomme s le sinus ou le cosinus de l'arc qu'il s'agit de diviser, r le rayon & x le sinus ou cosinus du tiers de cet arc, on tirera des formules du n°. 8, $4x^3 - 3r^2 x = \mp r^2 s$, qui comparée à l'équation pré-

cédente donne $h = 0$, $ap = -\frac{3r^2}{4}$, $a^2 q = \pm \frac{r^2 s}{4}$. A cause de $h = 0$, $EM = m = CE$; ainsi le cercle passe par le sommet de la parabole. Si des trois autres points, où la parabole est coupée par le cercle, on abaisse des perpendiculaires sur l'axe CD, elles seront les racines de l'équation du troisième degré.

Cette équation est dans le cas irréductible, car, à cause de $r > s$, $\frac{1}{27}\left(\frac{3r^2}{4}\right)^3 > \frac{1}{4}\frac{r^4 s^2}{16}$. Il suit de là que le cas irréductible des équations du troisième degré se résoud par le cercle; & nommant A l'arc qui a pour sinus ou pour cosinus s, le rayon étant r, à cause de A, $A + 2\pi$, $A + 4\pi$, π étant la demi-circonférence, qui ont tous les mêmes sinus & cosinus, on trouvera pour les trois racines de l'équation du troisième degré $4x^3 - 3r^2 x = \mp r^2 s$,

lorsque $r^2 s$ a le signe $-$, sin. $\frac{A}{3}$, sin. $\frac{A + 2\pi}{3}$, sin. $\frac{A + 4\pi}{3}$,

lorsqu'il a le signe $+$, cos. $\frac{A}{3}$, cos. $\frac{A + 2\pi}{3}$, cos. $\frac{A + 4\pi}{3}$,

lesquelles racines se présentent de cette manière sous une forme réelle.

(68). Le problême de la duplication du cube, ou des deux moyennes proportionnelles, conduit aussi à une équation du troisième degré. Car, nommant a, b deux nombres donnés, & x, y les moyennes proportionnelles entre ces nombres, on a $\div\!\!\div\, a : x : y : b$; d'où $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, & éliminant y, $x^3 = a^2 b$. En comparant cette équation avec l'équation générale du troisième degré, on a $h = 0$, $p = 0$ & $q = -b$; partant le cercle passe par le sommet de la parabole & a pour rayon $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Dès le temps de Platon, ce problême & celui de la trisection de l'angle avoient une grande célébrité; les géomètres de cette école étoient bien convaincus qu'on ne pouvoit pas les résoudre en n'employant que la ligne droite & le cercle.

(69). L'équation du sixième degré

$$x^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 - fx + g = 0,$$

étant proposée, on demande de la construire par le moyen d'une courbe du troisième ordre & d'une section conique. Soit $x^3 - mx^2 - nx + q = -pxy$, l'équation de la courbe du troisième ordre. En élevant les deux membres au quarré, je trouve

$x^6 - 2mx^5 + (m^2 - 2n)\,x^4 + 2\,(mn + q)\,x^3 + (n^2 - 2mq)\,x^2 - 2nqx + q^2 = p^2 x^2 y^2$, qui étant comparée à la proposée, donne

$$m = \frac{b}{2},\ q = \sqrt{g},\ n = \frac{f}{2\sqrt{g}},\ \text{\& par conséquent}$$

$$x^6 - 2mx^5 - 2nqx + q^2 = x^6 - bx^5 - fx + g =$$
$$p^2 x^2 y^2 - (m^2 - 2n)\,x^4 - 2\,(mn + q)\,x^3 - (n^2 - 2mq)\,x^2.$$

En substituant cette valeur dans la proposée & divisant par x^2, elle devient

$p^2y^2 + (c + 2n - m^2)x^2 + (d - 2mn - 2q)x + e + 2mq - n^2 = 0$,
qui sera un cercle si $c + 2n - m^2$, ou $c + \frac{f}{\sqrt{g}} - \frac{b^2}{4}$, est positif & égal à p^2.

Lorsque l'équation du sixième degré n'a pas de second terme, on peut la construire au moyen de la première parabole cubique & d'une section conique. En effet, si l'on prend pour l'équation de la parabole cubique $x^3 = a^2 y$, & que l'on mette dans la proposée, où le second terme est supposé manquer, pour x^6, x^4, x^3 leurs valeurs a^4y^2, a^2xy, a^2y, on la changera en celle-ci,

$$y^2 + \frac{cx + d}{a^2}y + \frac{ex^2 - fx + g}{a^4} = 0.$$

(70). Soit l'équation $x^{2n} + ax^{2n-1} + bx^{2n-2} + cx^{2n-3} + \&c. = 0$; que l'on propose de construire en y employant la parabole $x^n = \mathcal{C}y^m$, où n & m sont des nombres entiers positifs & $n > m$. On mettra dans la proposée pour x^{2n}, x^{2n-1}, x^{2n-2}, x^{2n-3}, &c. leurs valeurs $\mathcal{C}^2 y^{2m}$, $\mathcal{C}y^m x^{n-1}$, $\mathcal{C}y^m x^{n-2}$, $\mathcal{C}y^m x^{n-3}$, &c. & on aura $\mathcal{C}^2 y^{2m} + \mathcal{C}y^m (ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} +$, &c.$) + a'x^{n-1} + b'x^{n-2} + c'x^{n-3} + \&c. = 0$,
qui est d'un degré inférieur à celui de la proposée. Mais il seroit inutile d'entrer dans un plus long détail sur ce genre de solution des équations déterminées, & nous terminerons ce chapitre par discuter la courbe qui a pour équation
$x^n = \mathcal{C}y^n$.

(71). Pour mener une tangente à cette parabole, on prendra (n°. 19) sur la ligne des x une autre abscisse X, & si à cette abscisse répond l'ordonnée Y, on aura $X^n = \mathcal{C}Y^m$. Or

$$X^n - x^n = (X^{n-1} + X^{n-2}x + X^{n-3}x^2 + \&c.)(X - x),$$
$$Y^m - y^m = (Y^{m-1} + Y^{m-2}y + Y^{m-3}y^2 + \&c.)(Y - y);$$

donc $\frac{X - x}{Y - y} = \frac{\mathcal{C}(Y^{m-1} + Y^{m-2}y + Y^{m-3}y^2 + \&c.)}{X^{n-1} + X^{n-2}x + X^{n-3}x^2 + \&c.}$,

expression qui, lorsqu'on fait $X = x$, $Y = y$, se change en celle-ci $\frac{m\mathcal{C}y^{m-1}}{nx^{n-1}}$.

On la multipliera par y pour avoir la sous-tangente $\frac{mx \cdot \mathcal{C}y^m}{nx^n} = \frac{mx}{n}$.

Donc (*fig. XX*) puisque m est moindre que n, la sous-tangente PT est toujours moindre que AP, x; & puisque $x = 0$ rend PM ou $y = 0$, la parabole, de tel degré qu'elle puisse être, passera toujours par le point A, s'éloignera de plus en plus à l'infini de la droite BC vers laquelle elle tournera sa convexité. Mais nous n'avons examiné qu'une des branches de la courbe qui tombe dans l'angle BAD. Pour la discuter dans toute son étendue, nous distinguerons les trois cas suivans. 1°. Si n est pair & m impair, la racine n de x^n est $\pm x$, & la racine m de y^m est $+y$; donc puisque x peut être positif ou négatif lorsque y est positif, une des branches de la courbe doit se continuer dans l'angle BAC, en sorte que si parallèlement à BC on tire MM', on aura $KM = KM'$. 2°. Si

n & m sont impairs, x & y pourront avoir l'un & l'autre le signe $+$; ou l'un & l'autre le signe $-$; d'où il suit que la parabole doit avoir dans ce cas une branche dans l'angle EAC, toute semblable à l'autre branche, mais dans une position renversée. 3°. Lorsque n est impair & m pair, la racine n de x^n est $+x$, & la racine m de y^m, $\pm y$; ainsi la parabole doit se continuer dans l'angle BAE, en sorte que si l'on mène une parallèle MPM' à DE, on ait $PM = PM'$. Le cas où n & m sont pairs se réduit à l'un des trois autres, car en extrayant la racine quarrée autant de fois qu'il seroit nécessaire, on arriveroit à une équation dont l'un des exposans seroit impair.

CHAPITRE II.

De la méthode des indéterminées.

(72). C'est à Descartes que l'on doit la méthode des indéterminées; il en a fait particuliérement usage pour résoudre les équations du quatrième degré. Soit l'équation du quatrième degré $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, dans laquelle manque le second terme; on sait que pour une équation quelconque il est toujours facile de le faire disparoître. Descartes imagine deux équations du second degré

$$x^2 + sx + t = 0,\ x^2 - sx + u = 0,$$

dont la forme est déterminée par la condition que l'équation du quatrième degré, qui proviendra de la multiplication de ces équations du second degré l'une par l'autre, ne renferme pas de second terme. En multipliant l'une par l'autre les deux équations du second degré & séparant x^4, on trouve $x^4 = (s^2 - t - u)x^2 + s(t - u)x - tu$, qui égalée à la valeur de x^4 tirée de la proposée, donne

$$(s^2 - t - u + p)x^2 + (st - su + q)x - tu + r = 0,$$

équation identique puisqu'on a égalé deux valeurs de la même quantité x^4; équation qui doit avoir lieu quelque soit x, ou sans que x puisse prendre une autre valeur que celles qui seront données par les deux équations du second degré, autrement on admettroit que l'équation du quatrième degré peut avoir plus de quatre racines. On a donc nécessairement

$$s^2 - t - u + p = 0,\ st - su + q = 0,\ tu - r = 0.$$

On tire de la première $t + u = s^2 + p$, de la deuxième $t - u = -\frac{q}{s}$; donc $t = \frac{s^2 + p}{2} - \frac{q}{2s}$, $u = \frac{s^2 + p}{2} + \frac{q}{2s}$; lesquelles valeurs de t & u étant substituées dans la troisième, il en résulte $\frac{(s^2 + p)^2}{4} - \frac{q^2}{4s^2} - r = 0$, ou

$s^6 + 2ps^4 + (p^2 - 4r)s^2 = q^2$, équation du sixième degré réductible au troisième; car si l'on fait $s^2 = z$, elle devient $z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z = q^2$.

(73). Nous allons présenter cette théorie sous une autre forme, en l'appliquant aux degrés que l'on sait résoudre; & d'abord nous l'appliquerons au second degré que nous représenterons par $x^2 + px + q = 0$.

Nous ferons $x = u + t$, d'où $x^2 = u^2 + 2tu + t^2 = u^2 - t^2 + 2tx$. Mais on tire de la proposée $x^2 = -px - q$; on a donc l'équation identique $(2t+p)x + u^2 - t^2 + q = 0$, qui est indépendante de x & dans laquelle on doit faire $2t + p = 0$, $u^2 - t^2 + q = 0$. On tire de la première $t = \frac{-p}{2}$; & cette valeur étant substituée dans la seconde, elle devient $u^2 = \frac{p^2}{4} - q$. Donc $u = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, qui est imaginaire lorsque q, étant positif, $\frac{p^2}{4}$ est moindre que q. Alors si l'on fait $\frac{p^2}{4} - q = -r^2$, on aura pour les deux racines de l'équation du second degré $x = -\frac{p}{2} + r\sqrt{-1}$, $x = -\frac{p}{2} - r\sqrt{-1}$.

Il s'ensuit que si un trinome $ax^2 + bx + c$ a ses deux facteurs imaginaires, & que l'un soit représenté par $x + A + B\sqrt{-1}$, l'autre devra l'être par $x + A - B\sqrt{-1}$, pour que leur produit soit une quantité réelle; & généralement si un multinome quelconque réel a des facteurs imaginaires, ils seront en nombre pair de la forme

$x + A + B\sqrt{-1}$, $x + A - B\sqrt{-1}$, $x + A' + B'\sqrt{-1}$, $x + A' - B'\sqrt{-1}$, &c. car s'ils avoient une autre forme, les produits deux à deux ne seroient pas des quantités réelles.

(74). Si l'équation étoit du troisième degré & représentée par $x^3 + px + q = 0$, on feroit $x = u + t$, d'où $x^3 = u^3 + 3u^2t + 3ut^2 + t^3 = u^3 + t^3 + 3utx$. On formeroit l'équation $(3ut + p)x + u^3 + t^3 + q = 0$, dans laquelle on feroit $3ut + p = 0$, $u^3 + t^3 + q = 0$. On tireroit de celles-ci $t = \frac{-p}{3u}$, $u^3 + q - \frac{p^3}{27u^3} = 0$, ou $u^6 + qu^3 = \frac{p^3}{27}$, équation du sixième degré réductible au second; car si l'on fait $u^3 = z$, elle devient $z^2 + qz = \frac{p^3}{27}$, de laquelle on tire $z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$.

On a donc $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$; & parce que

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}=\frac{-p}{3},$$

on a $t=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$.

Pour trouver les deux autres racines, on divisera x^3+px+q par $x-t-u$; &, à cause de $(u+t)^3+p(u+t)+q=0$, on aura l'équation du second degré $x^2+(u+t)x+(u+t)^2+p=0$, qui étant résolue donne $x=-\frac{u+t}{2}\pm\sqrt{-p-\frac{3}{4}(u+t)^2}=-\frac{u+t}{2}\mp\frac{u-t}{2}\sqrt{-3}$.

Ainsi les trois racines de l'équation du troisième degré seront

$x=u+t$, $x=-\frac{u+t}{2}-\frac{u-t}{2}\sqrt{-3}$, $x=-\frac{u+t}{2}+\frac{u-t}{2}\sqrt{-3}$;

ou, ce qui est absolument la même chose,

$x-u-t$, $x+\frac{u+t}{2}+\frac{u-t}{2}\sqrt{-3}$, $x+\frac{u+t}{2}-\frac{u-t}{2}\sqrt{-3}$,

seroit les facteurs du quatrinome x^3+px+q où le second terme manque. Si t & u sont des quantités réelles, une seule racine sera réelle, celle-ci $x=u+t$; les deux autres seront imaginaires de la forme $x=A+B\sqrt{-1}$, $x=A-B\sqrt{-1}$. Les trois racines se présenteront sous une forme imaginaire, lorsque u & t seront imaginaires, ce qui ne s'accorde pas avec le principe que dans toute équation réelle les racines imaginaires ne peuvent se rencontrer qu'en nombre pair. Mais u & t ne peuvent être imaginaires que dans le cas, ou p étant négatif, on auroit $\frac{1}{27}p^3$ plus grand que $\frac{1}{4}q^2$; & nous avons vu (n°. 67) que dans ce cas, connu sous le nom d'irréductible, les racines de l'équation sont les sinus ou cosinus de trois arcs très-réels.

(75). Soit proposé de résoudre l'équation du quatrième degré $x^4+px^2+qx+r=0$. On fera $x=u+t+s$, d'où $x^4=u^4+4u^3t+4u^3s+6u^2t^2+12u^2ts+6u^2s^2+4ut^3+12ut^2s+12uts^2+4us^3+t^4+4t^3s+6t^2s^2+4ts^3+s^4=(4us+2t^2)x^2+(4u^2t+4ts^2)x+u^4-t^4+s^4-2u^2s^2+4ut^2s$. En égalant cette valeur de x^4 à celle tirée de la proposée, on formera une équation identique qui devant être indépendante de toute nouvelle valeur donnée à x, donnera nécessairement

$$4us+2t^2+p=0,\ 4u^2t+4ts^2+q=0,$$
$$u^4-t^4+s^4-2u^2s^2+4ut^2s+r=0.$$

La troisième se change en celle-ci

$$(u^2+s^2)^2 = t^4 + 4u^2s^2 - 4ust^2 - r.$$

On tire de la deuxième $u^2+s^2 = -\frac{q}{4t}$; donc

$t^6 + 4u^2s^2t^2 - 4ust^4 - rt^2 = \frac{q^2}{16}$, dans laquelle il faudra mettre pour $4us$ & $4u^2s^2$ leurs valeurs tirées de la première, & on aura

$4t^6 + 2pt^4 + \left(\frac{p^2}{4} - r\right)t^2 = \frac{q^2}{16}$, équation du sixième degré qu'on réduit au troisième en faisant $t^2 = z$; en effet cette substitution donne

$$4z^3 + 2pz^2 + \frac{p^2-4r}{4}z = \frac{q^2}{16}.$$

Mais $u^2+s^2 = -\frac{q}{4t}$, $2us = -t^2 - \frac{p}{2}$; donc $(u+s)^2 = -\frac{q}{4t} - t^2 - \frac{p}{2}$ & $u+s = \pm\sqrt{-t^2 - \frac{q}{4t} - \frac{p}{2}}$. Donc

$$x = t + u + s = t \pm \sqrt{-t^2 - \frac{q}{4t} - \frac{p}{2}},$$

où si l'on met successivement pour t ces valeurs $+\sqrt{z}$ & $-\sqrt{z}$, on aura les quatre racines de l'équation du quatrième degré, qui sont

$$x = \sqrt{z} + \sqrt{-z - \frac{q}{4\sqrt{z}} - \frac{p}{2}},$$

$$x = \sqrt{z} - \sqrt{-z - \frac{q}{4\sqrt{z}} - \frac{p}{2}},$$

$$x = -\sqrt{z} + \sqrt{-z + \frac{q}{4\sqrt{z}} - \frac{p}{2}},$$

$$x = -\sqrt{z} - \sqrt{-z + \frac{q}{4\sqrt{z}} - \frac{p}{2}};$$

ou ce qui revient au même, les quatre quantités

$$x - \sqrt{z} - \sqrt{-z - \frac{q}{4\sqrt{z}} - \frac{p}{2}},\quad x + \sqrt{z} - \sqrt{-z + \frac{q}{4\sqrt{z}} - \frac{p}{2}},$$

$$x - \sqrt{z} + \sqrt{-z - \frac{q}{4\sqrt{z}} - \frac{p}{2}},\quad x + \sqrt{z} + \sqrt{-z + \frac{q}{4\sqrt{z}} - \frac{p}{2}},$$

font les facteurs du quintinome $x^4 + px^2 + qx + r$.

(76). Nommons z, z', z'' les trois valeurs de z; on aura

$$-\frac{p}{2} = z + z' + z'',\ \frac{q^2}{64} = z z' z'',\ \text{ou}\ \frac{q}{4\sqrt{z}} = 2\sqrt{z' z''}.$$

Les quatre racines prendront cette autre forme

$$x = \sqrt{z} + \sqrt{z' + z'' - 2\sqrt{z' z''}},\quad x = -\sqrt{z} + \sqrt{z' + z'' + 2\sqrt{z' z''}},$$

$$x = \sqrt{z} - \sqrt{z' + z'' - 2\sqrt{z' z''}},\quad x = -\sqrt{z} - \sqrt{z' + z'' + 2\sqrt{z' z''}};$$

où il faut remarquer que $z' + z''$ est toujours plus grand que $2\sqrt{z' z''}$, lorsque z' & z'' sont réelles, & moindre lorsqu'elles sont imaginaires; car si l'on fait $z' + z'' = m$, $2\sqrt{z' z''} = n$, on aura $z''^2 - m z'' = -\frac{n^2}{4}$ & $z'' = \frac{m}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}$, valeur qui ne peut être réelle que lorsque m est plus grand que n. Il suit delà, 1°. que toutes les quatre racines seront réelles, si z, z', z'' sont réelles & positives; 2°. que deux de ces racines seront réelles & deux seront imaginaires, si z seule est réelle & positive; 3°. que les racines seront toutes quatre imaginaires, si z, z', z'' étant réelles, une seule de ces quantités, z par exemple, est positive. Il faut en excepter le cas où deux des racines de l'équation du troisième degré seroient égales, où l'on auroit $z' = z''$. Alors les quatre racines de l'équation du quatrième degré deviendroient

$$x = \sqrt{z},\ x = \sqrt{z},\ x = -\sqrt{z} + 2\sqrt{z'},\ x = -\sqrt{z} - 2\sqrt{z'},$$

dont deux sont égales & réelles, & les deux autres imaginaires lorsque z' est négative.

(77). Nous avons vu que les facteurs imaginaires d'un multinome réel ne peuvent être qu'en nombre pair, & que deux à deux ils sont les facteurs d'une fonction trinome réelle. Soit représenté par $r^2 + s x + t^2 x^2$ le trinome réel dont les facteurs binomes sont imaginaires; pour trouver ceux-ci, on résoudra l'équation $x^2 + \frac{s x}{t^2} = -\frac{r^2}{t^2}$, & on aura $x = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4 r^2 t^2}}{2 t^2}$, expression qui sera imaginaire lorsque s^2 sera moindre que $4 r^2 t^2$, ou lorsque $\frac{s^2}{4 r^2 t^2}$ ou $\frac{s}{2 r t}$ sera moindre que l'unité. Or le cosinus d'un angle est toujours moindre que le rayon; donc le rayon étant 1, si l'on fait $\frac{s}{2 r t} = \cos. \zeta$ ou $s = 2 r t \cos. \zeta$, le trinome $r^2 + 2 r t x \cos. \zeta + t^2 x^2$ pourra représenter tous les trinomes irréductibles, ou dont les facteurs binomes sont imaginaires. Donc si un multinome réel a des facteurs imaginaires, on pourra les représenter deux à deux de la manière suivante

$$t x + r\,(\cos. \zeta + \sqrt{-1} \cdot \sin. \zeta)\ \&\ t x + r\,(\cos. \zeta - \sqrt{-1} \cdot \sin. \zeta);$$

&

& comme un des facteurs du multinome égalé à zéro doit le rendre nul, il est clair que celle qu'on voudra de ces deux valeurs de x,

$$x = -\frac{r}{t}(\cos. \zeta + \sqrt{-1} \cdot \sin. \zeta),\ x = -\frac{r}{t}(\cos. \zeta - \sqrt{-1} \cdot \sin. \zeta),$$

étant substituée dans le multinome doit aussi le rendre nul. Dans ces substitutions nous aurons à élever $\cos. \zeta \pm \sqrt{-1} . \sin. \zeta$ à différentes puissances. Pour y parvenir, je prends une autre formule $\cos. \theta \pm \sqrt{-1} . \sin. \theta$, & l'ayant multipliée par la première, je trouve

$$(\cos. \zeta \pm \sqrt{-1} . \sin. \zeta)(\cos. \theta \pm \sqrt{-1} . \sin. \theta) = \cos. (\zeta + \theta) \pm \sqrt{-1} . \sin. (\zeta + \theta);$$

c'est pourquoi si je fais $\theta = \zeta$, j'aurai

$$(\cos. \zeta \pm \sqrt{-1} . \sin. \zeta)^2 = \cos. 2\zeta \pm \sqrt{-1} . \sin. 2\zeta. \text{ Donc}$$

$$(\cos. 2\zeta \pm \sqrt{-1} . \sin. 2\zeta)(\cos. \theta \pm \sqrt{-1} . \sin. \theta) = \cos. (2\zeta + \theta) \pm \sqrt{-1} . \sin. (2\zeta + \theta);$$

& si je fais $\theta = \zeta$, j'aurai

$$(\cos. \zeta \pm \sqrt{-1} . \sin. \zeta)^3 = \cos. 3\zeta \pm \sqrt{-1} \sin. 3\zeta. \text{ Donc}$$

$$(\cos. 3\zeta \pm \sqrt{-1} \sin. 3\zeta)(\cos. \theta \pm \sqrt{-1} \sin. \theta) = \cos. (3\zeta + \theta) \pm \sqrt{-1} \sin. (3\zeta + \theta);$$

& si je fais $\theta = \zeta$, j'aurai

$$(\cos. \zeta \pm \sqrt{-1} \sin. \zeta)^4 = \cos. 4\zeta \pm \sqrt{-1} . \sin. 4\zeta.$$

Sans pousser plus loin ces calculs, on en conclura nécessairement que

$$(\cos. \zeta \pm \sqrt{-1} . \sin. \zeta)^\lambda = \cos. \lambda\zeta \pm \sqrt{-1} . \sin. \lambda\zeta.$$

(78). Nous représenterons le multinome par

$$a + bx + cx^2 + \ldots\ldots\ldots + hx^\lambda$$

dans lequel si l'on met pour x successivement $u(\cos. \zeta + \sqrt{-1} . \sin. \zeta)$; $u(\cos. \zeta - \sqrt{-1} . \sin. \zeta)$, où $u = -\frac{r}{t}$, on aura les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} a + bu\cos. \zeta + cu^2 \cos. 2\zeta + \ldots\ldots\ldots + hu^\lambda \cos. \lambda\zeta \\ +(bu \sin. \zeta + cu^2 \sin. 2\zeta + \ldots\ldots\ldots + hu^\lambda \sin. \lambda\zeta)\sqrt{-1} \end{array}\right\} = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} a + bu\cos. \zeta + cu^2 \cos. 2\zeta + \ldots\ldots\ldots + hu^\lambda \cos. \lambda\zeta \\ -(bu \sin. \zeta + cu^2 \sin. 2\zeta + \ldots\ldots\ldots + hu^\lambda \sin. \lambda\zeta)\sqrt{-1} \end{array}\right\} = 0;$$

qui étant ajoutées ensemble & ensuite ôtées l'une de l'autre donnent

$$a + bu\cos. \zeta + cu^2 \cos. 2\zeta + \ldots\ldots\ldots + hu^\lambda \cos. \lambda\zeta = 0;$$

$$bu \sin. \zeta + cu^2 \sin. 2\zeta + \ldots\ldots\ldots + hu^\lambda \sin. \lambda\zeta = 0.$$

(79). On demande les facteurs trinomes de $a^\lambda \pm x^\lambda$? Nos deux équations deviennent $a^\lambda \pm u^\lambda \cos. \lambda C = 0$, $u^\lambda \sin. \lambda C = 0$; & comme la seconde donne $\sin. \lambda C = 0$, on voit que λC ne peut être qu'un multiple de la demi-circonférence. Nommons π la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon, λC sera égal à $i\pi$, i étant un nombre entier positif, & $\cos. \lambda C$ à ± 1; c'est le signe $+$ lorsque i est pair & le signe $-$ lorsqu'il est impair. Il faudra prendre le signe $+$ lorsqu'il sera question de $a^\lambda - x^\lambda$, & le signe $-$ lorsqu'il s'agira de $a^\lambda + x^\lambda$, afin d'avoir dans l'un & l'autre cas $a^\lambda - u^\lambda = 0$, d'où l'on tire $u = a$, ou $r = -a$ & $t = 1$. En substituant pour r, t & C leurs valeurs dans la formule $r^2 + 2rtx \cos. C + t^2 x^2$, on trouvera $a^2 - 2ax \cos. \frac{i\pi}{\lambda} + x^2$, dans laquelle il faudra mettre pour i tous les nombres impairs moindres que λ, si l'on veut avoir tous les facteurs trinomes de $a^\lambda + x^\lambda$; & dans laquelle il faudra mettre pour i tous les nombres pairs moindres que λ, si l'on veut tous les facteurs trinomes de $a^\lambda - x^\lambda$. Il faut remarquer que lorsque λ est un nombre impair, la fonction $a^\lambda + x^\lambda$ a un facteur binome réel, $a + x$; qu'elle n'en a aucun lorsque λ est un nombre pair : que lorsque λ est un nombre pair, la fonction $a^\lambda - x^\lambda$ a deux facteurs binomes réels $a + x$ & $a - x$, qu'elle n'a de facteur binome réel que $a - x$, lorsque λ est un nombre impair. On peut tirer delà une démonstration bien directe & bien simple du théorême de côtes qu'on a coutume d'énoncer ainsi.

Si on divise une circonférence de cercle (*fig. XXI*) en arcs égaux Aa, Aa', aB, $a'B'$, Bb, $B'b'$, bD, $b'D'$, &c. dont le nombre soit égal à 2λ, & que d'un point quelconque O pris dans le diamètre AK, on tire des lignes Oa, Oa', OB, OB', Ob, Ob', OD, OD', &c. à tous les points de division, on aura

$$\overline{CA}^\lambda + \overline{CO}^\lambda = Oa \cdot Oa' \cdot Ob \cdot Ob' \cdot \&c.$$

$$\overline{CA}^\lambda - \overline{CO}^\lambda = OA \cdot OB \cdot OB' \cdot OD \cdot OD' \cdot \&c.$$

en prenant ainsi ces lignes alternativement. Nous remarquerons d'abord que lorsque λ est un nombre impair, OK est une des droites Oa, Ob, &c.; qu'elle est une des droites OB, OD, &c. lorsque λ est un nombre pair. Il nous reste donc seulement à démontrer qu'en nommant CA, a, CO, x & C l'arc AQ compris entre le point A & un des points de division, on doit avoir le produit $OQ \cdot OQ'$ ou $\overline{OQ}^2 = a^2 - 2ax \cos. C + x^2$. Or cela est évident; car si l'on mène QP perpendiculaire sur CA, on a $QP = a \sin. C$, $OP = \pm a \cos. C \mp x$, & par conséquent $\overline{OQ}^2 = a^2 - 2ax \cos. C + x^2$.

(80). Nous prendrons pour exemples $a^3 + x^3$ qui a un facteur binome $a + x$ & un facteur trinome $a^2 - 2ax \cos. \frac{\pi}{3} + x^2 = a^2 - ax + x^2$; $a^4 + x^4$ qui a deux facteurs trinomes $a^2 - 2ax \cos. \frac{\pi}{4} + x^2$, $a^2 - 2ax \cos. \frac{3\pi}{4} + x^2$;

qui ne font autres que $a^2 - ax\sqrt{2} + x^2$, $a^2 + ax\sqrt{2} + x^2$, car cos. $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cos. $\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $a^3 - x^3$ qui a un facteur binome $a - x$ & un facteur trinome $a^2 - 2ax \cos. \frac{2\pi}{3} + x^2 = a^2 + ax + x^2$; $a^4 - x^4$ qui a deux facteurs binomes $a + x$, $a - x$ & un facteur trinome $a^2 - 2ax$ cos. $\frac{2\pi}{4} + x^2 = a^2 + x^2$. Prenons encore pour exemples $a^6 + x^6$ & $a^6 - x^6$.

Premiérement $a^6 + x^6$ a trois facteurs trinomes $a^2 - 2ax \cos. \frac{\pi}{6} + x^2$, $a^2 - 2ax \cos. \frac{3\pi}{6} + x^2$, $a^2 - 2ax \cos. \frac{5\pi}{6} + x^2$. Mais cos. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, cos. $\frac{3\pi}{6} = 0$, cos. $\frac{5\pi}{6} = 16 (\cos. \frac{\pi}{6})^5 - 10 \cos. \frac{\pi}{6} - 5 \cos. \frac{3\pi}{6} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; les trois facteurs deviennent donc $a^2 + x^2$, $a^2 - ax\sqrt{3} + x^2$, $a^2 + ax\sqrt{3} + x^2$. Secondement $a^6 - x^6$ a deux facteurs binomes $a + x$, $a - x$ & deux facteurs trinomes

$$a^2 - 2ax \cos. \frac{2\pi}{6} + x^2 = a^2 - ax + x^2,$$
$$a^2 - 2ax \cos. \frac{4\pi}{6} + x^2 = a^2 + ax + x^2.$$

(81). Si on demandoit les facteurs trinomes de $a^{2\lambda} - 2a^\lambda x^\lambda \cos. g + x^{2\lambda}$; on auroit les deux équations

$$a^{2\lambda} - 2a^\lambda u^\lambda \cos. g \cos. \lambda\zeta + u^{2\lambda} \cos. 2\lambda\zeta = 0$$
$$-2a^\lambda u^\lambda \cos. g \sin. \lambda\zeta + u^{2\lambda} \sin. 2\lambda\zeta = 0.$$

Je multiplie la première par sin. $2\lambda\zeta$ & l'autre par cos. $2\lambda\zeta$, je soustrais ensuite la seconde de la première & il vient
$a^{2\lambda} \sin. 2\lambda\zeta - 2a^\lambda u^\lambda \cos. g (\sin. 2\lambda\zeta \cos. \lambda\zeta - \sin. \lambda\zeta \cos. 2\lambda\zeta) = 0$, ou $a^{2\lambda} \sin. 2\lambda\zeta - 2a^\lambda u^\lambda \cos. g \sin. \lambda\zeta = 0$. Cette dernière équation étant jointe avec celle-ci $-2a^\lambda u^\lambda \cos. g \sin. \lambda\zeta + u^{2\lambda} \sin. 2\lambda\zeta = 0$, on en tire $u^{2\lambda} = a^{2\lambda}$ & $u = a$, d'où $r = -a$ & $t = 1$. En mettant a pour u dans la seconde équation, on a $\sin. 2\lambda\zeta = 2 \cos. g \sin. \lambda\zeta$, &, à cause de $\sin. 2\lambda\zeta = 2 \sin. \lambda\zeta \cos. \lambda\zeta$, $\cos. \lambda\zeta = \cos. g$; d'où l'on voit que $\lambda\zeta = 2i\pi \pm g$ & $\zeta = \frac{2i\pi \pm g}{\lambda}$. Ainsi les facteurs trinomes demandés seront de cette forme $a^2 - 2ax \cos. \frac{2i\pi \pm g}{\lambda} + x^2$; & on trouvera ces facteurs en mettant dans les deux formules

$$a^2 - 2ax\cos.\frac{2i\pi+g}{\lambda} + x^2,\ a^2 - 2ax\cos.\frac{2i\pi-g}{\lambda} + x^2,$$

pour $2i$ tous les nombres pairs moindres que λ. Nous remarquerons que quand λ est un nombre pair, on trouve par les substitutions précédentes deux facteurs de moins que n'en doit avoir la fonction $a^{2\lambda} - 2a^\lambda x^\lambda \cos.g + x^{2\lambda}$; voici ces facteurs $a^2 - 2ax\cos.\frac{g}{\lambda} + x^2$, $a^2 + 2ax\cos.\frac{g}{\lambda} + x^2$: on n'en trouve qu'un seul de moins, savoir $a^2 - 2ax\cos.\frac{g}{\lambda} + x^2$, lorsque λ est un nombre impair.

On a de cette manière pour les facteurs trinomes de $a^6 - 2a^3x^3\cos.g + x^6$ ces quantités

$$a^2 - 2ax\cos.\frac{2\pi+g}{3} + x^2,\ a^2 - 2ax\cos.\frac{2\pi-g}{3} + x^2,\ a^2 - 2ax\cos.\frac{g}{3} + x^2.$$

En effet, à cause de

$$\cos.\frac{2\pi+g}{3} = -\frac{1}{2}\left(\cos.\frac{g}{3} - \sqrt{3}\,\text{sin}.\frac{g}{3}\right),\ \cos.\frac{2\pi-g}{3} = -\frac{1}{2}\left(\cos.\frac{g}{3} + \sqrt{3}\,\text{sin}.\frac{g}{3}\right),$$

on trouve que le produit des deux premiers facteurs est

$$a^4 + a^2x^2 + x^4 + 2ax(a^2+x^2)\cos.\frac{g}{3} + 2a^2x^2\cos.\frac{2g}{3};$$

& cette quantité, étant multipliée par $a^2 - 2ax\cos.\frac{g}{3} + x^2$, donne

$$a^6 - 2a^3x^3\cos.g + x^6.$$

(82). Des dernières formules, on tire aisément une autre propriété du cercle que Moivre a remarquée le premier. Voici comme on a coutume de l'énoncer. Si sur la circonférence d'un cercle quelconque *ABHA* (*fig. XXII*) on prend un arc $AL = g$ & l'arc $AB = \frac{g}{\lambda}$; qu'on divise la circonférence, en commençant au point B, en un nombre de parties égales marqué par λ; & que d'un point quelconque O, pris dans le diamètre AK, on mène à tous les points de division les lignes OB, OF, Of, OG, Og, &c. je dis qu'on aura

$$\overline{OB}^2\cdot\overline{OF}^2\cdot\overline{Of}^2\cdot\overline{OG}^2\cdot\overline{Og}^2\ \&c. = \overline{CA}^{2\lambda} - 2\,\overline{CA}^\lambda\cdot\overline{CO}^\lambda\cos.g + \overline{CO}^{2\lambda}.$$

En effet, nommant CA, a, CO, x, & ζ l'arc compris entre le point A & un des points de division, on a $\overline{OQ}^2 = a^2 - 2ax\cos.\zeta + x^2$;

& mettant pour ζ ces différens arcs $\frac{g}{\lambda}$, $\frac{2\pi+g}{\lambda}$, $\frac{2\pi-g}{\lambda}$, $\frac{4\pi+g}{\lambda}$, $\frac{4\pi-g}{\lambda}$, &c.

on trouve pour $\overline{OB}^2$, $\overline{OF}^2$, $\overline{Of}^2$, $\overline{OG}^2$, $\overline{Og}^2$, &c. les mêmes quantités que nous venons de démontrer être les facteurs de $a^{2\lambda} - 2a^\lambda x^\lambda\cos.g + x^{2\lambda}$.

Des

Des fractions rationnelles.

(83). Toute fonction rationnelle entière peut être repréſentée par

$$a + bx + cx^2 + \ldots\ldots\ldots + hx^\lambda,$$

car on peut ſuppoſer que tous les nombres entiers poſſibles ſont compris dans la ſuite $0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots \lambda$. Il ſuit delà qu'on pourra repréſenter toute fraction rationnelle par

$$\frac{(P) \ldots\ldots a + bx + cx^2 + \ldots\ldots\ldots + hx^\lambda}{(Q) \ldots\ldots a' + b'x + c'x^2 + \ldots\ldots\ldots + h'x^{\lambda'}};$$

& ſi dans celles qu'on propoſera, il ſe trouvoit des puiſſances de x, dont les expoſans fuſſent des nombres entiers négatifs, telles que $x^{-1}, x^{-2} \ldots x^{-\mu}$; il ſuffiroit, pour qu'elle devînt ſemblable à la précédente, de multiplier ſon numérateur & ſon dénominateur par x^μ, $-\mu$ étant le plus grand de ces expoſans négatifs. Multipliant, par exemple, le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{ax^{-3} + 1}{x^{-4} + x^{-2}}$, par x^4, on la transforme en celle-ci $\frac{ax + x^4}{1 + x^2}$.

Maintenant, dans la fraction $\frac{P}{Q}$, λ peut être plus grand ou moindre que λ'; s'il eſt plus grand, en diviſant

$hx^\lambda + \ldots\ldots + cx^2 + bx + a$ par $h'x^{\lambda'} + \ldots\ldots + c'x^2 + b'x + a'$,

on pourra toujours partager la fraction rationnelle en deux parties, dont l'une ſera une fonction rationnelle entière, & l'autre une fraction rationnelle, telle que la plus haute puiſſance de x dans le numérateur ſera moindre que la plus haute puiſſance de x dans le dénominateur. Soit propoſée, par exemple, $\frac{ax + x^4}{1 + x^2}$; on diviſera $x^4 + ax$ par $x^2 + 1$, & on trouvera que

$\frac{ax + x^4}{1 + x^2} = x^2 - 1 + \frac{1 + ax}{1 + x^2}$; de la même manière on trouvera que $\frac{b + ax^{\lambda+3}}{1 + x^\lambda} = ax^3 + \frac{b - ax^3}{1 + x^\lambda}$. Ainſi lorſqu'on propoſe de réſoudre une fraction rationnelle en fractions ſimples, tout ſe réduit à décompoſer en fractions ſimples une fraction rationnelle de cette forme

$$\frac{(P) \ldots\ldots\ldots a + bx + cx^2 + \ldots\ldots\ldots + hx^\lambda}{(Q) \ldots\ldots\ldots a' + b'x + c'x^2 + \ldots\ldots\ldots + i'x^{\lambda+1}},$$

dans laquelle le numérateur P & le dénominateur Q ſont ſuppoſés n'avoir pas de facteurs communs.

(84). J'imagine un nombre $\lambda + 1$ de fractions binomes

$$\frac{A}{m + nx} + \frac{B}{m' + n'x} + \frac{C}{m'' + n''x} + \&c.$$

& il eſt clair qu'en les réduiſant au même dénominateur, la fraction réſultante

aura pour numérateur une fonction rationnelle entière du degré λ qui sera la plus générale de ce degré. Prenons pour exemple les trois fractions

$$\frac{A}{m+nx}+\frac{B}{m'+n'x}+\frac{C}{m''+n''x};$$

en les réduisant au même dénominateur, nous aurons

$$\frac{\begin{matrix} A\,m'm'' + A\,(m''n' + m'n'')\,x + A\,n'n''x^2 \\ B\,m\,m'' + B\,(m''n + m\,n'') \quad + B\,n\,n'' \\ C\,m\,m' + C\,(m'n + m\,n') \quad + C\,n\,n' \end{matrix}}{(m+nx)\,(m'+n'x)\,(m''+n''x)},$$

dont le numérateur est une fonction rationnelle entière la plus générale du second degré. Il faut bien faire attention que cela suppose que les binomes $m+nx$, $m'+n'x$, $m''+n''x$ sont inégaux & premiers entr'eux; car si les choses étoient autrement, & que, par exemple, $m'+n'x$ fût égal à $Km+Knx$, ce qui donne $m'=Km$, $n'=Kn$, la fraction deviendroit

$$\frac{\begin{matrix}(AK+B)\,m\,m'' + (AK+B)\,(m''n+m\,n'')\,x + (AK+B)\,n\,n''x^2 \\ +CKm^2 \qquad\qquad + 2\,CKmn \qquad\qquad\qquad + CKn^2\end{matrix}}{K\,(m+nx)^2\,(m+n''x)},$$

dont le numérateur ne peut pas représenter toute fonction rationnelle entière du second degré; en effet, en l'égalant à la fonction générale du second degré $\alpha+\beta x+\gamma x^2$, on trouve entre α, β, γ la relation suivante $\alpha n^2-\beta mn+\gamma m^2=0$. Mais deux des facteurs étant égaux, si l'on conçoit les trois fractions,

$$\frac{A}{(m+nx)^2}+\frac{B}{m+nx}+\frac{C}{m''+n''x},$$

& qu'on les réduise au même dénominateur, on aura

$$\frac{Am''+Bmm''+Cm^2+(An''+B\,(m''n+mn'')+2\,Cmn)\,x+(Bnn''+Cn^2)\,x^2}{(m+nx)^2\,(m''+n''x)},$$

dont le numérateur peut représenter toute fonction rationnelle entière du second degré. Il en auroit été de même, si les trois facteurs étant égaux, on eût formé les trois fractions

$$\frac{A}{(m+nx)^3}+\frac{B}{(m+nx)^2}+\frac{C}{m+nx};$$

car en les réduisant au même dénominateur, on eût trouvé

$$\frac{A+Bm+Cm^2+(Bn+2\,Cmn)\,x+Cn^2x^2}{(m+nx)^3}.$$

Imaginons maintenant deux fractions trinomes

$$\frac{A+Bx}{r^2+2\,rtx\cos.\zeta+t^2x^2}+\frac{C+Dx}{r'^2+2\,r't'x+t'^2x^2},$$

dont les dénominateurs soient inégaux & premiers entr'eux; en les réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\frac{\begin{array}{l} A r'^2 + C r^2 + (B r'^2 + D r^2)\, x + (A t'^2 + C t^2)\, x^2 + (B t'^2 + D t^2)\, x^3 \\ \quad + \quad 2 A r' t' \cos. \beta' + \quad 2 B r' t' \cos. \beta' \\ \quad + \quad 2 C r t \cos. \beta + \quad 2 D r t \cos. \beta \end{array}}{(r^2 + 2 r t x \cos. \beta + t^2 x^2)\,(r'^2 + 2 r' t' x \cos. \beta' + t' x^2)}\,;$$

& dans cette fraction le numérateur eſt une fonction rationnelle entière la plus générale du troiſième degré. Si les facteurs trinomes étant égaux, on eût formé les deux fractions

$$\frac{A + B x}{(r^2 + 2 r t x \cos. \beta + t^2 x^2)^2} + \frac{C + D x}{r^2 + 2 r t x \cos. \beta + t^2 x^2}\,;$$

en les réduiſant au même dénominateur, on eût trouvé

$$\frac{\begin{array}{l} A + C r^2 + (B + D r^2)\, x + \quad C t^2 x^2 + D t^2 x^3 \\ \quad + \; 2 C r t \cos. \beta + 2 D r t \cos. \beta \end{array}}{(r^2 + 2 r t x \cos. \beta + t^2 x^2)^2}\,;$$

le numérateur de cette fraction eſt auſſi une fonction rationnelle entière la plus générale du troiſième degré.

(85). Mais ſans pouſſer plus loin ces calculs, je crois que nous pouvons regarder comme démontrée la règle générale que voici, pour réſoudre en fractions ſimples toute fraction rationnelle propoſée. Si elle eſt repréſentée par

$$\frac{(P) \ldots\ldots a + b x + c x^2 + \ldots\ldots\ldots + h x^\lambda}{(Q) \ldots\ldots a' + b' x + c' x^2 + \ldots\ldots\ldots + i' x^{\lambda+1}}\,,$$

on chercheroit les facteurs du dénominateur Q, en réſolvant l'équation

$$a' + b' x + c' x^2 + \ldots\ldots\ldots + i' x^{\lambda+1} = 0.$$

Si l'on trouve les facteurs binomes réels $m + nx$, $m' + n'x$, &c. $(p + qx)^\mu$, &c. où $m + nx$, $m' + n'x$, &c $p + qx$, &c. ſont inégaux & premiers entr'eux, & les facteurs trinomes irréductibles $r^2 + 2 r t x \cos. \beta + t^2 x^2$, &c. $(s^2 + 2 s u x \cos. \gamma + u^2 x^2)^\nu$ &c. où $r^2 + 2 r t x \cos. \beta + t^2 x^2$, &c. $s^2 + 2 s u x \cos. \gamma + u^2 x^2$, &c. ſont auſſi inégaux & premiers entr'eux; on fera $\frac{P}{Q} =$

$$\frac{A}{m + n x} + \frac{B}{m' + n' x} + \text{\&c.} + \frac{A'}{(p + q x)^\mu} + \frac{B'}{(p + q x)^{\mu - 1}} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{H'}{p + q x} + \text{\&c.} + \frac{E + F x}{r^2 + 2 r t x \cos. \beta + t^2 x^2} + \text{\&c.} +$$
$$\frac{L' + F' x}{(s^2 + 2 s u x \cos. \gamma + u^2 x^2)^\nu} + \frac{G' + H' x}{(s^2 + 2 s u x \cos. \gamma + u^2 x^2)^{\nu - 1}} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{M' + N' x}{s^2 + 2 s u x \cos. \gamma + u^2 x^2} + \text{\&c.}\,;$$

& ſi après avoir réduit ce nombre de fractions ſimples au même dénominateur, la fraction réſultante a pour numérateur

$$A\,1 + B\,1\, x + C\,1\, x^2 + \ldots\ldots\ldots + H\,1\, x^\lambda\,;$$

comme cette fonction rationnelle entière peut repréſenter toutes celles du degré λ; on pourra ſuppoſer qu'elle eſt identiquement la même que

$$a + bx + cx^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + hx^\lambda;$$

on aura de cette manière les équations

$$A1 = a,\ B1 = b,\ C1 = c \ldots\ldots\ldots\ldots H1 = h,$$

qui ſerviront à déterminer

$$A, B, \&c.\ A', B' \ldots\ldots H', \&c.\ E, F, \&c.\ E', F' \ldots\ldots\ldots N'', \&c.$$

(86). Nous prendrons pour exemple la fraction rationnelle $\frac{1+2x+3x^2+4x^3}{x(1-x)^2(1+x^3)}$, que nous propoſerons de réſoudre en ſes fractions ſimples. Les facteurs du dénominateur ſont x, $1+x$, $(1-x)^2$, $1-x+x^2$; nous ſuppoſerons donc que la fraction propoſée eſt égale à

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{A'}{(1-x)^2} + \frac{B'}{1-x} + \frac{E+Fx}{1-x+x^2};$$

& réduiſant au même dénominateur, nous aurons l'équation identique

$$\begin{array}{rrrrrrl}
A & -2Ax & +Ax^2 & +Ax^3 & -2Ax^4 & +Ax^5 & = 0, \\
-1 & +B & -3B & +4B & -3B & +B & \\
 & +A' & -B' & -E & +A' & -B' & \\
 & +B' & -E & -F & +B' & +F & \\
 & +E & +F & & +E & & \\
 & -2 & -3 & -4 & -F & &
\end{array}$$

de laquelle on tire

$$A = 1,\ B = \tfrac{1}{6},\ A' = 5,\ B' = \tfrac{1}{2},\ E = \tfrac{-11}{3},\ F = \tfrac{4}{3}.$$ Donc

$$\frac{1+2x+3x^4+4x^3}{x(1-x)^2(1+x^3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6(1+x)} + \frac{5}{(1-x)^2} + \frac{5}{2(1-x)} - \frac{11-4x}{3(1-x+x^2)}.$$

Voici une autre méthode pour déterminer ces mêmes co-efficiens.

(87). La fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ étant propoſée pour déterminer le numérateur de la fraction partielle $\frac{A}{m+nx}$, on fera $Q = (m+nx)S$, & $\frac{P}{Q} = \frac{A}{m+nx} + \frac{R}{S}$; on a auſſi $\frac{P}{Q} = \frac{P}{(m+nx)S}$, donc $R = \frac{P-AS}{m+nx}$. Mais R eſt une fonction rationnelle entière, donc $P - AS$ doit être exactement diviſible par $m+nx$; il ſuit delà que ſi l'on fait $m+nx = 0$, on doit auſſi avoir $P - AS = 0$; & que par conſéquent A eſt égal à ce que devient $\frac{P}{S}$, lorſqu'on fait $x = \frac{-m}{n}$: on voit

voit bien clairement que S ne doit pas renfermer des facteurs égaux à $m+nx$, ni qui en soient multiples.

Dans l'exemple précédent $P=1+2x+3x^2+4x^3$, $S=(1-x)^2(1+x^3)$; lorsqu'on fait $x=0$, on a $\frac{P}{S}=1$, c'est effectivement la valeur que nous avons déjà trouvée pour A. Si on vouloit déterminer B, on auroit $S=x(1-x)^2(1-x+x^2)$; or, lorsque $x=-1$, $\frac{P}{S}=\frac{1}{6}$, donc $B=\frac{1}{6}$, comme nous l'avons trouvé.

(88). Pour déterminer les numérateurs des fractions

$$\frac{A'}{(p+qx)^\mu}+\frac{B'}{(p+qx)^{\mu-1}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{H'}{p+qx},$$

on fera $Q=(p+qx)^\mu S$ & $\frac{P}{Q}=$

$$\frac{A'}{(p+qx)^\mu}+\frac{B'}{(p+qx)^{\mu-1}}+\ldots\ldots+\frac{H'}{p+qx}+\frac{R}{S}.$$

A cause de $\frac{P}{Q}=\frac{P}{(p+qx)^\mu S}$, on aura $R=$

$$\frac{P-S[A'+B'(p+qx)+\ldots\ldots\ldots+H'(p+qx)^{\mu-1}]}{(p+qx)^\mu}.$$

Comme R est une fonction rationnelle entière, il est clair que le numérateur du second membre de l'équation précédente doit être exactement divisible par le dénominateur; ce qui fera que ce numérateur s'évanouira dans l'hypothèse de $p+qx=0$; donc dans la même hypothèse $P-A'S=0$, d'où l'on tire que A' est égal à ce que devient $\frac{P}{S}$, lorsqu'on fait $x=\frac{-p}{q}$. Mais puisque la supposition de $p+qx=0$, rend $P-A'S=0$, on voit que $P-A'S$ est exactement divisible par $p+qx$. Je fais $\frac{P-A'S}{p+qx}=T$, T étant une fonction rationnelle entière, & il vient $R=$

$$\frac{T-S[B'+C'(p+qx)+\ldots\ldots\ldots+H'(p+qx)^{\mu-2}]}{(p+qx)^{\mu-1}}.$$

Par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire, on trouvera que $T-B'S$ doit être égal à zéro dans l'hypothèse de $p+qx=0$, d'où l'on tire que B' est égal à ce que devient $\frac{T}{S}$, lorsqu'on fait $x=\frac{-p}{q}$. Donc $T-B'S$ est exactement divisible par $p+qx$. Soit $\frac{T-B'S}{p+qx}=U$, U étant une fonction rationnelle entière; on aura

$R = \frac{U - S[C' + \ldots\ldots\ldots + H'(p+qx)^{\mu-3}]}{(p+qx)^{\mu-2}}$,

& C' égal à ce que devient $\frac{U}{S}$, lorsqu'on fait $x = \frac{-p}{q}$. Veut-on encore le co-efficient qui suit, on fera $\frac{U - C'S}{p+qx} = V$, & on aura ce co-efficient égal à ce que devient $\frac{V}{S}$, lorsqu'on fait $x = \frac{-p}{q}$; & ainsi des autres.

Pour déterminer, dans l'exemple, les co-efficiens A', B', on fera $Q = (1-x)^2 S$; d'où $S = x(1+x^3)$ & $\frac{P}{S} = \frac{1+2x+3x^2+4x^3}{x(1+x^3)}$; lorsqu'on fait $x = 1$; cette expression devient $= 5$, c'est la valeur de A'. Mais $P - A'S = 1 - 3x + 3x^2 + 4x^3 - 5x^4$; donc $T = 1 - 2x + x^2 + 5x^3$, & $\frac{T}{S} = \frac{1-2x+x^2+5x^3}{x(1+x^3)}$, dans laquelle si l'on fait $x = 1$, il vient $\frac{5}{2}$ pour la valeur de B'.

(89). Il est question maintenant de déterminer les co-efficiens du numérateur de la fraction trinome $\frac{E+Fx}{r^2 + 2rtx\cos.\,\mathcal{C} + t^2x^2}$. On fera

$Q = (r^2 + 2rtx\cos.\,\mathcal{C} + t^2x^2)S$, & $\frac{P}{Q} = \frac{E+Fx}{r^2+2rtx\cos.\,\mathcal{C}+t^2x^2} + \frac{R}{S}$.

On a aussi $\frac{P}{Q} = \frac{P}{(r^2+2rtx\cos.\,\mathcal{C}+t^2x^2)S}$; donc $R = \frac{P - S(E+Fx)}{r^2+2rtx\cos.\,\mathcal{C}+t^2x^2}$.

Nous dirons, comme ci-dessus, que R étant une fonction rationnelle entière, il faut que $P - S(E+Fx)$ soit exactement divisible par $r^2 + 2rtx\cos.\,\mathcal{C} + t^2x^2$; & que par conséquent chacune des valeurs de x, tirées de l'équation $r^2 + 2rtx\cos.\,\mathcal{C} + t^2x^2 = 0$, doit rendre nulle la fonction $P - S(E+Fx)$. Ces valeurs de x sont

$$-\frac{r}{t}(\cos.\,\mathcal{C} + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\mathcal{C}) \;\&\; -\frac{r}{t}(\cos.\,\mathcal{C} - \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\mathcal{C});$$

je suppose qu'en les substituant successivement dans P & S, elles deviennent,

P ceci, $\Pi + \pi\sqrt{-1}$ & $\Pi - \pi\sqrt{-1}$,

S ceci, $\Sigma + \varsigma\sqrt{-1}$ & $\Sigma - \varsigma\sqrt{-1}$,

on aura les deux équations

$$\Pi + \pi\sqrt{-1} = (\Sigma + \varsigma\sqrt{-1})\left(E - \frac{r}{t}F(\cos.\,\mathcal{C} + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\mathcal{C})\right);$$

$$\Pi - \pi\sqrt{-1} = (\Sigma - \varsigma\sqrt{-1})\left(E - \frac{r}{t}F(\cos.\,\mathcal{C} - \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\mathcal{C})\right);$$

d'où l'on tire, en les ajoutant ensemble, & ôtant ensuite la seconde de la première

$$\Pi = \Sigma E - \frac{r}{t} \Sigma F \text{ cos. } \zeta + \frac{r}{t} \varsigma F \text{ fin. } \zeta,$$

$$\pi = \varsigma E - \frac{r}{t} \varsigma F \text{ cos. } \zeta - \frac{r}{t} \Sigma F \text{ fin. } \zeta.$$

Enfin, par l'élimination, on trouve

$$E = \frac{\Pi \Sigma + \pi \varsigma}{\Sigma^2 + \varsigma^2} + \frac{\text{cos. } \zeta}{\text{fin. } \zeta} \cdot \frac{\Pi \varsigma - \pi \Sigma}{\Sigma^2 + \varsigma^2}, \quad F = \frac{t}{r \text{ fin. } \zeta} \cdot \frac{\Pi \varsigma - \pi \Sigma}{\Sigma^2 + \varsigma^2}.$$

Servons-nous de ces formules pour déterminer E & F dans l'exemple où

$$P = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3, \quad S = x - x^2 - x^3 + x^4.$$

On a $r^2 + 2rtx \text{ cos. } \zeta + t^2 x^2 = 1 - 2x \text{ cos. } \frac{\pi}{3} + x^2$, d'où $r = -1$, $t = 1$ & $\zeta = \frac{\pi}{3}$. D'ailleurs cos. $\zeta = \frac{1}{2}$, cos. $2\zeta = -\frac{1}{2}$, cos. $3\zeta = -1$, cos. $4\zeta = -\frac{1}{2}$; & fin. $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, fin. $2\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, fin. $3\zeta = 0$, fin. $4\zeta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; donc $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1})$, $x^2 = -\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{3}\sqrt{-1})$, $x^3 = -1$, $x^4 = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1})$. Substituant ces valeurs dans P & S, on trouve $\Pi = -\frac{7}{2}$, $\pi = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, $\Sigma = \frac{3}{2}$, $\varsigma = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$; & par conséquent $E = -\frac{11}{3}$, $F = \frac{4}{3}$.

(90). Il nous reste à déterminer les co-efficiens E', F', &c. Faisons $Q = (s^2 + 2sux \text{ cos. } \gamma + u^2 x^2)^v S$, & $\frac{P}{Q} = \frac{E' + F'x}{(s^2 + 2sux \text{ cos. } \gamma + u^2 x^2)^v} + \frac{G' + H'x}{(s^2 + 2sux \text{ cos. } \gamma + u^2 x^2)^{v-1}} + \ldots\ldots + \frac{M' + N'x}{s^2 + 2sux \text{ cos. } \gamma + u^2 x^2} + \frac{R}{S}$.

A cause de $\frac{P}{Q} = \frac{P}{(s^2 + 2sux \text{ cos. } \gamma + u^2 x^2)^v S}$, on a $R =$

$$\frac{P - S[E' + F'x + (G' + H'x)(s^2 + 2sux \text{ cos. } \gamma + u^2 x^2) + \&c.]}{(s^2 + 2sux \text{ cos. } \gamma + u^2 x^2)^v}.$$

De l'équation $u^2 x^2 + 2sux \text{ cos. } \gamma + s^2 = 0$, on tire $x = \frac{-s}{u}(\text{cos. } \gamma \pm \sqrt{-1} \text{ fin. } \gamma)$; nommons $\Pi \pm \pi\sqrt{-1}$ & $\Sigma \pm \varsigma\sqrt{-1}$, ce que deviennent les fonctions P & S par cette substitution, on aura pour déterminer E', F' les deux équations

$$\Pi + \pi\sqrt{-1} = (\Sigma + \varsigma\sqrt{-1})\left(E' - \frac{s}{u}(F' \text{ cos. } \gamma + \sqrt{-1} \text{ fin. } \gamma)\right);$$

$$\Pi - \pi\sqrt{-1} = (\Sigma - \varsigma\sqrt{-1})\left(E' - \frac{s}{u}(F' \text{ cos. } \gamma - \sqrt{-1} \text{ fin. } \gamma)\right).$$

Faisons $\frac{P - S(E' + F'x)}{s^2 + 2sux\cos.\gamma + u^2x^2} = T$, il viendra $R =$

$$\frac{T - S[G' + H'x + \ldots + (M' + N'x)(s^2 + 2sux\cos.\gamma + u^2x^2)^{\nu-2}]}{(s^2 + 2sux\cos.\gamma + u^2x^2)^{\nu-1}}.$$

Donc si nous nommons $\tau \pm \theta\sqrt{-1}$, ce que devient T par la substitution précédente, nous aurons pour déterminer G' & H' les deux équations

$$\tau + \theta\sqrt{-1} = (\Sigma + \varsigma\sqrt{-1})\left(G' - \frac{s}{u}H'(\cos.\gamma + \sqrt{-1}\,\sin.\gamma)\right);$$

$$\tau - \theta\sqrt{-1} = (\Sigma - \varsigma\sqrt{-1})\left(G' - \frac{s}{u}H'(\cos.\gamma - \sqrt{-1}\,\sin.\gamma)\right);$$

& ainsi des autres.

Je prendrai pour exemple la fraction rationnelle $\frac{1}{(a^4 + x^4)^2}$. Les facteurs de $a^4 + x^4$ sont $a^2 + ax\sqrt{2} + x^2$ & $a^2 - ax\sqrt{2} + x^2$; c'est pourquoi si je suppose $Q = (a^2 - ax\sqrt{2} + x^2)^2 S$, j'aurai $s = -a$, $u = 1$, $\cos.\gamma = \sin.\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}(1 \pm \sqrt{-1})$, $x^2 = \pm a^2\sqrt{-1}$. En substituant ces valeurs dans $(a^2 + ax\sqrt{2} + x^2)^2$, on trouve $S = \pm 8a^4\sqrt{-1}$. Mais $P = 1$; donc $\Pi = 1$, $\pi = 0$, $\Sigma = 0$, $\varsigma = 8a^4$. On mettra ces valeurs dans les équations qui doivent donner E', F', & on aura

$$1 = 4a^4\sqrt{-1}(2E' + a\sqrt{2}F') - 4a^5\sqrt{2}F',$$

$$-1 = 4a^4\sqrt{-1}(2E' + a\sqrt{2}F') + 4a^5\sqrt{2}F';$$

d'où l'on tire

$$E' = \frac{1}{8a^4},\; F' = \frac{-1}{4\sqrt{2}a^5} \;\&\; E' + F'x = \frac{a - x\sqrt{2}}{8a^5}.$$

On trouve ensuite $T =$

$$\frac{1 - \frac{a - x\sqrt{2}}{8a^5}(a^2 + ax\sqrt{2} + x^2)^2}{a^2 - ax\sqrt{2} + x^2} = \frac{1}{8a^5}(7a^3 + 6a^2x\sqrt{2} + 5ax^2 + x^3\sqrt{2}),$$

qui devient $\frac{3}{2a^2}(1 \pm \sqrt{-1})$ lorsqu'on met pour x les valeurs trouvées plus haut. Donc $\tau = \theta = 3a^2$, &

$$\frac{3}{2a^2}(1 + \sqrt{-1}) = 4a^4\sqrt{-1}(2G' + a\sqrt{2}H') - 4a^5\sqrt{2}H',$$

$$\frac{-3}{2a^2}(1 - \sqrt{-1}) = 4a^4\sqrt{-1}(2G' + a\sqrt{2}H') + 4a^5\sqrt{2}H';$$

d'où

d'où l'on tire $G' = \frac{3}{8a^6}$, $H' = \frac{-3}{8a^7\sqrt{2}}$ & $G' + H'x = \frac{3(2a - x\sqrt{2})}{16a^7}$.

On trouvera les deux autres fractions simples en changeant le signe de a dans les précédentes, & on aura

$$\frac{1}{(a^4 + x^4)^2} = \frac{a - x\sqrt{2}}{8a^5(a^2 - ax\sqrt{2} + x^2)^2} + \frac{3(2a - x\sqrt{2})}{16a^7(a^2 - ax\sqrt{2} + x^2)} +$$
$$\frac{a + x\sqrt{2}}{8a^5(a^2 + ax\sqrt{2} + x^2)^2} + \frac{3(2a + x\sqrt{2})}{16a^7(a^2 + ax\sqrt{2} + x^2)}.$$

De la manière de développer les fonctions en séries.

(91). Pour développer en une série *ascendante*, ou dans laquelle les exposans de x aillent en croissant, la fraction rationnelle $\frac{1 + 4x + x^2}{(1 - x)^4}$; je suppose

$$\frac{1 + 4x + x^2}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$$ & il est clair que la série demandée ne peut avoir d'autre forme. En faisant disparoître le dénominateur & mettant tout dans le même membre, il vient

$$\begin{array}{llll} A \,.\, x & + \; B \,.\, x^2 & + \; C \,.\, x^3 & + \; D \,.\, x^4 + \&c. \\ -8 & -4A & -4B & -4C \\ & +5 & +6A & +6B \\ & & -4 & -4A \\ & & & +1 \end{array}$$

équation qui doit être identique indépendamment de toute valeur donnée à x. On a donc nécessairement $A - 8 = 0$, $B - 4A + 5 = 0$, $C - 4B + 6A - 4 = 0$, $D - 4C + 6B - 4A + 1 = 0$, &c. & par conséquent $A = 8$, $B = 27$, $C = 64$, $D = 125$, &c.

Tout ce qui est affecté d'une même puissance de x, est un terme de l'équation identique; dans chaque terme on distingue la puissance de x & son co-efficient; or le principe fondamental de la méthode des indéterminées, consiste à égaler à zéro chacun des co-efficiens; &, comme nous l'avons déjà dit, la raison de cela est que x ne devant recevoir aucune valeur, aucun des termes ne peut être supposé détruit ni par ceux qui précèdent, ni par ceux qui suivent.

Si l'on veut développer en une série ascendante la fonction $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, on la supposera égale à $1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \&c.$; & après avoir quarré chaque membre, & multiplié par $1 + x^2$, on aura

$$\begin{array}{llll} 2A \,.\, x^2 & + \; 2B \,.\, x^4 & + \; 2C \,.\, x^6 & + \; 2D \,.\, x^8 + \&c. = 0. \\ +1 & + A^2 & + 2AB & + 2AC \\ & + 2A & + 2B & + B^2 \\ & & + A^2 & + 2C \\ & & & + 2AB \end{array}$$

En égalant à zéro chacun des co-efficiens, il vient

$$A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},\ C = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6},\ D = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8},\ \&c.$$

(92). On démontre facilement que, m étant un nombre entier positif, $(1+x)^m = 1 + mx + m.\frac{m-1}{2}.x^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^3 + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}x^4 + \&c.$ & que $(1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+\&c.)^m$
$= 1 + max + \left(mb + m\cdot\frac{m-1}{2}a^2\right)x^2 + \left(mc + m\cdot\frac{m-1}{2}\,2ab + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^3\right)x^3 + \left(md + m\cdot\frac{m-1}{2}(2ac+b^2) + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\,3a^2b + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}a^4\right)x^4 + \left(me + m\cdot\frac{m-1}{2}\,2(ad+bc) + m\cdot\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}\,3(a^2c+ab^2) + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\,4a^3b + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\,\frac{m-4}{5}a^5\right)x^5 + \&c.$

Cela posé, on demande de développer la fonction $(1+x)^{\frac{m}{n}}$, où m & n sont deux nombres entiers positifs? Soit $(1+x)^{\frac{m}{n}} = z$, on aura $(1+x)^m = z^n$, & z devra être de cette forme $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$; on aura donc pour en déterminer les co-efficiens cette suite d'équations $m = nA$, $m\cdot\frac{m-1}{2} = nB + n\cdot\frac{n-1}{2}A^2$, $m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3} = nC + n\cdot\frac{n-1}{2}\,2AB + n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}A^3$, $m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4} = nD + n\cdot\frac{n-1}{2}(2AC + B^2) + n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\,3A^2B + n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}A^4$, &c. desquelles on tire $A = \frac{m}{n}$, $B = \frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{2n}$, $C = \frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{2n}\cdot\frac{m-2n}{3n}$,
$D = \frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{2n}\cdot\frac{m-2n}{3n}\cdot\frac{m-3n}{4n}$, &c.

Ainsi, soit que le nombre positif m soit entier ou fractionnaire, $(1+x)^m = 1 + mx + m\cdot\frac{m-1}{2}x^2 + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}x^3 + \&c.$

Si l'on avoit à développer $(1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m}$, on feroit cette dernière quantité $= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$ & on auroit l'équation identique

$$\begin{array}{llll} m\cdot x & +\, m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot x^2 & +\, m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\,x^3 & +\ \text{\&c.} = 0, \\ +A & +\, mA & +\, m\cdot\frac{m-1}{2}\,A & \\ & +\ B & +\, mB & \\ & & +\ C & \end{array}$$

de laquelle on tireroit $A = -m$, $B = m\,.\,\frac{m+1}{2}$, $C = -m\,.\,\frac{m+1}{2}\,.\,\frac{m+2}{3}$; $D = m\,.\,\frac{m+1}{2}\,.\,\frac{m+2}{3}\,.\,\frac{m+3}{4}$, &c. Donc quelque soit m, $(1+x)^m = 1 + mx + m\,.\,\frac{m-1}{2}\,x^2 + m\,.\,\frac{m-1}{2}\,.\,\frac{m-2}{3}\,x^3 + \text{\&c.}$

Je puis regarder cette série comme convergente, car je suis toujours le maître de prendre pour x une quantité fractionnaire : en effet la fonction à développer étant $(p+q)^m$, où p est supposé plus grand que q, je puis la changer en celle-ci $p^m\left(1+\frac{q}{p}\right)^m = p^m\left(1 + m\frac{q}{p} + m\,.\,\frac{m-1}{2}\left(\frac{q}{p}\right)^2 + \text{\&c.}\right)$, série d'autant plus convergente que p sera plus grand que q. Ainsi le théorême doit être énoncé de la manière suivante : m étant un nombre quelconque, & p plus grand que q, la puissance m de $p+q$ ou

$$(p+q)^m = p^m + mp^{m-1}q + m\,.\,\frac{m-1}{2}\,p^{m-2}q^2 + m\,.\,\frac{m-1}{2}\,.\,\frac{m-2}{3}\,p^{m-3}q^3 + \text{\&c.}$$

Lorsque m est un nombre entier positif, cette série se termine ; mais si l'on fait $q = \frac{-pt}{p+t}$, d'où $p+q = \frac{p^2}{p+t}$ & $(p+q)^m = p^{2m}(p+t)^{-m}$, on trouve, en mettant dans la série pour q sa valeur & divisant par p^{2m}, $(p+t)^{-m} = p^{-m}\left[1 - m\frac{t}{p+t} + m\,.\,\frac{m-1}{2}\left(\frac{t}{p+t}\right)^2 - \text{\&c.}\right]$, ou, faisant $-m = \mu$, $(p+t)^{\mu} = p^{\mu}\left[1 + \mu\frac{t}{p+t} + \mu\,.\,\frac{\mu+1}{2}\left(\frac{t}{p+t}\right)^2 + \mu\,.\,\frac{\mu+1}{2}\,.\,\frac{\mu+2}{3}\left(\frac{t}{p+t}\right)^3 + \text{\&c.}\right]$; autre série qui se termine lorsque μ est un nombre entier négatif.

(93). Toute série qui est le développement d'une fonction doit être convergente, ou elle n'exprime rien. Si elle est ascendante & que x soit plus grand que 1, elle s'éloigne toujours de la vraie valeur de la fonction ; ce sera la même chose, si x étant moindre que 1 ou une quantité fractionnaire, la série est *descendante* ; on appelle ainsi les séries dans lesquelles les exposans de x vont en décroissant. On doit donc énoncer de la manière suivante le problême de développer une fonction en série : trouver la série ascendante & la série descendante qui sont les valeurs de la fonction, l'une pour le cas de x moindre que 1, l'autre pour celui

de x plus grand que 1. Je n'ai donc satisfait qu'à une partie du problême, en ne donnant pour quotient de $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$ que cette seule série $1+8x+27x^2+64x^3+$ &c. qui ne peut être convergente dans le cas de x plus grand que 1; dans ce cas, c'est $\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{27}{x^4}+\frac{64}{x^5}+$ &c. qui est le quotient demandé.

On demande les séries ascendante & descendante qui conviennent à la fraction $\frac{h+ix}{m+nx+px^2}$. Je les représente l'une & l'autre par $Ax^{\lambda}+Bx^{\lambda+\mu}+Cx^{\lambda+2\mu}+Dx^{\lambda+3\mu}+$ &c. dans laquelle les exposans comme les co-efficiens sont indéterminés. En multipliant par le dénominateur de la fraction, j'ai l'équation identique

$$h+ix=mAx^{\lambda}+mBx^{\lambda+\mu}+\&c.+nAx^{\lambda+1}+nBx^{\lambda+\mu+1}+\&c.+pAx^{\lambda+2}+pBx^{\lambda+\mu+2}+\&c.$$

qu'il faut ordonner relativement aux puissances égales de x; & comme λ & μ sont indéterminées, on pourra le faire de plusieurs manières. Je l'ordonne d'abord comme il suit

$$\begin{array}{llll} mAx^{\lambda} & +mBx^{\lambda+\mu} & +mCx^{\lambda+2\mu} & +mDx^{\lambda+3\mu}+\&c.=0; \\ -h & +nAx^{\lambda+1} & +nBx^{\lambda+\mu+1} & +nCx^{\lambda+2\mu+1} \\ & -ix & +pAx^{\lambda+2} & +pBx^{\lambda+\mu+2} \end{array}$$

ce qui exige nécessairement que $\lambda=0$, $\lambda+\mu=\lambda+1=1$ & ainsi des autres. Donc $\mu=1$; & on aura pour la série ascendante

$A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ &c. où $A=\frac{h}{m}$, $B=\frac{i}{m}-\frac{hn}{m^2}$,

$C=\frac{hn^2}{m^3}-\frac{in}{m^2}-\frac{hp}{m^2}$, $D=\frac{2hnp}{m^3}+\frac{in^2}{m^3}-\frac{hn^3}{m^4}-\frac{ip}{m^2}$, &c.

En l'ordonnant de cette autre manière

$$\begin{array}{llll} pAx^{\lambda+2} & +pBx^{\lambda+\mu+2} & +pCx^{\lambda+2\mu+2} & +pDx^{\lambda+3\mu+2}+\&c.=0; \\ -ix & +nAx^{\lambda+1} & +nBx^{\lambda+\mu+1} & +nCx^{\lambda+2\mu+1} \\ & -h & +mAx^{\lambda} & +mBx^{\lambda+\mu} \end{array}$$

on trouve $\lambda+2=1$, $\lambda+\mu+2=\lambda+1=0$, & ainsi des autres. On en tire $\lambda=-1$, $\mu=-1$, & pour série descendante

$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+$ &c. dans laquelle $A=\frac{i}{p}$, $B=\frac{h}{p}-\frac{in}{p^2}$,

$C=\frac{in^2}{p^3}-\frac{nh}{p^2}-\frac{im}{p^2}$, $D=\frac{2imn}{p^3}+\frac{hn^2}{p^3}-\frac{in^3}{p^4}-\frac{hm}{p^2}$, &c.

Il n'y a pas d'autre arrangement possible, c'est-à-dire, qu'il n'y a que ces deux séries qui puissent être prises pour le quotient de la fraction proposée.

(94. Il s'agit de trouver toutes les séries qui sont les racines de l'équation $my^3 - x^3y - mx^3 = 0$. Je suppose

$$y = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+\mu} + Cx^{\lambda+2\mu} + Dx^{\lambda+3\mu} + \&c.$$

& les substitutions faites, j'ai l'équation identique

$mA^3x^{3\lambda} + 3mA^2Bx^{3\lambda+\mu} + \&c. - Ax^{\lambda+3} - Bx^{\lambda+\mu+3} - \&c. - mx^3 = 0$, qu'il faut ordonner relativement aux puissances égales de x. A cause des exposans indéterminés, je puis faire différentes hypothèses. Premiérement on peut arranger cette équation comme il suit :

$$\begin{array}{llll} mA^3x^{3\lambda} & +3mA^2Bx^{3\lambda+\mu} & +3mA^2Cx^{3\lambda+2\mu} & + \\ & & +3mAB^2 & + \\ & & & + \\ -mx^3 & -\quad Ax^{\lambda+3} & -\quad Bx^{\lambda+\mu+3} & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3mA^2Dx^{3\lambda+3\mu} & +3mA^2Ex^{3\lambda+4\mu} + \&c. = 0; \\ 6mABC & +6mABD \\ mB^3 & +3mAC^2 \\ & +3mB^2C \\ Cx^{\lambda+2\mu+3} \quad - & Dx^{\lambda+3\mu+3} \end{array}$$

d'où l'on tire $3\lambda = 3$ ou $\lambda = 1$, $3\lambda + \mu = \lambda + 3$ ou $\mu = 1$, lesquelles valeurs de λ & μ satisfont aux équations $3\lambda + 2\mu = \lambda + \mu + 3$, $3\lambda + 3\mu = \lambda + 2\mu + 3$, &c. autrement l'arrangement ne pourroit avoir lieu. On trouve ensuite $A^3 - 1 = 0$ ou $A = 1$, $3mA^2B - A = 0$, ou

$$B = \frac{1}{3m},\ C = 0,\ D = \frac{-1}{81m^3},\ E = \frac{1}{243m^4},\ \&c.$$

Le second arrangement que voici

$$\begin{array}{llll} Ax^{\lambda+3} + & Bx^{\lambda+\mu+3} + & Cx^{\lambda+2\mu+3} + & Dx^{\lambda+3\mu+3} \\ +mx^3 & -mA^3x^{3\lambda} & -3mA^2Bx^{3\lambda+\mu} & -3mA^2Cx^{3\lambda+2\mu} \\ & & & -3mAB^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \quad Ex^{\lambda+4\mu+3} + \&c. = 0 \\ -3mA^2Dx^{3\lambda+3\mu} \\ -6mABC \\ -\quad mB^3 \end{array}$$

donne $\lambda = 0$, $\mu = -3$; & $A = -m$, $B = -m^4$, $C = -3m^7$, $D = -12m^{10}$, $E = -55m^{13}$, &c.

Il y a une troisième manière d'ordonner cette équation, savoir

$$\begin{array}{llll} mA^3x^{3\lambda} & +3mA^2Bx^{3\lambda+\mu} & +3mA^2Cx^{3\lambda+2\mu} & + \\ & & +3mAB^2 & + \\ & & & + \\ -Ax^{\lambda+3}- & Bx^{\lambda+\mu+3}- & Cx^{\lambda+2\mu+3} & - \\ - & mx^3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3mA^2D\,.\,x^{3\lambda+3\mu} & +3mA^2E\,x^{3\lambda+4\mu}+\&c.=0. \\ 6mABC & +6mABD \\ mB^3 & +3mAC^2 \\ & +3mB^2C \\ Dx^{\lambda+3\mu+3}- & Ex^{\lambda+4\mu+3}. \end{array}$$

On tire de ce nouvel arrangement $3\lambda=\lambda+3$, ou $\lambda=\frac{3}{2}$, $3\lambda+\mu=\lambda+\mu+3=3$, ou $\mu=-\frac{3}{2}$; puis $mA^2=1$, ou $A=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}$, $B=\frac{m}{2}$, $C=\mp\frac{3m^3}{8\sqrt{m}}$, $D=\frac{m^4}{2}$, $E=\mp\frac{105m^6}{128\sqrt{m}}$, &c.

On a donc ces quatre séries

$$x+\frac{x^2}{3m}-\frac{x^4}{81m^3}+\frac{x^5}{243m^4}\ \&c.$$

$$-m-\frac{m^4}{x^3}-\frac{3m^7}{x^6}-\frac{12m^{10}}{x^9}+\frac{55m^{13}}{x^{12}}\ \&c.$$

$$m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{m}{2}-\frac{3}{8}m^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{m^4}{2}x^{-3}-\frac{105}{128}m^{\frac{11}{2}}x^{-\frac{9}{2}}\ \&c.$$

$$-m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{m}{2}+\frac{3}{8}m^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{m^4}{2}x^{-3}+\frac{105}{128}m^{\frac{11}{2}}x^{-\frac{9}{2}}\ \&c.$$

qui sont autant de valeurs de y tirées de l'équation $my^3-x^3y-mx^3=0$. Je me propose encore de trouver toutes les séries qui sont les valeurs de y dans l'équation $y^3-a^2y+axy-x^3=0$. Soit toujours $y=Ax^\lambda+Bx^{\lambda+\mu}+$ &c. on aura l'équation identique

$$A^3x^{3\lambda}+3A^2Bx^{3\lambda+\mu}+\&c.-a^2Ax^\lambda-a^2Bx^{\lambda+\mu}-\&c.-aAx^{\lambda+1}-aBx^{\lambda+\mu+1}-\&c.-x^3=0.$$

Ordonnant cette équation comme il suit

$$\begin{array}{lllll} A^3x^{3\lambda} & +3A^2Bx^{3\lambda+\mu} & +3A^2Cx^{3\lambda+2\mu} & +3A^2D\,x^{3\lambda+3\mu} & \\ & & +3AB^2 & +6ABC & \\ & & & +B^3 & \\ -x^3 & +aAx^{\lambda+1} & +aBx^{\lambda+\mu+1} & +aCx^{\lambda+2\mu+1} & \\ & & -a^2Ax^\lambda & -a^2Bx^{\lambda+\mu} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +\ 3A^2E\,x^{3\lambda+4\mu} + \&c. = 0, \\ +\ 6ABD \\ +\ 3AC^2 \\ +\ 3B^2C \\ +\ AD\,x^{\lambda+3\mu+1} \\ -\ a^2C\,x^{\lambda+2\mu} \end{array}$$

on a $3\lambda = 3$ ou $\lambda = 1$, $3\lambda + \mu = \lambda + 1$, ou $\mu = -1$; & comme ces valeurs de λ & de μ satisfont aux équations $3\lambda + 2\mu = \lambda + \mu + 1 = \lambda$, & par conséquent aux suivantes, il est clair que cet arrangement peut avoir lieu. On en tire

$$A^3 - 1 = 0, \text{ ou } A = 1,\ B = -\frac{a}{3},\ C = \frac{a^2}{3},\ D = \frac{a^3}{81},\ E = -\frac{8a^4}{243}.$$

En ordonnant la même équation de cette autre manière

$$\begin{array}{l} a^2Ax^{\lambda} + a^2Bx^{\lambda+\mu} + \ldots\ldots + a^2Gx^{\lambda+6\mu} \\ +\ x^3 - aAx^{\lambda+1} - \ldots\ldots - aFx^{\lambda+5\mu+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - A^3x^{3\lambda} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +\ a^2Hx^{\lambda+7\mu} + \&c. = 0, \\ -\ aGx^{\lambda+6\mu+1} \\ -\ 3A^2Bx^{3\lambda+\mu} \end{array}$$

on a $\lambda = 3$, $\lambda + \mu = \lambda + 1$, ... $\lambda + 6\mu = \lambda + 5\mu + 1 = 3\lambda$; $\lambda + 7\mu = \lambda + 6\mu + 1 = 3\lambda + \mu$, &c. auxquelles on satisfait en prenant $\lambda = 3$, $\mu = 1$; ce second arrangement peut donc avoir lieu, & on en tire

$$A = \frac{-1}{a^2},\ B = \frac{-1}{a^3},\ C = \frac{-1}{a^4},\ D = \frac{-1}{a^5},\ E = \frac{-1}{a^6},\ F = \frac{-1}{a^7},\ G = \frac{-2}{a^8},$$

$$H = \frac{-5}{a^9}, \&c.$$

La même équation susceptible de ce troisième arrangement

$$\begin{array}{llll} A^3x^{3\lambda} & +3A^2Bx^{3\lambda+\mu} & +3A^2Cx^{3\lambda+2\mu} & + \\ & & +3AB^2 & + \\ & & & + \\ -a^2Ax^{\lambda} & -a^2Bx^{\lambda+\mu} & -a^2Cx^{\lambda+2\mu} & - \\ & +aAx^{\lambda+1} & +aBx^{\lambda+\mu+1} & + \\ & & & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3A^2D\,x^{3\lambda+3\mu} & +3A^2E\,x^{3\lambda+4\mu} + \&c. = 0; \\ 6ABC & +6ABD \\ \quad B^3 & +3AC^2 \\ & +3B^2C \\ a^2D\,x^{\lambda+3\mu} & -a^2E\,x^{\lambda+4\mu} \\ aC\,x^{\lambda+2\mu+1} & +aD\,x^{\lambda+3\mu+1} \\ \quad x^3 & \end{array}$$

puiſque ces valeurs $\lambda = 0$ & $\mu = 1$, tirées des équations $3\lambda = \lambda$, $3\lambda + \mu = \lambda + \mu = \lambda + 1$, ſatisfont aux équations $3\lambda + 2\mu = \lambda + 2\mu = \lambda + \mu + 1$, $3\lambda + 3\mu = \lambda + 3\mu = \lambda + 2\mu + 1 = 3$, &c. On tire de cet arrangement $A^2 = a^2$ ou $A = \pm a$, $B = \mp \frac{1}{2}$, $C = \mp \frac{1}{8a}$, $D = \frac{7}{16a^2}$ & $D = \frac{9}{16a^2}$, $E = \frac{59}{128a^3}$ & $E = \frac{69}{128a^3}$, &c.

On a donc les quatre ſéries

$$x - \frac{a}{3} + \frac{a^2}{3x} + \frac{a^1}{81x^2} - \frac{8a^4}{243x^3} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3} - \ldots\ldots - \frac{2x^9}{a^8} - \frac{5x^{10}}{a^9} \text{ \&c.}$$

$$a - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8a} + \frac{7x^3}{16a^2} + \frac{59x^4}{128a^3} \text{ \&c.}$$

$$-a + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8a} + \frac{9x^3}{16a^2} + \frac{69x^4}{128a^3} \text{ \&c.}$$

dont la première ſeule eſt deſcendante.

Des ſéries récurrentes.

(95). Moivre appelle ſuite récurrente une ſuite dont un co-efficient quelconque eſt égal à un certain nombre de co-efficiens précédens multipliés chacun par une quantité conſtante; & il a donné le nom d'échelle de relation à l'aſſemblage des quantités conſtantes qui ſervent à former la ſuite. Ainſi (nº. 93) la ſuite $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. où les co-efficiens A, B, C, D, &c. ont entr'eux des relations exprimées par les équations $mA - h = 0$, $mB + nA - i = 0$, $mC + nB + pA = 0$, $mD + nC + pB = 0$, &c. eſt une ſuite récurrente qui a pour échelle de relation $-\frac{n}{m} - \frac{p}{m}$. Cette ſuite eſt le quotient de la diviſion du numérateur de la fraction rationnelle $\frac{h + ix}{m + nx + px^2}$ par ſon dénominateur ; il en ſera de même de toute autre ſérie qui ſera le développement d'une fraction rationnelle quelconque. Cela poſé, on demande le terme général d'une ſuite récurrente quelconque repréſentée par

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{\&c.?}$$

La fraction rationnelle dont elle provient peut être décompoſée en fractions ſimples dont chacune donnera une ſuite récurrente. Si nous repréſentons ces ſuites par $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ &c., $a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 +$ &c., $a'' + b''x + c''x^2 + d''x^3 + e''x^4 +$ &c. &c.

nous

nous aurons

$A = a + a' + a'' + \&c., B = b + b' + b'' + \&c., C = c + c' + c'' + \&c.;$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots T = t + t' + t'' + \&c.\ \&c.;$

c'eſt-à-dire, qu'un terme μ quelconque de la ſuite propoſée eſt égal à la ſomme de tous les termes μ des ſuites partielles. Par exemple, la ſuite $1 - 6x + 12x^2 - 48x^3 + 120x^4 - \&c.$ eſt développée de la fraction rationnelle $\frac{1-5x}{1+x-6x^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{8}{1+3x} - \frac{3}{1-2x}\right)$; or $\frac{1}{1+3x} = 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \&c.$, dont le co-efficient du terme $\mu = (\pm 3)^{\mu-1}$, $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \&c.$ dont le co-efficient du terme $\mu = 2^{\mu-1}$; donc ſi T eſt le co-efficient du terme μ de la ſuite propoſée, on doit avoir

$$T = \pm \frac{8}{5} 3^{\mu-1} - \frac{3}{5} 2^{\mu-1};$$

on donnera au premier terme de la valeur de T le ſigne $-$, lorſque μ ſera pair, & le ſigne $+$ lorſqu'il ſera impair. Le problême conſiſte donc 1°. à trouver la fraction rationnelle dont la ſuite propoſée eſt développée; 2°. à décompoſer cette fraction rationnelle en ſes fractions ſimples, comme nous l'avons enſeigné plus haut; 3°. à développer en ſéries ces fractions ſimples; 4°. à chercher le terme général de chacune de ces ſéries : la ſomme de tous ces termes ſera le terme général de la ſuite propoſée.

(96). Toute fraction binome réelle peut être repréſentée par $\frac{h}{1-ix}$, qui développée en ſérie donne $h + hix + hi^2x^2 + \&c.$ qui a pour terme général $h(ix)^{\mu-1}$. On trouvera auſſi facilement le terme général de la ſérie qui ſera développée de $\frac{h}{(1-ix)^n}$; car on a $(1 + ix + i^2x^2 + \&c.)^n = 1 + nix + \left(n + n \cdot \frac{n-1}{2}\right) i^2x^2 + \left(n + n \cdot \frac{n-1}{2} 2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\right) i^3x^3 + \&c. = 1 + nix + n \cdot \frac{n+1}{2} i^2x^2 + n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} i^3x^3 + \&c.$; donc la ſérie dont il s'agit a pour terme général $hn \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \ldots \frac{n+\mu-2}{\mu-1} (ix)^{\mu-1}$. Nous prendrons pour exemple la ſuite $1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + \&c.$ qui provient de $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4} = \frac{6}{(1-x)^4} - \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}$. Or $\frac{6}{(1-x)^4} = 6(1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \&c.)$, qui a pour

terme général $\mu\ (\mu+1)\ (\mu+2)\ x^{\mu-1}$; $\frac{6}{(1-x)^3} = 6\ (1+3x+6x^2+10x^3+\&c.)$, qui a pour terme général $3\mu\ (\mu+1)\ x^{\mu-1}$; $\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\&c.$, qui a pour terme général $\mu x^{\mu-1}$; donc $1+8x+27x^2+64x^3+125x^4+\&c.$ a pour terme général $(\mu\,.\,\overline{\mu+1}\,.\,\overline{\mu+2}-3\mu\,.\,\overline{\mu+1}+\mu)\ x^{\mu-1} = \mu^3 x^{\mu-1}$, ce qui d'ailleurs eſt évident.

(97). On demande le terme général de la ſérie qui proviendroit du développement de la fraction trinome $\frac{m+nx}{1-2qx\cos.\zeta+q^2x^2}$? En faiſant, pour abréger, $\cos.\zeta+\sin.\zeta\sqrt{-1}=K$, $\cos.\zeta-\sin.\zeta\sqrt{-1}=K'$, on trouve

$$\frac{m+nx}{1-2qx\cos.\zeta+q^2x^2} = \frac{-1}{2q\sin.\zeta\sqrt{-1}}\left[\frac{mq+nK}{K-qx}-\frac{mq+nK'}{K'-qx}\right].$$

Or les ſéries qui proviendroient des deux fractions binomes $\frac{mq+nK}{K-qx}$ & $\frac{mq+nK'}{K'-qx}$ auroient pour termes généraux

$$\frac{mq+nK}{K}\left(\frac{qx}{K}\right)^{\mu-1} \ \&\ \frac{mq+nK'}{K'}\left(\frac{qx}{K'}\right)^{\mu-1};$$

on a donc pour le terme général qu'il s'agit de trouver

$$\frac{-1}{2q\sqrt{-1}\sin.\zeta}\left[\frac{mq+nK}{K^{\mu}}-\frac{mq+nK'}{K'^{\mu}}\right](qx)^{\mu-1},$$

qui devient, à cauſe de $KK'=1$, $K^{\mu}-K'^{\mu}=2\sqrt{-1}.\sin.\mu\zeta$, $K^{\mu-1}-K'^{\mu-1}=2\sqrt{-1}\sin.(\mu-1)\zeta$, qui devient, dis-je,

$$\frac{mq\sin.\mu\zeta+n\sin.(\mu-1)\zeta}{q\sin.\zeta}(qx)^{\mu-1}.$$

Occupons-nous maintenant de la recherche du terme général de la ſérie qui proviendroit du développement de $\frac{m+nx}{(1-2qx\cos.\zeta+q^2x^2)^{\lambda}}$.

(98). Cette fraction étant décompoſée en ſes fractions ſimples, donne

$$\frac{A}{(K-qx)^{\lambda}}+\frac{B}{(K-qx)^{\lambda-1}}+\ldots\ldots+\frac{H}{K-qx}+$$
$$\frac{A'}{(K'-qx)^{\lambda}}+\frac{B'}{(K'-qx)^{\lambda-1}}+\ldots\ldots+\frac{H'}{K'-qx}:$$

Or, la ſérie qui proviendroit du développement de

$\frac{A}{(K - qx)^\lambda} + \frac{A'}{(K' - qx)^\lambda}$ auroit pour terme général

$\lambda \cdot \frac{\lambda + 1}{2} \cdot \frac{\lambda + 2}{3} \cdot \frac{\lambda + 3}{4} \ldots\ldots\ldots \frac{\lambda + \mu - 2}{\mu - 1} (qx)^{\mu - 1}$ multiplié par

$A K^{-\lambda - \mu + 1} + A'K'^{-\lambda - \mu + 1} = A K'^{\lambda + \mu - 1} + A'K^{\lambda + \mu - 1}$,

à cause de $KK' = 1$; donc la série qui sera développée de $\frac{m + nx}{(1 - 2qx \cos. \zeta + q^2x^2)^\lambda}$ aura pour terme général

$$\Big[(AK'^{\lambda + \mu - 1} + A'K^{\lambda + \mu - 1})(\lambda \cdot \frac{\lambda + 1}{2} \cdot \frac{\lambda + 2}{3} \ldots\ldots \frac{\lambda + \mu - 2}{\mu - 1}) +$$
$$(BK'^{\lambda + \mu - 2} + B'K^{\lambda + \mu - 2})(\lambda - 1 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\lambda + 1}{3} \ldots\ldots \frac{\lambda + \mu - 3}{\mu - 1}) +$$
$$(CK'^{\lambda + \mu - 3} + C'K^{\lambda + \mu - 3})(\lambda - 2 \cdot \frac{\lambda - 1}{2} \cdot \frac{\lambda}{3} \ldots\ldots \frac{\lambda + \mu - 4}{\mu - 1}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + HK'^\mu + H'K^\mu \Big](qx)^{\mu - 1}.$$

Lorsque $\lambda = 2$, cette quantité devient

$$\Big[(AK'^{\mu + 1} + A'K^{\mu + 1})\mu + BK'^\mu + B'K^\mu\Big](qx)^{\mu - 1}.$$

Ainsi $\frac{m + nx}{(1 - 2qx \cos. \zeta + q^2x^2)^2} = \frac{A + BK - B . qx}{(K - qx)^2} + \frac{A' + B'K' - B'.qx}{(K' - qx)^2}$, & réduisant au même dénominateur, on aura une équation identique de laquelle il sera facile de tirer, $B' = -B$, $A + A' = B(K - K')$, $2(AK' + A'K) - B(K^2 - K'^2) = -n$, $AK'^2 + A'K^2 - B(K - K') = m$; partant

$A = \frac{m + nK}{(K - K')^2}$, $A' = \frac{m + nK'}{(K - K')^2}$, $B = \frac{A + A'}{K - K'}$, $B' = -B$.

On trouvera donc dans le cas de $\lambda = 2$, $AK'^{\mu + 1} + A'K^{\mu + 1} = \frac{m \cos. (\mu - 1)\zeta + n \cos. \mu\zeta}{-2 \sin. \zeta^2}$, $BK'^\mu + B'K^\mu = \frac{m \sin. \mu\zeta + n \cos. \zeta \sin. \mu\zeta}{2 \sin. \zeta^3}$,

& pour le terme général dont il s'agit

$$\Big[-\mu \cdot \frac{m \cos. (\mu + 1)\zeta + n \cos. \mu\zeta}{2 \sin. \zeta^2} + \frac{m + n \cos. \zeta}{2 \sin \zeta^3} \sin. \mu\zeta\Big](qx)^{\mu - 1}.$$

(99). Il ne reste plus à résoudre que cette partie du problême : étant donné la série récurrente, trouver la fraction rationnelle dont elle est développée ? La série récurrente étant représentée par $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. si la relation entre les co-efficiens est donnée par l'équation $mT + nS + pR + qQ + rP +$ &c. $= 0$ la fraction dont elle est développée aura pour dénominateur $m + nx + px^2 + qx^3 + rx^4 +$ &c. ; & si on représente son numérateur par $a + bx + cx^2 + dx^3 +$ &c.

on aura en outre
$a = mA$, $b = nA + mB$, $C = pA + nB + mC$, $d = qA + pB + nC + mD$, &c.
Je prendrai pour exemple la férie $1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + 125x^4 +$ &c. pour laquelle on a $T - 4S + 6R - 4Q + P = 0$. Alors le dénominateur de la fraction eft $1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = (1 - x)^4$; on trouve enfuite $a = 1$, $b = -4 + 8 = 4$, $C = 6 - 32 + 27 = 1$, $d = -4 + 48 - 108 + 64 = 0$, & par conféquent $1 + 4x + x^2$ pour numérateur de la fraction dont $1 + 8x + 27x^2 +$ &c. a été développée. Prenons pour fecond exemple la férie $1 - 6x + 12x^2 - 48x^3 + 120x^4 -$ &c. relativement à laquelle on a $T + S - 6R = 0$. Le dénominateur de la fraction fera $1 + x - 6x^2$; on trouvera enfuite $a = 1$, $b = -6 + 1 = -5$, $c = -6 - 6 + 12 = 0$, & $\frac{1 - 5x}{1 + x - 6x^2}$ pour la fraction dont la férie propofée a été développée.

De la manière de rendre rationnelles les fonctions qui renferment des incommenfurables.

(100). On propofe de rendre rationnelle la formule $\sqrt{a + bx + cx^2}$. Premiérement fi les facteurs de $a + bx + cx^2$ font inégaux, mais réels & repréfentés par $e + fx$, $g + hx$; on fera $(e + fx)(g + hx) = (e + fx)^2 z^2$; d'où il fera facile de tirer $x = \frac{ez^2 - g}{h - fz^2}$ & $\sqrt{a + bx + cx^2} = \frac{(he - fg)z}{h - fz^2}$.
Secondement fi les facteurs font imaginaires, on donnera au trinome $a + bx + cx^2$ la forme fuivante $p^2 + 2pqx \cos. \zeta + q^2 x^2$; & fuppofant cette dernière quantité égale à $(pz + qx)^2$, on aura $x = \frac{p(1 - z^2)}{2q(z - \cos. \zeta)}$; partant $\sqrt{a + bx + cx^2} = \frac{p(z^2 + 1) - 2pz \cos. \zeta}{2(z - \cos. \zeta)}$. Il eft clair que par les mêmes fubftitutions on rendra rationnelle toute formule qui ne renfermera que des quantités radicales de cette forme $\sqrt{a + bx + cx^2}$. Ainfi on pourra toujours rendre rationnelle la formule $K z^{ir} (n + pz^r + qz^{2r})^{\frac{s}{2}}$, fi i & s font des nombres entiers pofitifs ou négatifs. Car en faifant $z^r = x$, cette formule devient $K x^i (n + px + qx^2)^{\frac{s}{2}}$, qui ne peut renfermer d'autre quantité radicale que $\sqrt{n + px + qx^2}$.

(101). On demande les cas où il eft poffible de rendre rationnelle la formule $K x^m (p + qx^r)^s$? Si s eft un nombre entier quelconque ou zéro, il fuffira de fuppofer $x = y^\mu$, μ étant le commun dénominateur des deux expofans m & r.
Mais

Mais si s est un nombre fractionnaire $\frac{s}{t}$, & qu'il soit question de rendre rationnelle la formule $Kx^m(p+qx^r)^{\frac{s}{t}}$; on fera $p+qx^r=u^t$, d'où $(p+qx^r)^{\frac{s}{t}}=u^s$, $x=\left(\frac{u^t-p}{q}\right)^{\frac{1}{r}}$, $Kx^m(p+qx^r)^{\frac{s}{t}}=$ $Ku^s\left(\frac{u^t-p}{q}\right)^{\frac{m}{r}}$, qui sera rationnelle toutes les fois que $\frac{m}{r}$ sera un nombre entier quelconque ou zéro. Je donne à la même formule la forme que voici $Kx^{m+\frac{sr}{t}}(px^{-r}+q)^{\frac{s}{t}}$, & je fais $px^{-r}+q=u^t$, d'où $(px^{-r}+q)^{\frac{s}{t}}=u^s$, $x=\left(\frac{p}{u^t-q}\right)^{\frac{1}{r}}$, $Kx^{m+\frac{sr}{t}}(px^{-r}+q)^{\frac{s}{t}}=$ $Ku^s\left(\frac{p}{u^t-q}\right)^{\frac{m}{r}+\frac{s}{t}}$, qui est rationnelle si $\frac{m}{r}+\frac{s}{t}$ est un nombre entier quelconque ou zéro. Voilà donc deux substitutions propres à rendre rationnelle la formule $Kx^m(p+qx^r)^{\frac{s}{t}}$; lorsque $\frac{m}{r}$ sera un nombre entier quelconque ou zéro, on fera $p+qx^r=u^t$; ainsi la formule étant $Kx^6\sqrt[3]{p+qx^3}$, on fera $p+qx^3=u^3$, d'où $\sqrt[3]{p+qx^3}=u$, $x=\sqrt[3]{\frac{u^3-p}{q}}$ & $Kx^6\sqrt[3]{p+qx^3}=Ku\left(\frac{u^3-p}{q}\right)^2$, qui est rationnelle. Mais si la formule est $Kx^5\sqrt{p+qx^2}$, on fera $p+qx^2=u^2x^2$, d'où $\sqrt{p+qx^2}=ux$; $x^2=\frac{p}{u^2-q}$ & $Kx^5\sqrt{p+qx^2}=Kx^6.u=Ku\left(\frac{p}{u^2-q}\right)^3$ qui est rationnelle.

(102). La formule $Kx^m\left(\frac{p+qx^r}{p'+q'x^r}\right)^{\frac{s}{t}}$ étant proposée, on fera $\frac{p+qx^r}{p'+q'x^r}=u^t$, d'où $\left(\frac{p+qx^r}{p'+q'x^r}\right)^{\frac{s}{t}}=u^s$, $x=\left(\frac{p'u^t-p}{q-q'u^t}\right)^{\frac{1}{r}}$, & $Kx^m\left(\frac{p+qx^r}{p'+q'x^r}\right)^{\frac{s}{t}}=Ku^s\left(\frac{p'u^t-p}{q-q'u^t}\right)^{\frac{m}{r}}$, qui sera rationnelle toutes les fois qu'on aura pour $\frac{m}{r}$ un nombre entier quelconque ou zéro. Parmi les substitutions propres à rendre rationnelle une fonction qui renferme des incommensurables, il y en a qui conduisent à des résultats plus simples les uns que les autres.

Si par exemple je suppose $\sqrt{p+qx^2} = u + x\sqrt{q}$, d'où $x = \frac{p-u^2}{2u\sqrt{q}}$; $\sqrt{p+qx^2} = \frac{p+u^2}{2u}$, je trouve $Kx^5\sqrt{p+qx^2} = K\frac{p+u^2}{2u}\left(\frac{p-u^2}{2u\sqrt{q}}\right)^5$. Mais on ne peut rien proposer de très-général sur ces sortes de transformations.

Des fonctions qui renferment plusieurs variables.

(103). Les plus simples de ces fonctions sont les fonctions homogènes ; on appelle ainsi celles dans lesquelles la somme des dimensions des quantités variables est la même dans tous les termes. La fonction entière $x^3 + ax^2y + bxy^2$ est homogène & le nombre des dimensions de chaque terme est 3 : celle-ci $\frac{x^3 + ax^2y + by^2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{xy+y^2}}$ est aussi homogène ; & le nombre des dimensions est 2, qu'on trouve en ôtant du nombre des dimensions du numérateur le nombre des dimensions du dénominateur. Lorsque le nombre des dimensions du numérateur est égal au nombre des dimensions du dénominateur, la fonction est dite être de dimension nulle, telle est celle ci $\frac{gx^2+hxy}{xy+by^2}$. Si le nombre des dimensions du numérateur est moindre que le nombre des dimensions du dénominateur, le nombre des dimensions de la fonction est négatif; $\frac{\sqrt{x+y}}{x^3y^3}$ est une fonction homogène dont le nombre des dimensions est $\frac{-11}{2}$. Une proposition qui n'a besoin que d'être énoncée pour être comprise ; c'est que si dans une fonction homogène de deux variables y & x, de dimension quelconque n, on fait $\frac{y}{x} = q$, on la changera en une fonction de cette forme Qx^n, Q étant une fonction de q & des constantes qui entrent dans la proposée Par cette substitution, on changera les quatre fonctions homogènes, que nous venons de prendre pour exemple, en celles-ci $(1+aq+bq^2)x^3$, $\frac{1+aq+bq^2\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{q+q^2}}x^2$, $\frac{g+hq}{q+bq^2}x^0$, $\frac{\sqrt{1+q}}{q^3}x^{-\frac{11}{2}}$.

(104). Il suit delà qu'une fraction rationnelle homogène qui ne comprendra que deux variables, telle que $\frac{ax^\lambda + bx^{\lambda-1}y + cx^{\lambda-2}y^2 + \ldots + hy^\lambda}{mx^\mu + nx^{\mu-1}y + px^{\mu-2}y^2 + \ldots + uy^\mu}$, pourra être résolue en ses fractions simples ; car en faisant $y = qx$, on la change en celle-ci $\frac{a+bq+cq^2+\ldots\ldots+hq^\lambda}{m+nq+pq^2+\ldots\ldots+uq^\mu}x^{\lambda-\mu}$.

Mais lorsqu'elle renfermera plus de deux variables, on ne pourra pas généralement résoudre son dénominateur en facteurs du premier degré. On propose $ay^4 + bx^4 + cu^4 + ey^2x^2 + fy^2u^2 + gx^2u^2$; si l'un des facteurs est $my + nx + pu$, en faisant $y = -\frac{nx + pu}{m}$ dans la proposée, on la rendra nulle & on aura l'équation identique

$$\begin{array}{lllll} an^4 . x^4 & + 4an^3p . x^3u & + 6an^2p^2 . x^2u^2 & + 4anp^3 . xu^3 & + ap^4 . u^4 = 0; \\ + bm^4 & + 2em^2np & + em^2p^2 & + 2fm^2np & + cm^4 \\ + em^2n^2 & & + fm^2n^2 & & + fm^2p^2 \\ & & + gm^4 & & \end{array}$$

de laquelle on tire $an^4 + bm^4 + em^2n^2 = 0$, $ap^4 + cm^4 + fm^2p^2 = 0$; $2an^2 + em^2 = 0$, $2ap^2 + fm^2 = 0$, $2an^2p^2 + gm^4 = 0$; & par conséquent

$$g = \frac{-ef}{2a},\ b = \frac{e^2}{4a},\ c = \frac{f^2}{4a},\ \frac{n^2}{m^2} = \frac{-e}{2a},\ \frac{p^2}{m^2} = \frac{-f}{2a}.$$

Il y a donc des conditions entre a, b, c, e, f, g pour que la proposée puisse être résolue en facteurs du premier degré, & il résulte que

$$a^2y^4 + \frac{e^2x^4}{4} + \frac{f^2u^4}{4} + aey^2x^2 + afy^2u^2 - \frac{ef}{2}x^2u^2$$

a pour facteurs du premier degré

$$y\sqrt{a} + \frac{x\sqrt{-e}}{\sqrt{2}} + \frac{u\sqrt{-f}}{\sqrt{2}},\ y\sqrt{a} - \frac{x\sqrt{-e}}{\sqrt{2}} - \frac{u\sqrt{-f}}{\sqrt{2}},$$

$$y\sqrt{a} + \frac{x\sqrt{-e}}{\sqrt{2}} - \frac{u\sqrt{-f}}{\sqrt{2}},\ y\sqrt{a} - \frac{x\sqrt{-e}}{\sqrt{2}} + \frac{u\sqrt{-f}}{\sqrt{2}}.$$

(105). Une équation entre deux variables étant proposée, il n'est pas toujours possible de déterminer l'une en fonction de l'autre; il est plus facile de trouver chacune d'elles en fonction d'une nouvelle variable, & ce problême aura dans la suite ses applications. Ainsi en faisant $y = xz$ dans l'équation

$$ay^3 + by^2x + cyx^2 + dx^3 + ey^2 + fyx + gx^2 = 0,$$

on en tire $x = \frac{-ez^2 - fz - g}{az^3 + bz^2 + cz + d}$, $y = \frac{-ez^3 - fz^2 - gz}{az^3 + bz^2 + cz + d}$.

Au moyen de la même substitution, on tire de l'équation $y^5 = 2ax^3 + by + cx$, celle-ci $x^4z^5 = 2ax^2 + bz + c$; partant

$$x = \pm\frac{\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 + bz^6 + cz^5}}}{z^2\sqrt{z}},\ y = \pm\frac{\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 + bz^6 + cz^5}}}{z\sqrt{z}}.$$

Encore un exemple : l'équation $ay^m + bx^n + cy^hx^i = 0$ étant proposée, on fera $y = x^rz^s$, & on la changera en celle-ci $ax^{mr}z^{ms} + bx^n + cz^{hs}x^{hr+i} = 0$.

Or on peut tirer de cette équation la valeur de x dans les cas suivans :

1°. lorsque $mr = n$, elle devient $(az^{ms} + b)\, x^{\frac{mn - im - hn}{m}} = -cz^{hs}$, d'où

$$x = \left(\frac{-cz^{hs}}{b + az^{ms}}\right)^{\frac{m}{mn - in - hn}},\ y = z^{s}\left(\frac{-cz^{hs}}{b + az^{ms}}\right)^{\frac{n}{mn - in - hn}};$$

2°. lorsque $n = hr + i$, l'équation devient $(b + cz^{hs})\, x^{n - mr} = -az^{ms}$;

$$\text{d'où } x = \left(\frac{-az^{ms}}{b + cz^{hs}}\right)^{\frac{s}{n - mr}},\ y = z^{s}\left(\frac{-az^{ms}}{b + cz^{hs}}\right)^{\frac{r}{n - mr}};$$

3°. lorsque $mr = hr + i$, elle devient $(az^{ms} + cz^{hs})\, x^{mr - n} = -b$, d'où

$$x = \left(\frac{-b}{az^{ms} + cz^{hs}}\right)^{\frac{s}{mr - n}},\ y = z^{s}\left(\frac{-b}{az^{ms} + cz^{hs}}\right)^{\frac{r}{mr - n}}.$$

Si la proposée étoit $y^{3} + x^{3} = eyx$, on prendroit $s = 1$, & on auroit

de la première manière $r = 1$, $x = \frac{ez}{1 + z^{3}}$, $y = \frac{ez^{2}}{1 + z^{3}}$;

de la seconde manière $r = 2$, $x = \frac{\sqrt[3]{ez - 1}}{z}$, $y = \frac{\sqrt[3]{(ez - 1)^{2}}}{z}$;

de la troisième manière $r = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt[3]{(ez - z^{3})^{2}}$, $y = z\sqrt[3]{ez - z^{3}}$.

CHAPITRE III.

DE LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES.

(106). PARMI les quantités que l'on compare entr'elles, les unes augmentent ou diminuent continuellement, tandis que les autres demeurent toujours les mêmes; nous avons nommé les premières des quantités variables, & les autres des quantités constantes. La quantité dont une variable augmente ou diminue dans un temps donné, en est appellée la *différence*. On se servira dans la suite de la caractéristique Δ pour désigner la différence d'une quantité variable; pour marquer, par exemple, la différence de x, on écrira Δx, qui sera précédé du signe $+$ ou du signe $-$, selon que la variable sera supposée croître ou décroître. Soit une fonction z de plusieurs variables y, x, &c. ; on demande la différence de la fonction z ? Concevons qu'en mettant $y \pm \Delta y$ pour y, $x \pm \Delta x$ pour x, &c. la fonction z devienne z' ; ôtant z de z', on aura Δz.

Si z est égal à une puissance quelconque n de la variable x, on trouvera $z' = (x \pm \Delta x)^{n}$ &

Δ

$\Delta z = \pm n x^{n-1} \Delta x + n \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} \Delta x^2 \pm n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^{n-3} \Delta x^3 + \&c.$; lorsque n est un nombre entier positif, cette suite est finie, & renferme toutes les puissances successives de la différence Δx, depuis Δx jusqu'à Δx^n inclusivement.

On demande la différence de la fraction $\frac{x^2}{a+x}$, a étant une quantité constante & x une variable quelconque? Je fais $\frac{x^2}{a+x} = z$, d'où $z' = \frac{x^2 \pm 2x\Delta x + \Delta x^2}{a+x \pm \Delta x}$ & $\Delta z = \frac{\pm(2ax+x^2)\Delta x + (a+x)\Delta x^2}{(a+x)^2 \pm (a+x)\Delta x}$.

Pour développer cette fraction en une série ordonnée par rapport aux puissances successives de Δx, on fera $\Delta z = A \Delta x + B \Delta x^2 + C \Delta x^3 + \&c.$, & on aura $A = \pm \frac{2ax+x^2}{(a+x)^2}$, $B = \frac{a^2}{(a+x)^3}$, $C = \mp \frac{a^2}{(a+x)^4}$, &c.

On propose encore de trouver la différence de $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}}$? Je fais $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}} = z$; d'où $z' = \frac{\sqrt{a+x\pm\Delta x}}{\sqrt{x\pm\Delta x}}$ & $\Delta z = \frac{\sqrt{a+x\pm\Delta x}}{\sqrt{x\pm\Delta x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}}$.

Supposons $\frac{\sqrt{a+x\pm\Delta x}}{\sqrt{x\pm\Delta x}} = X + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \&c.$, nous aurons $X = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{x}}$ & $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \&c.$, où $A = \mp \frac{a}{2x\sqrt{ax+x^2}}$; $B = \frac{3a^2+4ax}{8x(ax+x^2)\sqrt{ax+x^2}}$, $C = \mp \frac{5a^3+12a^2x+8ax^2}{16x(ax+x^2)^2\sqrt{ax+x^2}}$, &c.

Sans multiplier davantage les exemples, on doit voir qu'on pourra toujours représenter la différence d'une fonction algébrique de x & de constantes par $A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \&c.$ A, B, &c. étant des fonctions indéterminées de x & de constantes; & que x croissant, si la différence d'une fonction de cette variable est représentée par $A\Delta x + B\Delta x^2 + \&c.$, x décroissant, on aura pour la différence de la même fonction $-A\Delta x + B\Delta x^2 - C\Delta x^3 + D\Delta x^4 - \&c.$

(107). Proposons-nous maintenant de trouver les différences de fonctions de plusieurs variables. Il peut arriver que toutes les variables augmentent en même temps; que quelques-unes des variables augmentant les autres diminuent; ou que toutes diminuent en même temps. Etant donnée une fonction z de y & de x, si les variables augmentent en même temps, on trouvera z' en substituant $y+\Delta y$

à y & $x + \Delta x$ à x; si y augmentant, x diminue, on trouvera z' en substituant $y + \Delta y$ à y, & $x - \Delta x$ à x; si y & x diminuent en même temps, on trouvera z' en substituant $y - \Delta y$ à y & $x - \Delta x$ à x: dans ces différens cas, ôtant z de z', on aura Δz. Mais pour éviter les longueurs, à moins que d'avertir, nous supposerons que toutes les variables croissent en même temps. Cela posé :

Le rapport entre les variables y & x étant donné par l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

on demande le rapport entre les différences de ces variables ? On trouvera aisément que ce rapport est renfermé dans l'équation

$$(2ax + by + d)\Delta x + (bx + 2cy + e)\Delta y + a\Delta x^2 + b\Delta x\Delta y + c\Delta y^2 = 0.$$

Soit encore l'équation

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + k = 0;$$

on aura le rapport entre les différences des variables y & x exprimé par

$$(3ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + fy + h)\Delta x + (bx^2 + 2cxy + 3dy^2 + fx + 2gy + i)\Delta y + (3ax + by + e)\Delta x^2 + (2bx + 2cy + f)\Delta x\Delta y + (cx + 3dy + g)\Delta y^2 + a\Delta x^3 + b\Delta x^2\Delta y + c\Delta x\Delta y^2 + d\Delta y^3 = 0.$$

En général si le rapport entre les variables y & x est donné par l'équation

$$(\alpha) \ldots\ldots ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + gy^n + a'x^{n-1} + b'x^{n-2}y + c'x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots + f'y^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + hx + iy + k = 0,$$

& que ces deux variables soient supposées croître en même temps; l'équation qui renferme le rapport entre leurs différences, pourra toujours être représentée par

$$(\beta) \ldots\ldots A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\Delta x^{n-2}\Delta y^2 + \ldots\ldots + g\Delta y^n = 0,$$

A, B, &c. étant des fonctions algébriques des mêmes variables, & $a, b, c \ldots\ldots g$ les mêmes co-efficiens que dans l'équation α.

(108). La fonction z continuant de varier, soit nommé z'', z''', z^{iv}, &c. ce qu'elle devient successivement; on aura $z'' - z' = \Delta z'$, $z''' - z'' = \Delta z''$, &c. Il est bien clair que $\Delta z' - \Delta z = \Delta (z' - z) = \Delta\Delta z$; c'est cette différence de la différence Δz qu'on appelle différence seconde de la variable z, & que nous désignerons plus simplement par $\Delta^2 z$. Donc $\Delta z'' - \Delta z' = \Delta^2 z'$, $\Delta z''' - \Delta z'' = \Delta^2 z''$, &c. On verra très-aisément aussi que $\Delta^2 z' - \Delta^2 z = \Delta^2 (z' - z) = \Delta^2 \Delta z$; pour désigner cette seconde différence de la différence Δz, qu'on appelle différence troisième de la variable z, nous écrirons $\Delta^3 z$; comme nous désignerons celles des ordres supérieurs, & qu'on trouvera de la même manière, par $\Delta^4 z$, $\Delta^5 z$, &c.

Si z est une fonction de deux variables y & x, Δz renferme y, x, Δy, Δx; & on aura $\Delta z'$ en substituant $y + \Delta y$ à y, $x + \Delta x$ à x, $\Delta y + \Delta^2 y$ à Δy, $\Delta x + \Delta^2 x$ à Δx. Ainsi $\Delta^2 z$ renferme y, x, Δy, Δx, $\Delta^2 y$, $\Delta^2 x$; & on aura $\Delta^2 z'$

en substituant $y+\Delta y$ à y, $x+\Delta x$ à x, $\Delta y+\Delta^2 y$ à Δy, $\Delta x+\Delta^2 x$ à Δx, $\Delta^2 y+\Delta^3 y$ à $\Delta^2 y$, $\Delta^2 x+\Delta^3 x$ à $\Delta^2 x$; on aura $\Delta^3 z'$ en substituant dans $\Delta^3 z$, $y+\Delta y$ à y, $x+\Delta x$ à x, $\Delta y+\Delta^2 y$ à Δy, $\Delta x+\Delta^2 x$ à Δx, $\Delta^2 y+\Delta^3 y$ à $\Delta^2 y$, $\Delta^2 x+\Delta^3 x$ à $\Delta^2 x$, $\Delta^3 y+\Delta^4 y$ à $\Delta^3 y$, $\Delta^3 x+\Delta^4 x$ à $\Delta^3 x$, &c Mais dans le calcul des différences successives d'une fonction, nous supposerons le plus souvent qu'une des quantités qu'elle renferme varie uniformément, ou, ce qui revient au même, qu'une des différences premières est constante; & nous prendrons cette différence supposée constante, pour terme fixe de comparaison des différences des autres variables.

(109). Les variables croissant, & la différence première de x étant constante, on demande les différences successives de la fonction xy? On trouvera d'abord $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$, puis substituant dans cette expression de la différence première $x+\Delta x$ à x, $y+\Delta y$ à y, $\Delta y+\Delta^2 y$ à Δy, on aura $\Delta z' = y\Delta x + x\Delta y + 3\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$; ôtant Δz de $\Delta z'$, il restera

pour la différence seconde $\Delta^2 z = 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$.
On trouvera pour la différence troisième $\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$;
pour la différence quatrième $\Delta^4 z = 4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$;
pour la différence cinquième $\Delta^5 z = 5\Delta x\Delta^4 y + x\Delta^5 y + 5\Delta x\Delta^5 y$;

& ainsi de suite. On propose encore de trouver les différences successives de la fonction x^n? Puisque la différence première est

$$n x^{n-1}\Delta x + n\cdot\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.;$$

on aura pour la différence seconde

$$n\Delta x\left[(x+\Delta x)^{n-1} - x^{n-1}\right] + n\cdot\frac{n-1}{2}\Delta x^2\left[(x+\Delta x)^{n-2} - x^{n-2}\right] +$$
$$n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\Delta x^3\left[(x+\Delta x)^{n-3} - x^{n-3}\right] + \&c.;$$

ou, développant tous ces binomes,

$$n\cdot\overline{n-1}\cdot x^{n-2}\Delta x^2 + n\cdot\overline{n-1}\cdot\frac{n-2}{2}x^{n-3}\Delta x^3 + n\cdot\overline{n-1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}x^{n-4}\Delta x^4 + \&c.$$
$$+ n\cdot\overline{n-1}\cdot\frac{n-2}{2}x^{n-3}\Delta x^3 + n\cdot\overline{n-1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{2}x^{n-4}\Delta x^4 + \&c.$$
$$+ n\cdot\overline{n-1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}x^{n-4}\Delta x^4 + \&c.$$

ou même encore, en faisant les réductions nécessaires,

$$n\cdot\overline{n-1}\cdot x^{n-2}\Delta x^2 + n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot x^{n-3}\Delta x^3 + n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\,7\,x^{n-4}\Delta x^4 + \&c.$$

On trouvera de la même manière pour la différence troisième

$$n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot x^{n-3}\Delta x^3 + n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}\cdot 3\,x^{n-4}\Delta x^4 + \&c.;$$

pour la différence quatrième

$$n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot \overline{n-3} \cdot x^{n-4} \Delta x^4 + \&c.;$$

& ainsi des autres. Si n est un nombre entier positif, on aura

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots\cdots \overline{n-1} \cdot n \Delta x^n$$

pour la différence de l'ord e n, & comme on voit cette différence est constante; c'est-à-dire, que Δx étant constant & n un nombre entier positif, la différence $n+1$ de x^n est nulle.

(110). Si nous reprenons la suite z, z', z'', z''', z^{iv}, &c. & que nous écrivions
$z' - z = \Delta z$, $z'' - z' = \Delta z'$, $z''' - z'' = \Delta z''$, $z^{iv} - z''' = \Delta z'''$, &c.
$\Delta z' - \Delta z = \Delta^2 z$, $\Delta z'' - \Delta z' = \Delta^2 z'$, $\Delta z''' - \Delta z'' = \Delta^2 z''$,
$\Delta^2 z' - \Delta^2 z = \Delta^3 z$, $\Delta^2 z'' - \Delta^2 z' = \Delta^3 z'$, $\Delta^2 z''' - \Delta^2 z'' = \Delta^3 z''$,
$\Delta^3 z' - \Delta^3 z = \Delta^4 z$, $\Delta^3 z'' - \Delta^3 z' = \Delta^4 z'$, $\Delta^3 z''' - \Delta^3 z'' = \Delta^4 z''$,
&c. nous verrons évidemment que

$z' = z + \Delta z$,
$z'' = z + 2\Delta z + \Delta^2 z$,
$z''' = z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z$,
$z^{iv} = z + 4\Delta z + 6\Delta^2 z + 4\Delta^3 z + \Delta^4 z$,
&c.

$\Delta z = z' - z$,
$\Delta^2 z = z'' - 2z' + z$,
$\Delta^3 z = z''' - 3z'' + 3z' - z$,
$\Delta^4 z = z^{iv} - 4z''' + 6z'' - 4z' + z$;
&c.

Donc 1°. nommant Z un terme quelconque de la suite z, z', z'', &c. & n le nombre des termes qui le précèdent, on aura

$$Z = z + n\Delta z + n \cdot \frac{n-1}{2} \Delta^2 z + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \Delta^3 z + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \Delta^4 z + \&c.;$$

$$2°.\ \Delta^n z = z^{n\prime} - n z^{\overline{n-1}\,\prime} + n\frac{n-1}{2} z^{\overline{n-2}\,\prime} - n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot z^{\overline{n-3}\,\prime} + \&c.$$

(111). Soit une ligne courbe XMZ (*fig. XXIII*), qui ait pour diamètre la ligne AB, & pour une de ses ordonnées la droite PM; & soit pris de part & d'autre du point P des parties égales PP', $P'P''$, $P''P'''$, &c., $P'P$, $'P''P$, $''P'''P$, &c. Cela posé, ayant nommé AP, x, PM, y; y', y'', y''' ..... Y les ordonnées qui répondent aux abscisses $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$ ..... $x + n\Delta x$; on aura $y' = y + \Delta y$, $y'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$, $y''' = y + 3\Delta y + 3\Delta y^2 + \Delta^3 y$, &c., & $Y = y + n\Delta y + n \cdot \frac{n-1}{2}\Delta^2 y + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\Delta^3 y + \&c.$

(112). Nous aurions pu faire toute autre hypothèse que de supposer Δx constant; comme, par exemple, que les Δy, $\Delta y'$, $\Delta y''$, &c. fussent égaux entr'eux, ou, ce qui revient au même, que Δy fût constant : alors XMZ n'étant

n'étant pas une ligne droite, Δx auroit été variable, ou, ce qui est la même chose, les portions PP', $P'P''$, &c. n'eussent point été égales entr'elles. En effet, si l'on tire les cordes de deux arcs quelconques MM', $M'M''$ & des parallèles Mm, $M'm'$ au diamètre AB, les deux triangles MmM', $M'm'M''$ feroient parfaitement égaux si l'on avoit en même temps $Mm = M'm'$ & $mM' = m'M''$; les deux cordes feroient donc des angles égaux avec les parallèles Mm, $M'm'$, ou, ce qui revient au même, elles ne feroient qu'une seule & même ligne droite. Il s'ensuivroit que la ligne XMZ devroit être telle que les cordes des arcs consécutifs MM', $M'M''$, $M''M'''$, &c. ne fissent entr'elles qu'une seule & même droite; & ainsi XMZ ne seroit elle-même qu'une ligne droite qui se confondroit avec la précédente. On ne pourra donc supposer à la fois qu'une seule différence constante. Mais soit que l'on fasse varier uniformément une des variables, soit qu'on ne regarde aucune différence comme constante, on doit arriver de toutes les manières au même résultat.

Pour le démontrer, supposons que la courbe XMZ ait pour équation $y = x^2$; & qu'on demande d'arriver de l'ordonnée PM à l'ordonnée $P''M''$ par deux différences consécutives. A cause de $P''M'' = y' + \Delta y'$ & de $y' = y + \Delta y$, on aura dans toutes les hypothèses $P''M'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$. Maintenant si l'on prend pour première hypothèse que $P'M'$ divise PP'' en deux parties égales, en nommant Δx chacune de ces parties, on aura $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$, & parce que Δx est constant, $\Delta^2 y = 2\Delta x^2$; donc $P''M'' = x^2 + 4x\Delta x + 4\Delta x^2$. En prenant pour seconde hypothèse que $M'P'$ divise PP'' en deux parties inégales δx, $\delta x'$, on aura

$$\Delta y = 2x\delta x + \delta x^2,\ \Delta^2 y = 2\delta x^2 + 2x\delta^2 x + 4\delta x\delta^2 x + (\delta^2 x)^2;$$

& par conséquent

$$P''M'' = x^2 + 4x\delta x + 4\delta x^2 + 2x\delta^2 x + 4\delta x\delta^2 x (\delta^2 x)^2.$$

Les différences finies Δx & δx sont inégales, mais on doit avoir $\delta x + \delta x'$, ou $2\delta x + \delta^2 x = 2\Delta x$; or comme en substituant cette valeur de $2\Delta x$ dans la première expression de $P''M''$, on trouve l'autre; il est clair que des deux manières nous sommes arrivés au même résultat: il en seroit de même de toute autre hypothèse.

(113). Il sera toujours facile de trouver telle différence qu'on voudra d'une fonction quelconque; le problême inverse, qui consiste à remonter de la différence d'une quantité à cette quantité même, renferme des difficultés d'un ordre bien supérieur. La quantité, qu'il est alors question de trouver, s'appelle la *somme* de la différence proposée, & pour indiquer cette somme, on se sert du signe Σ qu'on met devant la différence; ainsi $\Sigma x^n \Delta x$ désigne la somme dont $x^n \Delta x$ est la différence.

Il est clair d'après ce qui précède, que la somme de Δx est x; & Δx étant constant, que celle de Δx^2 est $x\Delta x$, que celle de Δx^3 est $x\Delta x^2$, que celle de Δx^4 est $x\Delta x^3$, &c. Cela posé, puisque la différence de $x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$, on a $x^2 = 2\Sigma x\Delta x + x\Delta x$, & $\Sigma x\Delta x = \frac{x^2 - x\Delta x}{2}$.

La différence de $x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$; donc $x^3 = 3\Sigma x^2\Delta x + \frac{3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2}{2} + x\Delta x^2$, & $\Sigma x^2\Delta x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}$.

On trouvera de la même manière

$$\Sigma x^3\Delta x = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{2} + \frac{x^2\Delta x^2}{4},$$

$$\Sigma x^4\Delta x = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4\Delta x}{2} + \frac{x^3\Delta x^2}{3} - \frac{x\Delta x^4}{30},$$

$$\Sigma x^5\Delta x = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5\Delta x}{2} + \frac{5x^4\Delta x^2}{12} - \frac{x^2\Delta x^4}{12},$$

& la somme de $x^n\Delta x$, n étant un nombre entier positif quelconque.

(114). Il faut remarquer que Δz n'est pas plutôt la différence de z, que la différence de cette fonction augmentée ou diminuée d'une constante quelconque; d'où il suit que la somme d'une différence proposée, pour être complète, doit nécessairement renfermer une constante arbitraire. La différence Δx, qui est elle-même une quantité constante, doit entrer dans la constante arbitraire d'une manière quelconque. Nous dirions la même chose de toute fonction de x, Δx & de constantes dont la différence seroit nulle.

Pour mieux faire sentir la nécessité d'ajouter une constante arbitraire, soit proposé de trouver la somme de $(a+x)^2\Delta x$. On peut le faire de deux manières. En développant cette différence, il vient $a^2\Delta x + 2ax\Delta x + x^2\Delta x$; or $\Sigma a^2\Delta x = a^2x$, $\Sigma 2ax\Delta x = ax^2 - ax\Delta x$, $\Sigma x^2\Delta x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}$; donc $\Sigma(a+x)^2\Delta x = a^2x + ax^2 - ax\Delta x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6} = \frac{(a+x)^3}{3} - \frac{(a+x)^2}{2}\Delta x + \frac{a+x}{6}\Delta x^2 - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2}\Delta x - \frac{a}{6}\Delta x^2$; je n'ajoute pas de constante arbitraire. Autrement je fais $a + x = y$, d'où $\Delta x = \Delta y$ & $(a+x)^2\Delta x = y^2\Delta y$; or $\Sigma y^2\Delta y = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2\Delta y}{2} + \frac{y\Delta y^2}{6}$; substituant donc pour y & Δy leurs valeurs, il vient $\Sigma(a+x)^2\Delta x = \frac{(a+x)^3}{3} - \frac{(a+x)^2}{2}\Delta x + \frac{a+x}{6}\Delta x^2$; je n'ajoute point encore de constante arbitraire. Ces deux résultats diffèrent de la quantité constante $-\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2}\Delta x - \frac{a}{6}\Delta x^2$; mais il est visible qu'ils ne sont l'un & l'autre que des sommes particulières comprises dans $\frac{(a+x)^3}{3} - \frac{(a+x)^2}{2}\Delta x + \frac{a+x}{6}\Delta x^2 + C$, qui est la somme complète de la différence proposée, si par C on entend une constante arbitraire telle que nous l'avons définie plus haut.

(115). Si l'on proposoit la fraction rationnelle $\frac{3x\Delta x + 2\Delta x^2}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)}$, on la décomposeroit en ses fractions simples $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{2}{x+2\Delta x} = -\left(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}\right) - 2\left(\frac{1}{x+2\Delta x} - \frac{1}{x+\Delta x}\right)$, dont la somme est $-\frac{1}{x} - \frac{2}{x+\Delta x}$; donc la somme de la différence proposée $= a - \frac{3x+\Delta x}{x(x+\Delta x)}$, a étant la constante arbitraire. On trouvera de la même manière que

$$\Sigma \frac{\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\cdot\Delta x)} = a - \frac{1}{x+n\Delta x}.$$

Sans décomposer la fraction rationnelle en fractions binomes, il suffira souvent de la résoudre en fractions dont le dénominateur ait un moindre nombre de facteurs. Si, par exemple, on propose

$$\frac{\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+2}\cdot\Delta x)},$$

on la supposera égale à

$$\frac{A}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\cdot\Delta x)} + \frac{B}{(x+\overline{n+1}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+2}\cdot\Delta x)};$$

& l'on aura l'équation identique $\Delta x = \begin{array}{l} A\cdot x + \overline{n+2}\cdot A\cdot\Delta x, \\ +B \quad + \quad nB \end{array}$

d'où l'on tire $A = -B$, $A = \frac{1}{2}$; partant

$$\Sigma \frac{\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+2}\cdot\Delta x)} = a - \frac{1}{2(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\cdot\Delta x)};$$

De même $\Sigma \dfrac{\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+2}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+3}\cdot\Delta x)}$

$$= a - \frac{1}{3(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+2}\cdot\Delta x)},$$

$$\Sigma \frac{\Delta x}{(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+2}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+3}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+4}\cdot\Delta x)}$$

$$= \frac{-1}{4(x+n\Delta x)(x+\overline{n+1}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+2}\cdot\Delta x)(x+\overline{n+3}\cdot\Delta x)}$$

$+ a$, & ainsi de suite.

(116). Je désigne par ${}''z$, ${}'''z$, ${}^{iv}z$, &c. les termes qui précèdent z dans la suite, &c. ${}'z$, z, z', z'', &c.; on aura $z - {}'z = \Delta\,{}'z$, ${}'z - {}''z = \Delta\,{}''z$, ${}''z - {}'''z = \Delta\,{}'''z$, &c. & $z = \Delta\,{}'z + \Delta\,{}''z + \Delta\,{}'''z + \text{\&c.} = \Delta({}'z + {}''z + {}'''z + \text{\&c.})$

Donc z, ou tel terme qu'on voudra prendre dans la suite, &c. $'''z$, $''z$, $'z$, z, z', z'', &c. est effectivement la différence de la somme des termes qui le précèdent.

Donc (n°. 111) une fonction quelconque de x est la différence de la somme de toutes celles que l'on trouveroit en mettant dans la première pour x successivement $x - \Delta x$, $x - 2 \Delta x$, $x - 3 \Delta x$, &c. Or (*fig. XXIII*) l'espace $MPP'M'$ peut être considéré comme une certaine fonction de x, dans laquelle si l'on met pour x successivement $x - \Delta x$, $x - 2 \Delta x$, &c. on aura les espaces qui précèdent $'M'PPM$, $''M''P'P'M$, $'''M'''P''P'M$, &c.; donc $MPP'M'$ est la différence de la somme de tous ces espaces, ou de tel autre espace qu'on voudra $KHPM$. On démontrera de la même manière que MM' est la différence de tel autre arc qu'on voudra KM; que la surface décrite par MM', dans la révolution de la figure sur l'axe AB, est la différence de la surface décrite par KM dans la même révolution; que le solide engendré par $MPP'M'$ est la différence du solide engendré par $KHPM$, &c. Ayant sommé complétement une de ces différences, si le problême exige que la somme trouvée donne plutôt tel espace que tel autre, on déterminera la constante arbitraire, en cherchant pour quelle valeur particulière de x cette somme doit être nulle.

Supposons que XMZ soit une ligne droite qui rencontre le diamètre au point A, de manière que $AH = a$, $HK = b$, & qui par conséquent ait pour équation $ay = bx$; alors l'espace $MPP'M'$ sera $y \Delta x + \frac{\Delta x \Delta y}{2} = \frac{b x \Delta x}{a} + \frac{b \Delta x^2}{2a}$, différence qui a pour somme complète $\frac{b}{2a} x^2 + C$. Maintenant si l'on veut la surface du triangle APM, le problême exige que la somme soit nulle lorsque $x = 0$, ce qui donne $C = 0$, & pour la surface du triangle $\frac{xy}{2}$. Mais si c'est du trapèze $KHPM$ dont on demande la surface, il faut que la somme soit prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $x = a$, ce qui donne $C = -\frac{ab}{2}$ & pour la surface du trapèze $\frac{xy - ab}{2}$. Si de plus le trapèze & le triangle doivent avoir une certaine hauteur, & telle que $x = c$, on mettra pour x & y leurs valeurs c & $\frac{bc}{a}$ dans les expressions indéterminées $\frac{xy - ba}{2}$, $\frac{xy}{2}$ qui deviendront par-là $\frac{b}{a} \cdot \frac{c^2 - a^2}{2}$, $\frac{bc^2}{2a}$.

(117). Soit une ligne courbe BMZ (*fig. XXIV*) & deux ordonnées consécutives PM, y, $P'M'$, y', qui répondent aux abscisses AP, x, AP', x'; je conçois que la relation entre les co-ordonnées x & y venant à varier, (de quelque manière que cela arrive, soit par la variation d'un paramètre ou autrement) la courbe passe de son premier état à un autre marqué par bmz; & ayant pris dans la *courbe variée* deux points m & m', je tire les deux ordonnées pm, Y, $p'm'$, Y', parallèles

parallèles à celles de la courbe BMZ, & qui ont pour abſciſſes correſpondantes Ap, X, Ap', X'. Nous ſommes convenus de nous ſervir de la caractériſtique Δ pour déſigner la différence de deux ordonnées conſécutives d'une même courbe & celle des abſciſſes correſpondantes ; de manière que $x' - x = \Delta x$, $y' - y = \Delta y$, $X' - X = \Delta X$, $Y' - Y = \Delta Y$. Mais il nous faut de plus conſidérer la différence de deux ordonnées, telles que PM, pm, & celles des abſciſſes correſpondantes, leſquelles différences ſont dues à une variation d'un autre genre, celle de la relation entre les co-ordonnées x & y, & ne peuvent être déſignées par la même caractériſtique Δ. Nous prendrons δ pour caractériſtique de cet autre genre de différences & nous écrirons $X - x = \delta x$, $Y - y = \delta y$, $X' - x' = \delta x'$, $Y' - y' = \delta y'$. Or Y' eſt en même temps égal à $y' + \delta y'$ & à $Y + \Delta Y$; donc $y + \Delta y + \delta(y + \Delta y) = y + \delta y + \Delta(y + \delta y)$, d'où l'on tire $\delta \Delta y = \Delta \delta y$. Ainſi $\delta \Delta^2 y = \Delta \delta \Delta y = \Delta^2 \delta y$, $\delta \Delta^3 y = \Delta^2 \delta \Delta y = \Delta^3 \delta y, \ldots\ldots\ldots \delta \Delta^n y = \Delta^n \delta y$.

(118). Nous ſommes encore convenus de déſigner par ΣV la ſomme d'une fonction quelconque V des variables y & x & de leurs différences, & nous avons remarqué que $V = \Delta({}'V + {}''V + {}'''V + \&c.)$; donc $\Sigma V = {}'V + {}''V + {}'''V + \&c.$ Mais, à cauſe de $\delta V = \delta \Delta({}'V + {}''V + {}'''V + \&c.) = \Delta \delta({}'V + {}''V + {}'''V + \&c.)$, on a $\Sigma \delta V = \delta({}'V + {}''V + {}'''V + \&c.)$; donc $\delta \Sigma V = \Sigma \delta V$.

Il ſuit de ce théorême que $\delta \Sigma \Sigma V = \Sigma \delta \Sigma V = \Sigma \Sigma \delta V$, $\delta \Sigma \Sigma \Sigma V = \Sigma \Sigma \delta \Sigma V = \Sigma \Sigma \Sigma \delta V$, &c. Pour abréger, au lieu de déſigner deux, trois, &c. ſommations ſucceſſives par $\Sigma \Sigma V$, $\Sigma \Sigma \Sigma V$, &c. on écrit $\Sigma^2 V$, $\Sigma^3 V$, &c. ; d'où il ſuit que l'on peut toujours changer $\delta \Sigma^n V$ en $\Sigma^n \delta V$.

Étant donnée la formule $\Sigma V \Delta \delta y$, on pourra la transformer en celle-ci $V \delta y - \Sigma \Delta V \delta y'$: en effet, ſi l'on fait $\Sigma V \Delta \delta y = V \delta y + K$, K étant une fonction inconnue qu'il s'agit de déterminer, on aura $V \Delta \delta y = V \Delta \delta y + \Delta V \delta y + \Delta V \Delta \delta y + \Delta K$, $\Delta K = - \Delta V(\delta y + \Delta \delta y) = - \Delta V \delta y'$; donc $\Sigma V \Delta \delta y = V \delta y - \Sigma \Delta V \delta y'$. Si l'on propoſe cette autre formule $\Sigma V \Delta^2 \delta y$, on la changera d'abord en celle-ci $V \Delta \delta y - \Sigma \Delta V \Delta \delta y'$; puis, à cauſe de $\Sigma \Delta V \Delta \delta y' = \Delta V \delta y' - \Sigma \Delta^2 V \delta y''$, on aura

$$\Sigma V \Delta^2 \delta y = V \Delta \delta y - \Delta V \delta y' + \Sigma \Delta^2 V \delta y''.$$

On démontrera de la même manière que

$$\Sigma V \Delta^3 \delta y = V \Delta^2 \delta y - \Delta V \Delta \delta y' + \Delta^2 V \delta y'' - \Sigma \Delta^3 V \delta y''';$$

& en général que

$$\Sigma V \Delta^n \delta y = V \Delta^{n-1} \delta y - \Delta V \Delta^{n-2} \delta y' + \Delta^2 V \Delta^{n-3} \delta y'' - \ldots\ldots \pm \Sigma \Delta^n V \delta y^{n}.$$

(119). Nous ferons dans la ſuite beaucoup d'applications de ces principes ; mais pour le moment nous nous contenterons de réſoudre le problême ſuivant : Entre tous les polygones que l'on peut former avec un nombre de côtés donnés, trouver celui qui a la plus grande ſurface ? Si nous nommons P un de ces polygones & $P + \delta P$ celui qui ſuit immédiatement, δP devra être une quantité très-petite ; nous la ſuppoſerons aſſez petite pour qu'on en puiſſe négliger

toute autre puissance que la première. Arrivé au polygone le plus grand, la variation de positive deviendra négative, ce qui suppose qu'elle a d'abo d été nulle; donc si Π est le plus grand des polygones que l'on peut former avec un même nombre de côtés donnés, on aura $\delta\,\Pi = 0$. Des angles M, N, O de ce polygone (*fig. XXV*) j'abaisse sur une droite AB les perpendiculaires MP, NQ, OR; or si je considère un des trapèzes tel que $NQRO$, & que je nomme AQ, x, QN, y, QR, Δx, rO, Δy, j'aurai pour la surface du trapèze $\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x$. On aura donc pour la quantité qui doit être un plus grand $\Sigma\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x$, & par conséquent $\delta\,\Sigma\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x = 0$.

On remarquera que les polygones, dont nous cherchons le plus grand, ayant leurs côtés donnés, on doit avoir $\delta\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$, d'où l'on tire, en ne conservant que les premières puissances de $\delta\,\Delta x$, $\delta\,\Delta y$, $\Delta x\,\delta\,\Delta x + \Delta y\,\delta\,\Delta y = 0$.

Cela posé, je reprends l'équation $\delta\,\Sigma\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x = 0$, que je change en celle-ci $\Sigma\left[\Delta x\,\delta y + \frac{\Delta x}{2}\,\delta\,\Delta y + \left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\delta\,\Delta x\right] = 0$.

Lorsque j'aurai mis pour $\delta\,\Delta x$ sa valeur $-\frac{\Delta y}{\Delta x}\,\delta\,\Delta y$, cette équation deviendra

$\Sigma\left[\Delta x\,\delta y + \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{y\,\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y^2}{2\,\Delta x}\right)\delta\,\Delta y\right] = 0$,

ou, faisant pour abréger $\frac{\Delta x}{2} - \frac{y\,\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y^2}{2\,\Delta x} = \Psi$,

$\Sigma(\Delta x\,\delta y + \Psi\,\delta\,\Delta y) = 0$.

(120). Au lieu de Δy, je mets $y' - y$, & je transforme l'équation précédente en celle-ci $\Sigma[(\Delta x - \Psi)\,\delta y + \Psi\,\delta y'] = 0$. Or si je fais $(\Delta x - \Psi)\,\delta y + \Psi\,\delta y' = V$, j'aurai ${}'V = (\Delta\,{}'x - {}'\Psi)\,\delta\,{}'y + {}'\Psi\,\delta y$, ${}''V = (\Delta\,{}''x - {}''\Psi)\,\delta\,{}''y + {}''\Psi\,\delta\,{}'y$, ${}'''V = (\Delta\,{}'''x - {}'''\Psi)\,\delta\,{}'''y + {}'''\Psi\,\delta\,{}''y$, &c.; &, à cause de $\Sigma V = {}'V + {}''V + {}'''V +$ &c., j'aurai l'équation

${}'\Psi\,\delta y - ({}'\Psi - {}''\Psi - \Delta\,{}'x)\,\delta\,{}'y - ({}''\Psi - {}'''\Psi - \Delta\,{}''x)\,\delta\,{}''y - ({}'''\Psi - {}''''\Psi - \Delta\,{}'''x)\,\delta\,{}'''y -$ &c. $= 0$, ou

${}'\Psi\,\delta y - \Delta({}'\Psi - {}'x)\cdot\delta\,{}'y - \Delta({}'''\Psi - {}''x)\cdot\delta\,{}''y - \Delta({}''''\Psi - {}'''x)\cdot\delta\,{}'''y -$ &c. $= 0$.

Je donnerai à ΣV une certaine étendue déterminée, & y sera l'ordonnée qui répond à la fin de cette somme. Mais ne puis-je pas supposer que l'axe AB coupe le polygone de manière que l'ordonnée qui répond au commencement & celle qui répond à la fin de ΣV soient nulles aussi bien que leurs variations? Dans cette hypothèse, l'équation précédente deviendra

$\Delta\,(''\psi - 'x)\,.\,\delta' y + \Delta\,('''\psi - ''x)\,.\,\delta'' y + \Delta\,(''\psi - '''x)\,.\,\delta''' y + \&c. = 0$:

& comme cette équation doit avoir lieu quelle que soit la variation marquée par δ, on aura

$\Delta\,(''\psi - 'x) = 0\,, \Delta\,('''\psi - ''x) = 0\,, \Delta\,(''\psi - '''x) = 0\,, \&c.$

Donc en général $\psi - x' = f$, f étant une constante arbitraire; ou mettant $x + \Delta x$ pour x' & pour ψ sa valeur, on a

$$x + \frac{\Delta x}{2} + \frac{y\,\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y^2}{2\,\Delta x} + f = 0.$$

Je multiplie par Δx & je somme chaque terme, ce qui me donne $x^2 + y^2 + 2fx = g$, équation à un cercle dont le centre est dans l'axe AB. Il résulte delà que le plus grand polygone qu'on puisse former avec des côtés donnés, est celui qui peut être inscrit dans un cercle.

(121). En changeant le $\delta\Delta y$ en $\Delta\delta y$, on a l'équation

$$\Sigma\,(\Delta x\,\delta y + \psi\,\Delta\,\delta y) = 0.$$

Mais $\Sigma\,\psi\,\Delta\,\delta y = \psi\,\delta y - \Sigma\,\Delta\,\psi\,\delta y' = \psi\,\delta y - \Delta\,'\psi\,\delta y - \Sigma\,\Delta\,'\psi\,\delta y$;

ainsi notre équation devient

$(\psi - \Delta\,'\psi)\,\delta y + \Sigma\,\Delta\,(x - '\psi)\,\delta y =$ constante.

On verra aisément que cette constante est égale à ce que devient $(\psi - \Delta'\psi)\,\delta y$ lorsque $\Sigma\,\Delta\,(x - '\psi)\,\delta y = 0$; c'est pourquoi si nous nommons a l'ordonnée qui répond à ce point & A ce que devient $\psi - \Delta\,'\psi$ lorsque $y = a$, nous aurons l'équation

$$(\psi - \Delta\,'\psi)\,\delta y + \Sigma\,\Delta\,(x - '\psi)\,\delta y = A\,\delta a.$$

De plus, si nous donnons une certaine étendue déterminée à $\Sigma\,\Delta\,(x - '\psi)\,\delta y$; en nommant b l'ordonnée qui répond à la fin de cette somme, & B ce que devient $\psi - \Delta'\psi$, lorsqu'on fait $y = b$; l'équation précédente se changera en celle-ci

$$B\,\delta b + \Sigma\,\Delta\,(x - '\psi)\,\delta y = A\,\delta a.$$

Supposons, comme nous l'avons déjà fait, que l'axe AB coupe le polygone de manière que a & b soient nulles aussi bien que δa & δb ; alors nous aurons $\Sigma\,\Delta\,(x - '\psi)\,\delta y = 0$, qui donne en général $x' - \psi =$ constante. Ce résultat est conforme à celui que nous avons trouvé de l'autre manière.

(122). Soit Ax une fonction de x & de constantes; si dans cette fonction on met $0, 1, 2, 3, 4$, &c. successivement au lieu de x, & que de cette manière on forme la suite $A, A1, A2, A3, A4$, &c. Ax sera ce que nous avons nommé le terme général de cette suite. Pour trouver son expression, je fais (n°. 110) $A1 - A = a$, $A2 - 2A1 + A = b$, $A3 - 3A2 + 3A1 - A = c$, $A4 - 4A3 + 6A2 - 4A1 + A = d$, &c. & je trouve $A1 = A + a$, $A2 = A + 2a + b$, $A3 = A + 3a + 3b + c$,

$A4 = A + 4a + 6b + 4c + d$ .... $Ax = A + ax + bx$ $\frac{x-1}{2} + cx\,\frac{x-1}{2}\,\frac{x-2}{3} + dx\,.\,\frac{x-1}{2}\,.\,\frac{x-2}{3}\,.\,\frac{x-3}{4} +$ &c.

Cette formule servira à trouver le terme général d'une suite quelconque, & elle le donnera exactement toutes les fois qu'il sera possible de parvenir à des différences nulles. Je prends pour exemple la suite 1, 4, 9, 16, 25, &c. des quarrés des nombres naturels; on a $a = 3$, $b = 2$, c & les différences suivantes nulles; donc le terme général de cette suite est $1 + 3x + 2x\,.\,\frac{x-1}{2} = (1+x)^2$.

Soit encore la suite des cubes 1, 8, 27, 64, &c.; on a $a = 7$, $b = 12$, $c = 6$, d & les différences suivantes nulles; donc le terme général de cette suite est $1 + 7x + 12x\,.\,\frac{x-1}{2} + 6x\,.\,\frac{x-1}{2}\,.\,\frac{x-2}{3} = (1+x)^3$.

(123). Concevons une autre suite $S1$, $S2$, $S3$, $S4$, &c. telle que

$S1 = A$,	on aura $S1 = A$,
$S2 = A + A1$,	$S2 = 2A + a$,
$S3 = A + A1 + A2$,	$S3 = 3A + 3a + b$;
$S4 = A + A1 + A2 + A3$,	$S4 = 4A + 6a + 4b + c$;
&c.	&c.;

donc Sx, ou la somme de x termes de la suite A, $A1$, &c. est égale à

$$xA + x\cdot\frac{x-1}{2}a + x\,.\,\frac{x-1}{2}\,.\,\frac{x-2}{3}b + x\,.\,\frac{x-1}{2}\,.\,\frac{x-2}{3}\,.\,\frac{x-3}{4}c + \&c.$$

On trouvera pour la somme des x premiers termes de la suite des quarrés,

$$x + 3x\cdot\frac{x-1}{2} + x\cdot\overline{x-1}\cdot\frac{x-2}{3} = \frac{x + 3x^2 + 2x^3}{6};$$

& pour la somme des x premiers termes de la suite des cubes,

$$x + 7x\cdot\frac{x-1}{2} + 2x\,.\,\overline{x-1}\,.\,\overline{x-2} + x\,.\,\overline{x-1}\,.\,\overline{x-2}\,.\,\frac{x-3}{4} = \frac{x^2 + 2x^3 + x^4}{4}.$$

Mais la formule dont nous venons de faire usage ne peut donner exactement la somme d'un nombre quelconque de termes d'une suite proposée, que lorsqu'il est possible de parvenir à des différences nulles; la méthode qui suit est beaucoup plus générale.

(124). Le terme Ax de la suite A, $A1$, $A2$, &c. est la différence de la somme des termes qui le précèdent; si donc on nomme ς cette somme, on aura $Ax = \Delta\varsigma$ & $\varsigma =$ const. $+ \Sigma Ax$. Il faut remarquer qu'ici Δx est pris pour l'unité, puisqu'on a les termes qui précèdent Ax, en mettant pour x successivement $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, &c.

En

En prenant Δx pour l'unité, les formules du n°. 113 donnent

$$\Sigma 1 = x,\ \Sigma x = \frac{x^2 - x}{2},\ \Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6},\ \Sigma x^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4},$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30},\ \Sigma x^5 = \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^2}{12},\ \text{\&c.}$$

Cela posé, si $\Delta x = (1+x)^2$, on a $\varsigma = c + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$; & si l'on veut la somme depuis le premier terme inclusivement, il est clair que cette somme doit être nulle lorsque $x = 0$, ce qui donne $c = 0$, & pour la somme des x premiers termes de la suite des quarrés des nombres naturels, $\frac{x + 3x^2 + 2x^3}{6}$.

Si $\Delta x = (1+x)^3$, on a $\varsigma = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$, si l'on veut la somme depuis le premier terme inclusivement, ou la somme des x premiers termes de la suite des cubes des nombres naturels.

(125). La fraction $\frac{2}{(x+1)(x+2)}$ est le terme général de la suite $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$, &c. dont les dénominateurs sont les nombres triangulaires; donc pour trouver la somme d'un nombre quelconque de termes de cette suite, on aura l'équation $\varsigma = c + \Sigma \frac{2}{(x+1)(x+2)} =$ (n°. 115) $c - \frac{2}{x+1}$; & si on la veut depuis le premier terme inclusivement, elle doit être nulle lorsque $x = 0$, ce qui donne $c = 2$, & pour la somme complète $\frac{2x}{x+1}$. On demande la somme de la même suite depuis le terme m exclusivement? Il faut la prendre de manière qu'elle soit nulle lorsque $x = m$, ce qui donne $c = \frac{2}{m+1}$, & pour la somme complète dans cette hypothèse $\frac{2}{m+1} - \frac{2}{x+1} = \frac{2x}{x+1} - \frac{2m}{m+1}$. On fera $x = m + n$ dans cette formule, & on aura la somme de n termes de la suite proposée depuis le terme m exclusivement.

Suites des nombres figurés.	*Termes généraux.*
$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$, &c.	$\frac{1 \cdot 2}{(x+1)(x+2)}$,
$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{35}, \frac{1}{56}$, &c.	$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,
$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{70}, \frac{1}{126}$, &c.	$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$,
$1, \frac{1}{6}, \frac{1}{21}, \frac{1}{56}, \frac{1}{126}, \frac{1}{252}$, &c.	$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$;
&c.	&c.

Sommes complètes depuis le premier terme inclusivement.

$2 - \frac{1 \cdot 2}{(x+1)}$,

$\frac{3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{(x+1)(x+2)}$,

$\frac{4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

$\frac{5}{4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$,

&c.

On voit que la sommation d'une suite dont on connoît le terme général dépend de pouvoir trouver la somme d'une différence proposée; mais il ne nous est pas encore possible de traiter ces questions avec toute l'étendue dont elles sont susceptibles.

(126). Dans les articles précédens, nous avons supposé que les ordonnées étoient également distantes, ou que la suite A, $A1$, $A2$, &c. provenoit de la substitution de 0, 1, 2, 3, 4, &c. au lieu de x dans le terme général; si on vouloit que ces ordonnées ne fussent pas également distantes, on nommeroit a, b, c, d, e, &c. leurs distances à un point fixe, ou a, b, c, d, e, &c. les quantités à substituer pour x dans le terme général d'où naîtroit la suite A, $A1$, $A2$, &c. On feroit ensuite.

$\frac{A1 - A}{b - a} = B$, $\frac{A2 - A1}{c - b} = B1$, $\frac{A3 - A2}{d - c} = B2$, $\frac{A4 - A3}{e - d} = B3$, &c.

$\frac{B1 - B}{c - a} = C$, $\frac{B2 - B1}{d - b} = C1$, $\frac{B3 - B2}{e - c} = C2$, &c.

$\frac{C1 - C}{d - a} = D$, $\frac{C2 - C1}{e - b} = D1$, &c.

$\frac{D1 - D}{e - a} = E$, &c.

&c.

On tireroit de la première $A1 = A + B(b - a)$, de la seconde $A2 = A + B(c - a) + C(c - a)(c - b)$, de la troisième $A3 = A + B(d - a) + C(d - a)(d - b) + D(d - a)(d - b)(d - c)$, &c.; d'où l'on concluroit facilement qu'en nommant Y l'ordonnée dont la distance au point fixe seroit x, on auroit

$$Y = A + B(x - a) + C(x - a)(x - b) + D(x - a)(x - b)(x - c) + E(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + \&c.$$

Nous ferons usage de cette formule pour déterminer l'instant du solstice par quelques hauteurs méridiennes du soleil.

Hauteurs du centre du soleil, corrigées de la réfraction & de la parallaxe pour les jours suivans du mois de juin 1788 :

16 juin	...	64° 33′ 47″, 1	A
18	...	36 36, 8	$A1$
20	...	37 42, 8	$A2$
23	...	36 17, 5	$A3$
25	...	33 16, 5	$A4$

Nous désignerons par a, b, c, d, e les intervalles des observations, & nous aurons $a = 0$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 7$, $e = 9$; partant

$A1 - A = 2' 49'', 7 = 169'', 7$, d'où $B = 84,85$,
$A2 - A1 = 1\ 6 = 66$, $B1 = 33$,
$A3 - A2 = -1\ 25, 3 = -85,3$, $B2 = -28,4333$,
$A4 - A3 = -3\ 1 = -181$, $B3 = -90,5$.

Nous trouverons ensuite

$$C = \frac{-51,85}{4} = -12,9625,\quad D = \frac{0,6759}{7} = 0,0966,$$

$$C1 = \frac{-61,4333}{5} = -12,2866,\quad D1 = \frac{-0,1267}{7} = -0,0181;$$

$$C2 = \frac{-62,0667}{5} = -12,4133;\quad E = \frac{-0,1167}{9} = -0,01276;$$

& $Y = A + 84,85\,x - 12,96\,x(x-2) + 0,1\,x(x-2)(x-4) - 0,01\,x(x-2)(x-4)(x-7)$.

Or comme cette valeur de Y doit être un plus grand, on aura (n°. 119) $\delta y = 0$; ou, divisant par δx,

$$84,85 - 12,96(2x-2) + 0,1[(x-2)(x-4) + x(x-4) + x(x-2)] - 0,01[(x-2)(x-4)(x-7) + x(x-4)(x-7) + x(x-2)(x-7) + x(x-2)(x-4)] = 0,$$

équation du troisième degré qu'on réduira facilement à celle-ci

$$4x^3 - 69x^2 + 2812x - 11213 = 0,$$

de laquelle on tirera $x = 4,33$, & pour la valeur de Y à l'instant du solstice

$$Y = 64° 37' 44'', 15.$$

CHAPITRE IV.

DE LA MÉTHODE DES ANCIENS GÉOMÈTRES CONNUE SOUS LE NOM DE MÉTHODE DES LIMITES.

(127). ON dit d'une grandeur qu'elle a pour limite une autre grandeur, quand on conçoit qu'elle peut en approcher jusqu'à n'en différer que d'une quantité aussi petite qu'on voudra, sans pouvoir jamais coïncider avec elle. Il suit de cette définition que deux grandeurs qui sont la limite d'une même grandeur, sont nécessairement égales entr'elles; car s'il y avoit entr'elles quelque différence, la troisième ne pourroit approcher de l'une des deux de plus près que de cette différence, ce qui est contre l'hypothèse. Une autre proposition, qui n'est pas moins évidente, c'est que si deux grandeurs, qui croissent ou décroissent continuellement, conservent entr'elles la même raison invariable, cette raison sera celle des limites des deux grandeurs. C'est sur ces deux propositions que toute la méthode des limites est fondée; nous commencerons par en faire usage pour démontrer quelques théorêmes de la géométrie élémentaire.

(128). Soit x le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle qui a r pour rayon, & n le nombre des côtés de ce polygone; on aura $\frac{nx}{r}$ pour le rapport du contour du polygone au rayon. Plus n augmentera, plus $\frac{nx}{r}$ approchera du rapport de la circonférence du cercle au rayon, sans pourtant y jamais parvenir; donc ce second rapport est la limite du premier. Nous nommerons π le rapport de la demi-circonférence du cercle au rayon, & $2\pi r$ désignera toujours la circonférence qui a r pour rayon.

Le rayon étant 1, on prend $\pi = 3,1415926535 \ldots\ldots$ & cette approximation est très-considérable; voici comment on y peut parvenir. En nommant p le sinus d'un arc, & q le sinus de la moitié de cet arc, on a entre p & q l'équation $p = 2q\sqrt{1 - q^2}$; au moyen de cette équation, on cherchera les sinus d'arcs continuellement sous-doubles de 30° dont on connoît le sinus. Je suppose qu'on soit arrivé au sinus d'un arc de $1'' \; 38''' \; 52^{iv} \; 37^{v} \; 1^{vi} \; 52^{vii} \; 30^{viii}$ qu'on trouvera de 0,00000798948327005; la corde de l'arc double est donc 0,0000159789665401, & cet arc est contenu dans la circonférence 393216 fois, c'est-à-dire, qu'on a inscrit dans le cercle un polygone de 393216 côtés. En multipliant la corde trouvée par ce nombre, il vient 6,2831853070319616 pour une valeur approchée, mais moindre que la circonférence. La tangente du même arc est 0,0000079894832703; on a donc 0,0000159789665406 pour un côté du polygone

polygone circonfcrit de 393216 côtés, & pour valeur approchée, mais plus grande que la circonférence, 6,2831853072285696. Ainfi le nombre par lequel on peut repréfenter exactement la circonférence, le rayon étant pris pour l'unité, eft entre les deux que nous venons de trouver ; fi l'on eût infcrit & circonfcrit des polygones d'un plus grand nombre de côtés, on auroit trouvé deux nombres moins différens encore, & une valeur de π moins éloignée du vrai rapport de la demi-circonférence du cercle au rayon.

En nommant u la flèche, on a pour la furface de tout polygone régulier, infcrit dans le cercle qui a r pour rayon, $\frac{nx}{2r}(r^2 - ru)$; & comme plus u diminuera, plus cette quantité approchera d'être égale à πr^2, il eft clair que la feconde eft la limite de la première. Mais le cercle eft auffi la limite de tous les polygones infcrits ; donc le cercle eft égal à πr^2.

(129). La furface du cône *SABDE* (*fig. XXVI*) eft la limite des furfaces de toutes les pyramides, ayant leurs fommets au point S, & pour bafe un des polygones infcrits dans le cercle *ABDE* ; & le cône eft la limite de toutes ces pyramides : fi donc on peut trouver une autre limite des furfaces de ces pyramides, & une autre limite de leurs folidités, on aura la furface & la folidité du cône.

Concevons une pyramide régulière qui ait pour arrête y, & pour bafe un des polygones réguliers infcrits dans le cercle qui a r pour rayon ; en nommant x le côté du polygone, & u la flèche, on trouvera pour la furface de cette pyramide, fans y comprendre la bafe, $\frac{nx}{2}\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$, &, à caufe de $\frac{x^2}{4} = 2ru - u^2$, $\frac{nx}{2r} r \sqrt{y^2 - 2ru + u^2}$. C'eft l'expreffion de la furface de toute pyramide régulière ; & comme cette expreffion approchera d'autant plus d'être égale à $\pi r y$, que u fera moindre, il fuit que $\pi r y$, qui en eft la limite, eft auffi la furface du cône droit, qui a r pour rayon de fa bafe, & pour côté y, fans y comprendre la bafe.

On trouvera pour l'expreffion de la folidité de toute pyramide, ayant h pour hauteur, & pour bafe le même polygone que ci-deffus, $\frac{h}{3} \cdot \frac{nx}{2r}(r^2 - ru)$, quantité dont $\frac{h}{3}\pi r^2$ eft la limite ; donc la folidité d'un cône droit ou oblique, qui a r pour rayon de fa bafe & h pour hauteur, eft égale à $\frac{h}{3}\pi r^2$. Voici quelques corollaires dont nous ferons ufage dans la fuite.

(130). Soit un cône droit tronqué à bafes parallèles, qui ait pour hauteur h', pour côté y', pour rayon de la bafe fupérieure r', & pour rayon de la bafe inférieure r. Le côté du cône entier étant y, on a pour la furface du cône tronqué,

sans y comprendre les bases, $\pi r y - \pi r' (y - y')$; mais $y' : y : y - y' :: r - r' : r : r'$; substituant pour y & $y - y'$ leurs valeurs, il vient pour la surface demandée $\pi y' \frac{r^2 - r'^2}{r - r'} = \pi y' (r + r')$.

En nommant h la hauteur du cône entier, le solide du même tronc est égal à $\frac{h}{3} \pi r^2 - \frac{h - h'}{3} \pi r'^2$; mais $h' : h : h - h' :: r - r' : r : r'$; substituant pour h & $h - h'$ leurs valeurs, il vient pour le cône tronqué $\frac{\pi h'}{3} \cdot \frac{r^3 - r'^3}{r - r'} = \frac{\pi h'}{3} (r^2 + rr' + r'^2)$.

Le triangle BPD (*fig. XXVII*) rectangle en P, en faisant un tour entier sur la ligne BD, comme sur un axe, engendrera un solide qui aura pour expression $\frac{BD}{3} \cdot \pi (PK)^2$, PK est perpendiculaire sur BD: mais la surface décrite par PD dans le même temps est égale à $\pi . PK . PD$, & $PK . BD = PD . PB$; donc le solide en question est égal à la surface décrite par PD multipliée par $\frac{BP}{3}$. Soit tirée une droite BR comme on voudra, on trouvera en menant une perpendiculaire RV sur BD, que le solide engendré par BRD est égal à $\frac{BD}{3} \cdot \pi (RV)^2$. Mais $DR : RV :: DP : PK :: BD : BP$; de plus la surface décrite par DR est égale à $\pi . RV . DR$; donc le solide engendré par BRD est égal à la surface décrite par DR multipliée par $\frac{BP}{3}$. Le solide engendré par BPR est égal à la surface décrite par PR multipliée par $\frac{BP}{3}$; car ce solide est égal au solide engendré par BPD moins le solide engendré par BRD; c'est-à-dire qu'il est égal à $\frac{BP}{3}$ multiplié par la différence de deux surfaces, dont l'une seroit décrite par PD & l'autre par RD. Or la différence de ces deux surfaces, c'est la surface décrite par PR. Il suit de tout cela que le solide engendré par un triangle quelconque BQR, tournant sur un axe BD, situé comme on voudra dans le plan BQR, est égal à la surface décrite par QR, multipliée par le tiers d'une perpendiculaire abaissée du point B sur QR prolongé s'il est nécessaire: cette proposition nous servira à trouver le solide de la sphère.

(131). Dans un demi-cercle $CAMD$ (*fig. XXVIII*) qui a r pour rayon, soit inscrit un demi-polygone régulier; on voit que dans la révolution de la figure sur l'axe AD, le demi-cercle engendrera une sphère, & le demi-polygone un solide dont la surface sera la somme de toutes les surfaces décrites par les côtés AM, MM', &c. Par le milieu des côtés du polygone, je tire les rayons CO, CO', &c., j'abaisse sur l'axe AD les perpendiculaires mp, MP, $m'p'$, $M'P'$, &c., & parallélement au même axe, je mène mn, &c. Cela posé, la

surface décrite par AM est égale à $2\pi . pm . AM$; mais les triangles semblables MPA, Cpm donnent $MA : AP :: Cm : mp$; d'où l'on tire pour la surface décrite par AM, $2\pi\, Cm . AP$. La surface décrite par MM' est égale à $2\pi . m'p' . MM'$, ou, à cause des triangles semblables $M'nM$, $Cp'm'$, à $2\pi . Cm' . PP'$; & ainsi des autres. Si donc l'on nomme u la flèche, x l'abscisse AR correspondante à un arc quelconque AQ, laquelle abscisse est la somme de toutes les lignes AP, PP', &c.; on aura pour la surface décrite par les côtés AM, MM', &c. $2\pi x(r-u)$, & pour la surface de tout le solide $4\pi r(r-u)$. Ces quantités ont pour limites, l'une $2\pi r x$, l'autre $4\pi r^2$; mais la surface décrite par l'arc AQ est aussi la limite de la première quantité, comme la surface décrite par la demi-circonférence est la limite de l'autre, ou des surfaces que peuvent décrire dans la même révolution les contours des demi-polygones inscrits. Donc la surface de la calotte qui a pour flèche x, est égale à $2\pi r x$; & la surface de la sphère à $4\pi r^2$, ou à quatre fois la surface d'un de ses grands cercles.

Il faut remarquer que dans la révolution de la figure sur l'axe AD, chaque triangle, comme MCM', engendrera un solide qui sera égal à la surface décrite par le côté MM' multipliée par le tiers de la hauteur Cm' du triangle; & par conséquent que le solide engendré par une partie ACQ du polygone est égal à $\frac{2}{3}\pi x(r-u)^2$, & le solide entier à $\frac{4}{3}\pi r(r-u)^2$, quantités qui ont pour limites, l'une $\frac{2}{3}\pi r^2 x$, l'autre $\frac{4}{3}\pi r^3$. Mais le secteur sphérique engendré par ACQ est la limite de la première quantité, comme la sphère est la limite de l'autre, ou de tous les solides que peuvent engendrer dans la révolution de la figure sur l'axe AD les demi-polygones inscrits. Donc le solide d'un secteur qui a x pour flèche, est égal à $\frac{2}{3}\pi r^2 x$, & le solide de la sphère à $\frac{4}{3}\pi r^3$, ou au solide d'un cône qui auroit pour base un des grands cercles de la sphère, & pour hauteur le double du diamètre.

(132). Soit un demi-cercle ASB & une demi-ellipse ARB (*fig. XXIX*); je nomme a l'axe commun au cercle & à l'ellipse, & b l'autre axe de l'ellipse. J'inscris dans le cercle un polygone dont NS est un des côtés; j'abaisse des perpendiculaires NP, SQ sur l'axe AB; je tire des lignes telles que MR; & de cette manière j'inscris dans l'ellipse un polygone correspondant. Cela posé par la propriété du cercle & de l'ellipse, on a $PN : PM :: a : b$, & $PN : QS :: PM : QR$; donc $PN + QS : PM + QR :: a : b$, & le trapèze $NPQS$: au trapèze $MPQR :: a : b$. On voit évidemment que tout polygone inscrit dans le cercle, est au polygone correspondant inscrit dans l'ellipse $:: a : b$; voilà des quantités qui, soit qu'elles croissent, soit qu'elles décroissent, conservent entr'elles la même raison invariable de a à b; cette raison doit être celle de leurs limites, c'est-à-dire, du cercle & de l'ellipse.

En faisant faire à la figure une révolution entière sur l'axe AB, le demi-cercle engendrera une sphère, & la demi-ellipse une ellipsoïde. Or le cône tronqué engendré par le trapèze $NPQS$ est au cône tronqué engendré par le trapèze $MPQR$, comme $\overline{PN}^2 + PN . QS + \overline{QS}^2$ est à $\overline{PM}^2 + PM . QR + \overline{QR}^2$; ou comme $(PN + QS)^2 - PN . QS$ est à $(PM + QR)^2 - PM . QR$. Mais $(PN + QS)^2 : (PM + QR)^2 :: a^2 : b^2$, & $PN . QS : PM . QR :: a^2 : b^2$;

donc $(PN + QS)^2 - PN \cdot QS : (PM + QR)^2 - PM \cdot QR :: a^2 : b^2$. Ainsi le solide engendré par tout polygone inscrit dans le cercle, est au solide engendré par le polygone correspondant inscrit dans l'ellipse, comme a^2 est à b^2. Ces solides conservent entr'eux la même raison invariable de a^2 à b^2, qui doit être celle de leurs limites, c'est-à-dire, de la sphère & de l'ellipsoïde.

(133). Plus on augmente le dénominateur d'un rapport, plus ce rapport diminue; il approche continuellement de zéro sans jamais pouvoir y atteindre. Si je fais ce rapport $= m$ & $x = \frac{1}{m}$, je trouverai que plus m diminue, plus x augmente; & comme o est la limite de laquelle m en diminuant approche toujours, il est clair que $\frac{1}{0}$ est la limite de tous les accroissemens de la variable x. Toute quantité est susceptible d'augmentation & de diminution sans fin; en augmentant elle approche toujours d'une certaine limite, que les géomètres désignent par le mot d'*infini* & qui a pour expression $\frac{1}{0}$; l'autre limite dont toute quantité approche en diminuant, a pour expression o. Ni l'infini, ni zéro, ne sont des quantités; ce sont des limites dont les quantités peuvent approcher continuellement sans jamais se confondre avec elles. L'idée d'une quantité infiniment grande ou infiniment petite, est une absurdité. La théorie des parallèles ne peut servir qu'à confirmer ce que nous venons d'avancer.

Soit un triangle quelconque KPM (*fig. XXX*), dans lequel l'angle P & le côté PM sont constans, l'angle M & le côté PK augmentant continuellement. On a $\text{sin.}(P + M) : PM :: \text{sin.}\, M : PK = \frac{PM \cdot \text{sin.}\, M}{\text{sin.}(P + M)}$. Plus le point K s'éloignera, plus la droite MK approchera d'être parallèle à la droite PK; quelle est donc l'expression de la limite dont la droite PK, qui est susceptible d'augmentation sans fin, approche toujours sans pouvoir jamais y atteindre? On la trouvera en se rappellant que lorsque deux droites sont parallèles, les angles internes d'un même côté valent ensemble deux angles droits; c'est-à-dire, qu'on trouvera cette limite, en faisant $P + M = 180°$, ou $\text{sin.}(P + M) = 0$, dans l'expression de $PK \left(= \frac{PM \cdot \text{sin.}\, M}{\text{sin.}(P + M)}\right)$, qui devient par-là $\frac{1}{0}$ ou infinie.

(134). Lorsqu'une branche de courbe, qui s'étend à l'infini, a une asymptote, elle s'en approche sans cesse, sans pouvoir l'atteindre. Si nous concevons que cette asymptote est la ligne des abscisses, & qu'à un des points du cours infini, nous menions une tangente qui rencontre la ligne des abscisses; il est clair que plus l'abscisse augmentera, plus la tangente correspondante approchera de se confondre avec l'asymptote; & ces deux lignes parviendroient enfin à coïncider parfaitement, si l'abscisse pouvoit devenir infinie.

On demande la somme d'une série à l'infini, que cela peut-il signifier? Je prends pour exemple la série $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} +$ &c. dont nous avons trouvé la somme d'un nombre x de termes égale à $2 - \frac{1 \cdot 2}{x + 1}$; si je fais $x = \frac{1}{0}$ dans cette formule, elle devient égale à 2; donc plus on prendra de termes de la

la férie, plus la fomme de ces termes approchera d'être égale à 2 ; ce nombre eft la limite dont on approchera toujours fans pouvoir y parvenir, ou, ce qui revient au même, la fomme de la férie à l'infini. On trouvera de la même manière les fommes des autres féries du n°. 125 à l'infini, & on aura

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{56} + \&c. = \tfrac{3}{2},$$
$$1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{70} + \tfrac{1}{126} + \&c. = \tfrac{4}{3},$$
$$1 + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{126} + \tfrac{1}{252} + \&c. = \tfrac{5}{4},$$

&c. Il y a des féries dont la fommé à l'infini eft l'infini même ; telle eft celle des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. dont le terme général eft $1 + x$, & dont la fomme d'un nombre quelconque de termes, depuis le premier inclufivement, eft $x \cdot \frac{x+1}{2}$; car en y faifant $x = \frac{1}{0}$, cette fomme devient $\frac{1}{0}$.

(135). Suppofons deux rapports m & n liés entr'eux de manière que l'un ne puiffe augmenter ou diminuer fans que l'autre augmente ou diminue ; la limite dont $\frac{m}{n}$ approchera, dans les deux cas où m & n approcheront de zéro ou de l'infini, pourra être repréfentée par $\frac{0}{0}$. Or comme un rapport étant donné, on peut toujours trouver d'autres rapports qui en approchent fans ceffe fans pouvoir jamais fe confondre avec lui, c'eft-à-dire dont il eft la limite; il eft clair que $\frac{0}{0}$ peut repréfenter toute forte de rapports. Nous avons vu dans la théorie des tangentes du n°. 19, que la fous-tangente fe préfentoit généralement fous la forme de $\frac{0}{0}$, qui, pour chaque courbe particulière, prenoit une valeur déterminée.

Dans la folution des problêmes, on eft fouvent conduit à des réfultats qui fe préfentent fous la forme de $\frac{0}{0}$, faute d'avoir été réduits à leurs plus fimples termes. Ce réfultat, par exemple, $\frac{1 - \text{fin.}\, x + \text{cos.}\, x}{\text{fin.}\, x + \text{cos.}\, x - 1}$ devient $\frac{0}{0}$, lorfque x eft un arc de 90°. Mais fi je lui donne cette autre forme

$$\frac{1 - \text{fin.}\, x + \sqrt{1 - \text{fin.}\, x^2}}{\text{fin.}\, x - 1 + \sqrt{1 - \text{fin.}\, x^2}} = \frac{1 - \text{fin.}\, x + \sqrt{(1 - \text{fin.}\, x)(1 + \text{fin.}\, x)}}{\text{fin.}\, x - 1 + \sqrt{(1 - \text{fin.}\, x)(1 + \text{fin.}\, x)}} =$$

$$\frac{\sqrt{1 - \text{fin.}\, x} + \sqrt{1 + \text{fin.}\, x}}{\sqrt{1 + \text{fin.}\, x} - \sqrt{1 - \text{fin.}\, x}},$$ on voit que dans le cas de $x = 90$, ou de $\text{fin.}\, x = 1$; il devient $= 1$. Par ces transformations, nous avons réduit la fraction propofée à fa plus fimple expreffion, en divifant le numérateur & le dénominateur par un facteur commun $\sqrt{1 - \text{fin.}\, x}$, qui devenant o dans l'hypothèfe de $\text{fin.}\, x = 0$, faifoit que dans cette hypothèfe la fraction fe préfentoit fous la forme de $\frac{0}{0}$. De même la fraction $\frac{a^3 + 2a^2x - ax^2 - 2x^3}{a^3 - a^2x - 2ax^2 + 2x^3}$ devient $\frac{0}{0}$ lorfqu'on fait $x = a$. Mais en la réduifant à fes moindres termes, en divifant le numérateur & le dénominateur

par le facteur commun $a - x$, on trouve $\frac{a^2 + 3ax + 2x^2}{a^2 - 2x^2}$, qui dans le cas de $x = a$, a pour valeur -6. Il n'est pas toujours facile de découvrir ce facteur commun ; mais la méthode des limites nous donnera les moyens de résoudre généralement ce problême : étant donné une fonction qui devient $\frac{0}{0}$ dans certains cas particuliers, trouver quelle est alors la valeur de cette fonction ?

(136). Ces principes posés, nous pouvons présenter la théorie des tangentes sous une autre forme en admettant toutes les constructions du n°. 19 : c'est-à-dire, qu'ayant décrit la courbe (*fig. VII*), on abaissera deux ordonnées perpendiculaires *MP*, *NQ* ; on tirera une corde *MN* qu'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne des abscisses, une tangente *MT* & une perpendiculaire *MO* à *QN*. Selon que la courbe est concave ou convexe vers *AB*, le rapport de *MP* à *PT* est plus ou moins grand que celui de *MP* à *PS*, qui, à cause des triangles semblables *MPS*, *NOM*, est égal au rapport de *NO* à *OM*. Mais plus *N* sera proche de *M*, plus *S* sera proche de *T*, & moins ces deux rapports différeront. Le rapport de *NO* à *OM* pourra approcher de celui de *MP* à *PT* aussi près qu'on voudra, sans cependant coïncider avec lui. Ce second rapport est donc la limite du premier : & comme le rapport de *NO* à *OM* est le rapport entre les différences des deux co-ordonnées *MP*, *y*, *AP*, *x* ; il est clair que pour trouver le rapport entre l'ordonnée & la sous-tangente, il faut chercher, au moyen de l'équation de la courbe, la limite du rapport entre les différences de l'ordonnée & de l'abscisse.

Je prends pour exemple l'équation $y^m = Cx$ qui est celle de toutes les paraboles lorsque l'exposant m est un nombre positif entier ou fractionnaire, & de toutes les hyperboles lorsqu'il est un nombre négatif. On trouve

$$my^{m-1}\Delta y + m \cdot \frac{m-1}{2} y^{m-2} \Delta y^2 + \&c. = C\Delta x, \&$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{C} \cdot (my^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} y^{m-2} \Delta y + \&c.).$$

Or plus Δx & Δy diminueront, plus le rapport entre ces différences approchera de celui dans lequel il se changeroit si l'on faisoit $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, sans y jamais parvenir. Donc dans l'exemple actuel $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ a pour limite $\frac{m}{C} y^{m-1}$; & la sous-tangente de la courbe qui a pour équation $y^m = Cx$, est égale à $\frac{m}{C} y^m = mx$.

(137). Si la courbe proposée est du second ordre, elle a pour équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

d'où l'on tire (n°. 107) $\frac{\Delta x}{\Delta y} = - \frac{bx + 2cy + e + c\Delta y}{2ax + by + d + a\Delta x + b\Delta y}$, lequel rapport a pour limite $- \frac{bx + 2cy + e}{2ax + by + d}$. Mais ce même rapport a aussi pour limite $\frac{PT}{y}$; donc $PT = - \frac{bxy + 2cy^2 + ey}{2ax + by + d}$.

De l'expreffion de PT, on tire celle de $AT = PT - x$ & celle de la tangente At qui eft égale à $\frac{y \cdot AT}{PT}$. Ainfi dans cet exemple

$$AT = \frac{ey + dx - 2f}{2ax + by + d} \quad \& \quad At = \frac{-ey - dx + 2f}{bx + 2cy + e}.$$

Lorfque la courbe a une afymptote, on trouvera le point h où cette afymptote rencontre l'axe, en faifant x & y infinis dans l'expreffion de AT; & le point E où elle rencontre une tangente au point A, en faifant les mêmes fuppofitions dans l'expreffion de At. Or lorfque y & x font infinis, la propofée eft réduite à $c\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + a = 0$; AT & At deviennent

$\dfrac{e\frac{y}{x} + d}{b\frac{y}{x} + 2a}$ & $-\dfrac{e\frac{y}{x} + d}{2c\frac{y}{x} + b}$, où il faudra mettre pour $\frac{y}{x}$ fa valeur

$-\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$; on aura de cette manière

$$AK = \frac{2cd - e(b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})}{4ac - b(b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})},\ AE = \frac{-2cd + e(b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})}{\pm 2c\sqrt{b^2 - 4ac}};$$

ou, faifant pour fimplifier $b = 0$, $e = 0$, $AK = \frac{d}{2a}$, $AE = \mp \frac{d}{2\sqrt{-ac}}$.

On voit donc aifément que dans le cas de l'ellipfe, où a & c font pofitifs, l'expreffion de AE eft imaginaire; que dans le cas de la parabole, où l'une de ces quantités a ou c eft nulle, les expreffions de AK & AE font infinies; donc entre les fections coniques, la feule hyperbole a deux afymptotes, qu'on conftruira en tirant du centre deux lignes qui coupent la tangente au point A, de manière que de part & d'autre de ce point on ait $AE = \frac{d}{2\sqrt{-ac}}$. Ce réfultat eft bien conforme à ce que nous avons démontré d'une autre manière (n°. 32).

(138). Nous avons expofé dans le n°. 19 la manière de tirer de l'expreffion de la fous-tangente, celles de la fous-normale, de la normale & de la tangente. Mais pour achever de calculer tout le triangle rectangle TPM, nous remarquerons qu'il donne encore ces deux proportions, $TP : PM :: 1 : \text{tang. } PTM$, $PM : PT :: 1 : \text{tang. } PMT$; donc tang. PTM & tang. PMT ont pour valeurs les limites de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ & de $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. La première eft nulle, lorfque la tangente au point M eft parallèle à la ligne des abfciffes; c'eft la limite de $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ qui eft nulle, lorfque cette même tangente eft parallèle aux ordonnées. Pour les courbes du fecond ordre, on trouvera le point où la tangente eft parallèle à la ligne des

abſciſſes, en faiſant $2ax+by+d=0$, & le point où la tangente eſt parallèle aux ordonnées, en faiſant $bx+2cy+e=0$; équations qu'on combinera avec $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, pour avoir dans l'un & l'autre cas les valeurs de y & x. En faiſant, pour abréger, b, e, f nuls, on tire de la première $x=-\frac{d}{2a}$, & par conſéquent $y^2=\frac{d^2}{4ac}$, qui n'eſt poſitif que lorſque a & c ſont l'un & l'autre poſitifs, ou l'un & l'autre négatifs. Dans l'hyperbole, l'un étant poſitif, l'autre eſt négatif; dans la parabole, l'un ou l'autre eſt nul; donc l'ellipſe ſeule a deux tangentes parallèles à la ligne des abſciſſes, ce ſont celles qui paſſent par les extrêmités du ſecond axe. On tire de la ſeconde équation $y=0$, & on a par conſéquent $ax^2+dx=0$, d'où $x=0$, & $x=-\frac{d}{a}$. Donc l'ellipſe & les hyperboles oppoſées ont les deux tangentes, qui paſſent par les extrêmités du grand axe, parallèles aux ordonnées. La parabole a auſſi une tangente parallèle aux ordonnées, c'eſt celle qui paſſe par ſon ſommet.

Si les ordonnées MP, NQ étoient à un diamètre quelconque, à cauſe des parallèles MP, NQ, on n'en auroit pas moins $\Delta y : \Delta x :: y : PS$; & PT égal à y multiplié par la limite du rapport entre les différences Δx, Δy. On trouveroit auſſi $TP : PM ::$ ſin. TMP : ſin. T; d'où l'on concluroit que la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eſt nulle lorſque la tangente eſt parallèle à la ligne des abſciſſes, & que c'eſt la limite de $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ qui eſt nulle lorſque la tangente eſt parallèle aux ordonnées. On généraliſera donc la propoſition précédente, & on dira : dans l'ellipſe toute tangente à l'extrêmité d'un diamètre conjugué eſt parallèle à l'autre diamètre qui eſt la ligne des abſciſſes; dans l'ellipſe & les hyperboles oppoſées, les tangentes aux deux points où un diamètre rencontre la courbe ſont parallèles aux ordonnées à ce diamètre; dans la parabole, la tangente au point où un diamètre rencontre la courbe eſt parallèle aux ordonnées à ce diamètre.

(139). Nous propoſerons d'autres exemples tirés de courbes d'ordres ſupérieurs; & d'abord nous diſcuterons celle qui a pour équation $a(y-b)^2-x(x-a)^2=0$. On en tire l'équation aux différences

$$2a(y-b)\Delta y-(3x-a)(x-a)\Delta x+a\Delta y^2-(3x-2a)\Delta x^2-\Delta x^3=0;$$

puis $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(3x-a)(x-a)+(3x-2a)\Delta x+\Delta x^2}{2a(y-b)+a\Delta y}$,

lequel rapport a pour limite $\frac{(3x-a)(x-a)}{2a(y-b)}$.

Dans la diſcuſſion d'une courbe, il faut en examiner tous les points; au point où $x=a$, & où par conſéquent $y=b$, la limite que nous venons de trouver ſe préſente ſous la forme de $\frac{0}{0}$; en conclurons-nous que dans ce cas la méthode ne réſout pas le problême? Mais au point où $x=a$ & où $y=b$, l'équation aux différences ſe réduit à $a\Delta y^2-a\Delta x^2-\Delta x^3=0$, d'où l'on

l'on tire $\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = 1 + \frac{\Delta x}{a}$, & pour la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ± 1. Donc au point dont il s'agit, la limite est donnée par une équation du second degré dont les deux racines sont égales & de signes différens, ce qu'on ne peut construire qu'en imaginant qu'il passe par ce point M (*fig. XXXI*) deux branches qui se coupent de manière qu'en menant deux tangentes MT, Mt & une ordonnée MP, on ait $PT = Pt$. Donc toutes les fois que pour un point la limite est donnée par une équation du second degré, il y passe deux branches de la courbe, à moins que les deux racines de l'équation ne soient imaginaires; si étant réelles, elles sont égales & de même signe, les deux branches ne s'y couperont point, elles ne feront que s'y toucher. Le point qui est commun à deux branches d'une même courbe s'appelle *point double*.

Soit proposée la courbe qui a pour équation $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$, & dont l'équation aux différences est $(4y^3 - 2axy)\,\Delta y + (3bx^2 - ay^2)\,\Delta x + (6y^2 - ax)\,\Delta y^2 - 2ay\,\Delta x\,\Delta y + 3bx\,\Delta x^2 + 4y\,\Delta y^3 - a\,\Delta x\,\Delta y^2 + b\,\Delta x^3 + \Delta y^4 = 0$; on demande de lui mener une tangente au point où $x = 0$ & $y = 0$? Il est clair que ces suppositions réduisent l'équation aux différences à celle-ci $b\,\Delta x^3 - a\,\Delta x\,\Delta y^2 + \Delta y^4 = 0$; & si l'on représente par $\frac{p}{q}$ la limite du rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, on aura pour la déterminer l'équation du troisième degré $b\left(\frac{p}{q}\right)^3 - a\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, dont les trois racines $\frac{p}{q} = 0$, $\frac{p}{q} = +\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{p}{q} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ indiquent qu'il passe par ce point trois branches de la courbe, qui s'y coupent de manière que l'une d'elles a sa tangente au point en question parallèle aux ordonnées. Le point par lequel passent trois branches d'une même courbe s'appelle un *point triple*.

(140). Si la courbe dont on demande les affections est de l'ordre n, le rapport entre les co-ordonnées sera donné par l'équation α du n°. 107, & celui entre les différences finies par l'équation C, de laquelle on tire en général $\frac{p}{q} = \frac{-B}{A}$. Mais si pour un point déterminé de cette courbe les valeurs particulières de y & x rendent nuls en même temps A & B, les deux termes $A\,\Delta x + B\,\Delta y$ n'entreront plus dans l'équation C, & la limite du rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ne pourra être tirée que de l'équation $C\left(\frac{p}{q}\right)^2 + D\left(\frac{p}{q}\right) + E = 0$; cette limite ne pourra être tirée que de l'équation du troisième degré $F\left(\frac{p}{q}\right)^3 + G\left(\frac{p}{q}\right)^2 + H\left(\frac{p}{q}\right) + I = 0$, si les mêmes suppositions font disparoître en outre C, D, E; & ainsi de suite. Le degré de la multiplicité du point sera le même que le degré de l'équation qui renferme la limite : or l'équation entre les co-ordonnées étant du degré n,

celle entre les différences est du même degré ; s'ensuit-il que la courbe du degré n puisse avoir des points d'une multiplicité égale à n ? Si cela étoit, on tireroit alors la limite du rapport entre les différences, de l'équation

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^n + b\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + c\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \cdots\cdots + g = 0,$$

où les co-efficiens $a, b, \ldots . g$ sont constans indépendamment d'aucune supposition faite sur les co-ordonnées. Mais cette équation pouvant toujours se décomposer en un nombre n d'équations du premier degré, indique que le point en question n'appartient point à la courbe, mais au systême d'un nombre n de lignes droites qui se coupent en ce point. Donc la courbe du degré n ne peut avoir de point d'une multiplicité supérieure à $n-1$; les courbes du second degré ne peuvent avoir de points multiples ; celles du troisième degré ne peuvent avoir que des points doubles ; celles du quatrième degré que des points doubles & des points triples, &c.

(141). Une courbe d'un degré quelconque étant proposée, on demande d'en déterminer les points multiples ? Soit toujours α l'équation de la courbe, & $\mathfrak{C}$ l'équation qui renferme le rapport entre les différences des co-ordonnées ; on fera $A = 0$, $B = 0$, & on aura autant de points multiples qu'on trouvera de valeurs différentes de y, qui avec les valeurs de x correspondantes, satisferont à l'équation α ; on comprend dans ces valeurs différentes de y, celles qui étant égales diffèrent par le signe, & celles qui étant égales & de même signe, répondent à des abscisses différentes. Mais ne considérons qu'un seul point, en ne supposant qu'une valeur à x & une à y ; si ces valeurs tirées des équations $A = 0$, $B = 0$, ne satisfont qu'à α, le point sera double ; il sera triple si elles rendent nuls aussi les co-efficiens C, D, E ; quadruple si ces valeurs satisfont à l'équation α & rendent nuls les co-efficiens C, D, E, F, G, H, I ; & ainsi de suite.

Pour trouver les points multiples de la courbe qui a pour équation $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$, on fera dans l'équation aux différences $y - b = 0$, $(3x - a)(x - a) = 0$; & comme les seules valeurs $y = b$, $x = a$ satisfont à la proposée, la courbe n'a qu'un point multiple & ce point est double. On s'y prendra de la même manière pour trouver les points multiples de la courbe qui a pour équation $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$. On fera dans l'équation aux différences $4y^3 - 2axy = 0$, $3bx^2 - ay^2 = 0$; & comme $x = 0$, $y = 0$ sont les seules valeurs qui satisfassent à la proposée, & qu'en même temps ces valeurs font disparoître les termes de l'équation aux différences affectées de Δx^2, $\Delta x \Delta y$, Δy^2, il s'ensuit que la courbe n'a qu'un point multiple à l'origine des co-ordonnées & que ce point est triple.

On propose encore de trouver les points multiples de la courbe qui a pour équation $hy^3 - x^3 y - ix^3 = 0$? On formera l'équation aux différences

$$(3hy^2 - x^3)\Delta y - (3x^2 y + 3ix^2)\Delta x + 3hy\Delta y^2 - 3x^2 \Delta x \Delta y - (3xy + 3ix)\Delta x^2 + h\Delta y^3 - (y+i)\Delta x^3 - 3x\Delta x^2 \Delta y - \Delta y \Delta x^3 = 0 ;$$

on fera ensuite $3hy^2 - x^3 = 0$, $3x^2(y + i) = 0$, & prenant les valeurs $x = 0$, $y = 0$, qui seules satisfont à la proposée, on trouvera que l'équation aux

différences est réduite à $h \Delta y^3 - i \Delta x^3 - \Delta y \Delta x^2 = 0$, d'où l'on tire pour l'équation qui renferme la limite $\left(\frac{p}{q}\right)^3 = \frac{h}{i}$, qui n'a qu'une seule racine réelle $\frac{p}{q} = \sqrt[3]{\frac{h}{i}}$. Ainsi il ne passe effectivement qu'une seule branche de la courbe par l'origine des co-ordonnées; & la proposition énoncée ci-dessus le sera plus exactement en disant que le degré de la multiplicité d'un point est égal au nombre des racines réelles de l'équation qui renferme la limite.

(142). Les exemples précédens sont tirés de courbes algébriques, ou de courbes dont l'équation entre les co-ordonnées est algébrique. Si ces équations sont d'un autre genre telles que celles-ci: $y = \log. x$, on entend le logarithme de x, $y = \sin. x$, $y = \cos. x$, $y = A \sin. x$, $y = A$ tang. x, &c. en désignant par $A \sin. x$, A tang. x, &c. l'arc qui a pour sinus x, l'arc qui a pour tangente x, &c. tout se réduira encore à en tirer la limite du rapport entre les différences Δy, Δx.

La courbe qui a pour équation $y = \log. x$ a été nommée logarithmique par les géomètres. Sa propriété principale est que les abscisses AP, AP', &c. (*fig. XXXII*) étant en progression arithmétique, les ordonnées PM, $P'M'$, &c. sont en progression géométrique; c'est-à-dire, que chaque ordonnée a pour logarithme l'abscisse correspondante. D'après cette définition, si nous nommons y', y'', y''', &c. les ordonnées qui répondent aux abscisses x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, &c. on aura $\div y : y' : y'' : y'''$: &c. & $y' - y : y'' - y'$: &c. : : $y : y'$: &c. En général, soient y & z deux ordonnées de cette courbe, x & u les abscisses correspondantes, y' & z' ce que deviennent les ordonnées lorsque les abscisses deviennent $x + \rho$ & $u + \rho$; on aura $y' - y : z' - z : : y : z$; c'est-à-dire, que quelle que soit la différence de l'abscisse, pourvu qu'on regarde cette différence comme une quantité constante, la raison entre les différences de deux ordonnées, sera celle de ces ordonnées mêmes. On tire delà que $\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{\Delta z}{\Delta x} : : y : z$. Ces rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ conservant entr'eux la même raison invariable, cette raison doit être celle de leurs limites; & on doit avoir y à z dans le même rapport que la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ à la limite de $\frac{\Delta z}{\Delta x}$. Ainsi dans toute logarithmique les sous-tangentes sont égales entr'elles; & la limite du rapport entre les différences de l'ordonnée & de l'abscisse, est proportionnelle à l'ordonnée.

Donc le rapport entre deux variables y & x étant donné par l'équation $x = \log. y$, on a $\frac{q}{p} = y$, en prenant la sous-tangente de la logarithmique pour l'unité. Dans les tables de logarithmes les plus ordinaires, la sous-tangente est égale à 0,43429448. On a aussi calculé des tables d'après la supposition de la sous-tangente prise pour l'unité, & on a donné aux logarithmes qu'elles renferment le nom de logarithmes hyperboliques pour des raisons que nous dirons dans un moment. Quoi qu'il en soit, ce signe log. mis devant une quantité, indiquera toujours dans la suite le logarithme hyperbolique de cette quantité.

On a donné le nom d'exponentielles aux quantités élevées à une puissance dont l'exposant est variable; telles sont a^x, y^x; & celles-ci a^{x^y}, y^{x^u}, &c. qu'on appelle quantités exponentielles du second degré, parce que les exposans sont eux-mêmes des exponentielles du premier degré; comme on appelle exponentielles du degré n, celles dont les exposans sont des exponentielles du degré $n - 1$. On demande de trouver la limite du rapport entre les différences des variables y & x, le rapport entre ces quantités étant donné par l'equation $y = a^x$? On transformera cette équation en celle-ci log. $y = x$ log. a, d'où l'on tire

$$\frac{q}{p} = y \text{ log. } a = a^x \text{ log. } a.$$

(143). Plus le point N (*fig. VII*) approchera du point M, plus ces deux rapports, celui de la corde MN à MO, & celui de l'arc MN à la même ligne MO, approcheront de l'égalité; en sorte qu'ils seront égaux lorsque la différence de l'abscisse sera nulle. Mais le rapport de la corde MN à MO a pour limite le rapport de MT à TP, qui, à cause des triangles semblables MTP, RMP, est égal à celui de la normale MR à MP; de plus l'arc MN est la différence de l'arc AM; donc le rapport de MT à TP, ou celui de MR à MP, est la limite du rapport entre les différences de l'arc AM & de l'abscisse AP. Il n'est pas moins évident que le rapport de MT à MP, ou celui de MR à RP, est la limite du rapport entre les différences de l'arc AM & de l'ordonnée PM.

Donc, à cause de $PT = y\frac{p}{q}$, $RP = \frac{yq}{p}$, si l'on nomme $\frac{s}{p}$ & $\frac{s}{q}$ les limites des rapports entre les différences de l'arc & de l'abscisse, de l'arc & de l'ordonnée, on aura $MT = \frac{ys}{q}$, $MR = \frac{ys}{p}$. Mais le rapport de la corde MN à MO, ou $\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$ a aussi pour limite $\sqrt{1 + \frac{q^2}{p^2}}$; donc

$$\frac{MT}{TP} = \frac{MR}{MP} = \frac{s}{p} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p}; \text{ donc } s = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

(144). Soit AM un arc de cercle qui a le point R pour centre, MR pour rayon, MP pour sinus, RP pour cosinus, lequel a la même différence que l'abscisse, cette différence étant prise négativement; il suit de ce que nous venons de démontrer, 1°. que le rapport du rayon au sinus d'un arc, est la limite du rapport entre les différences de l'arc & de l'abscisse; 2°. que ce même rapport, du rayon au sinus, pris négativement, est la limite du rapport entre les différences de l'arc & du cosinus; 3°. que le rapport du rayon au cosinus d'un arc, est la limite du rapport entre les différences de l'arc & du sinus.

Donc le rayon étant a, si l'on nomme m l'arc de cercle AM, on aura $y =$ sin. m, $x = a -$ cos. m; puis $-\frac{s}{p}$ (égal à la limite du rapport entre les différences de l'arc & du cosinus) $= \frac{a}{\text{sin. } m}$, $\frac{s}{q}$ (égal à la limite du rapport

rapport entre les différences de l'arc & du finus) $= \frac{a}{\cos. m}$. En mettant dans ces deux formules pour fin. m & cos. m leurs valeurs, $\sqrt{2ax - x^2}$, $\sqrt{a^2 - y^2}$, on en tire lorfque la courbe eft un arc de cercle

$$\frac{s}{p} = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}, \quad \frac{s}{q} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

(145). Les courbes dont la nature ne peut être exprimée par une équation algébrique entre les co-ordonnées, ou ne peut être exprimée que par une équation algébrique entre ces co-ordonnées & les limites des rapports entre leurs différences, s'appellent *courbes tranfcendantes*. Telle eft la logarithmique qui a pour équation $x =$ log. y ou $q = py$; telle eft la *cycloïde* que l'on décrit de la manière fuivante.

On imagine que le demi-cercle *CFE* (*fig. XXXIII*), dont le diamètre *EC* eft perpendiculaire fur *EA*, roule fur cette droite *EA* jufqu'à ce que le point *C* foit parvenu en *A*; ce point *C* décrira dans ce mouvement une portion de courbe *CBA* que l'on appelle demi-cycloïde. On peut concevoir que le point *C* décrit uniformément un arc de la demi-circonférence *CFE*, tandis que le point *E* parcourt une portion de la droite *EA* : or nommant l'arc *CF*, ς, & l'ordonnée *FB*, parallèle à *EA*, u, fi pour exprimer le rapport de ces deux mouvemens uniformes, on écrit $\varsigma : u :: h : i$, on aura $\varsigma > u$, & la cycloïde accourcie, lorfque $h > i$; $\varsigma < u$, & la cycloïde alongée, lorfque $h < i$; lorfque $h = i$, la cycloïde eft fimple. On propofe de mener une tangente à un point quelconque de la cycloïde; & plus généralement, de mener une tangente à un point quelconque d'une courbe dont une des co-ordonnées eft l'arc d'une autre courbe.

(146). Soit (*fig. XXXIV*) une courbe *AM* à laquelle on fait mener les tangentes $M\theta$, & une autre courbe *AN* dont la nature eft donnée par une équation entre un arc *AM* & une droite *MN*; on demande de mener une tangente au point *N* de cette autre courbe? Ayant tiré $P'M'N'$ parallèle à *PMN* & la corde $N'NS$ qui rencontre la tangente $M\theta$ en un point *S*, je mène *Nn* parallèle à *Mt*, & les triangles femblables $N'nN$, *NMS* donnent cette proportion $N'n : nN :: NM : MS$; d'où il fuit que fi *NT* eft la tangente qu'il s'agit de mener, on doit avoir $\frac{MT}{MN} =$ à la limite du rapport $\frac{nN}{N'n}$. Nommons *AP*, x, *PM*, y, *MN*, u, l'arc *AM*, ς, & confervant à p, q, s les mêmes fignifications que ci-deffus, défignons par $\frac{r}{p}$ la limite du rapport $\frac{N'n}{PP'}$ ou $\frac{\Delta u}{\Delta x}$; nous aurons $P\theta = \frac{yp}{q}$, $M\theta = \frac{ys}{q}$, &, à caufe de $Mt : M\theta :: PP' : P\theta$, $Mt = Nn = \frac{s}{p} \Delta x$. Donc $\frac{nN}{nN'} \left(= \frac{s}{p} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta u} \right)$ a pour limite $\frac{s}{r}$; & par conféquent $MT = \frac{us}{r}$, formule abfolument analogue à celle que nous avons trouvée lorfque les co-ordonnées étoient rectilignes.

Ainsi dans la cycloïde où $\epsilon = \frac{h}{i} u$ & $\frac{s}{r} = \frac{h}{i}$, on a $MT = \frac{hu}{i} = \epsilon$. Mais si $h = i$, ou si la cycloïde est simple, $NM = MT$; le triangle NMT est isocèle & l'angle TMP est double de l'angle TNP: or si l'on tire la corde AM, les deux angles PMA & AMT étant égaux par la propriété du cercle, sont chacun moitié de l'angle TMP, & par conséquent égaux chacun à l'angle TNP; donc dans le cas de la cycloïde simple, la tangente NT est parallèle à la corde MA.

Si la nature de la courbe étoit donnée par une équation entre l'arc AM & la droite PN; en nommant PN, u, on auroit $PT' = u \frac{p}{r}$. Mais puisque par l'hypothèse les lignes $M\theta$ & $P\theta$ sont données, nommons-les d & e, & nous aurons $d = \frac{ys}{q}$, $e = \frac{yp}{q}$, d'où $p = \frac{es}{d}$; partant $PT' = \frac{eu}{d} \frac{s}{r}$.

(147). Au lieu des co-ordonnées perpendiculaires AP, x, PM, y (*fig. VII*), s'il étoit plus expédient d'en introduire deux autres, une ligne UM, tirée à un des points de la courbe d'un point fixe U pris dans le même plan, & l'angle AUM qu'elle fait avec une autre ligne AB donnée de position, on s'y prendroit de la manière suivante. On nommeroit UA, H, UM, z, l'angle AUM, ζ, l'arc AM, ϵ, les limites des rapports

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{q}{p}, \frac{\Delta \epsilon}{\Delta x}, \frac{s}{p}, \frac{\Delta z}{\Delta x}, \frac{Z}{p}, \frac{\Delta \zeta}{\Delta x}, \frac{B}{p};$$

&, à cause du triangle rectangle MPU, on auroit

$$y = z \text{ sin. } \zeta, \; x = H - z \text{ cos. } \zeta, \; \Delta y = \Delta z \text{ sin. } \zeta + z \,\Delta \text{ sin. } \zeta + \Delta z \,\Delta \text{ sin. } \zeta,$$
$$\Delta x = -\Delta z \text{ cos. } \zeta - z \,\Delta \text{ cos. } \zeta - \Delta z \,\Delta \text{ cos. } \zeta, \text{ d'où}$$

$$q = Z \text{ sin. } \zeta + z B \text{ cos. } \zeta, \; p = -Z \text{ cos. } \zeta + z B \text{ sin. } \zeta,$$

$$\& \; s = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{Z^2 + z^2 B^2}.$$

On a tang. $PTM = \frac{q}{p}$: mais le rayon étant 1, tang. $PTM = \frac{\text{sin. } PTM}{\text{cos. } PTM}$; donc sin. $PTM = \frac{q}{s}$, cos. $PTM = \frac{p}{s}$. On mettra dans ces expressions & dans celles de $PT = \frac{yp}{q}$, $PR = \frac{yq}{p}$, $MT = \frac{ys}{q}$, $MR = \frac{ys}{p}$, pour y, p, q, s leurs valeurs, & par ces substitutions ces formules seront changées en d'autres qui ne renfermeront que les nouvelles co-ordonnées & la limite du rapport entre leurs différences.

Nous donnerons dans la suite à toutes les droites telles que UM le nom de *rayon vecteur*. Si la courbe AM coupe ces rayons vecteurs en faisant avec eux tous un même angle, on aura sin. TMU constant. Or $TMU = TMP + PMU$ & sin. TMU = sin. TMP cos. PMU + cos. TMP sin. PMU; de plus

$\text{fin. } TMP = \text{cos. } PTM = \frac{p}{s}$, $\text{cos. } TMP = \text{fin. } PTM = \frac{q}{s}$; donc

$\text{fin. } TMU = \frac{p}{s} \text{ fin. } \varsigma + \frac{q}{s} \text{ cos. } \varsigma$; & comme ce finus doit être une quantité conftante, on aura $p \text{ fin. } \varsigma + q \text{ cos. } \varsigma = a s$. On transformera cette équation en celle-ci $\zeta B = a \sqrt{Z^2 + \zeta^2 B^2}$, de laquelle on tire, en faifant pour abréger $\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} = c$, $B = \frac{c Z}{\zeta}$. Mais $\frac{p}{q} = \frac{- \text{cos. } \varsigma + c \text{ fin. } \varsigma}{\text{fin. } \varsigma + c \text{ cos. } \varsigma}$;

donc $UT = PT + UP = \frac{c \zeta}{\text{fin. } \varsigma + c \text{ cos. } \varsigma}$; nous reviendrons à cette courbe dans un autre article.

(148). Soit une ligne courbe AM (*fig. XXXV*) à laquelle on fait mener une tangente $M\theta$, & une autre courbe BN, telle qu'ayant tiré CNM, la relation de CM à CN, ou de CN à la portion de courbe AM, foit exprimée par telle équation qu'on voudra ; on propofe de mener d'un point N la tangente NT? Je tire $C\theta$ qui fait avec CM un angle quelconque ς ; je nomme $M\theta$, d, $C\theta$, e, CM, u, CN, ζ, l'arc AM, ϵ, l'arc BN, τ, les limites des rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{r}{p}$, $\frac{\Delta \zeta}{\Delta x}$, $\frac{Z}{p}$, $\frac{\Delta \epsilon}{\Delta x}$, $\frac{s}{p}$, $\frac{\Delta \tau}{\Delta x}$, $\frac{t}{p}$, $\frac{\Delta \varsigma}{\Delta x}$, $\frac{B}{p}$. Cela pofé, $\text{fin. } \varsigma : \text{fin. } \theta :: d : u$;

de plus $\text{fin. } \theta = \frac{r \text{ fin. } \varsigma + u B \text{ cos. } \varsigma}{s}$; donc $\frac{u s}{d} \text{ fin. } \varsigma = r \text{ fin. } \varsigma + u B \text{ cos. } \varsigma$.

On a en outre $C\theta = CP + P\theta$, ou $e = u \text{ cos. } \varsigma - \frac{r \text{ cos. } \varsigma - u B \text{ fin. } \varsigma}{r \text{ fin. } \varsigma + u B \text{ cos. } \varsigma} u \text{ fin. } \varsigma$ $= u \text{ cos. } \varsigma - \frac{d}{s} (r \text{ cos. } \varsigma - u B \text{ fin. } \varsigma)$. Après avoir multiplié cette équation $\frac{u \text{ cos. } \varsigma - e}{d} s = r \text{ cos. } \varsigma - u B \text{ fin. } \varsigma$ par $\text{fin. } \varsigma$, on l'ôtera de celle-ci $\frac{u s}{d} \text{ fin. } \varsigma = r \text{ fin. } \varsigma + u B \text{ cos. } \varsigma$ multipliée par $\text{cos. } \varsigma$, & on aura $\frac{e s}{d} \text{ fin. } \varsigma = u B$.

On démontrera de la même manière que $\frac{CT}{TN} t \text{ fin. } \varsigma = \zeta B$; &, à caufe de $TN = \frac{\zeta t \text{ fin. } \varsigma}{Z \text{ fin. } \varsigma + \zeta B \text{ cos. } \varsigma}$, on en tirera

$$CT = \frac{\zeta^2 B}{Z \text{ fin. } \varsigma + \zeta B \text{ cos. } \varsigma} = \frac{e \zeta^2 s}{d u Z + e \zeta s \text{ cos. } \varsigma},$$

en mettant pour B fa valeur $\frac{e s}{d u} \text{ fin. } \varsigma$. Si CT doit être perpendiculaire fur CN, $\varsigma = 90^\circ$, $\text{cos. } \varsigma = 0$ & $CT = \frac{e \zeta^2 s}{d u Z}$.

Secondement, en mettant pour B sa valeur $\frac{es}{du}$ sin. ς dans l'équation $\frac{us}{d}$ sin. $\varsigma = r$ sin. $\varsigma + uB$ cos. ς, en en tire $s = \frac{dr}{u - e \text{ cos. } \varsigma}$; laquelle valeur étant substituée dans l'expression de CT trouvée plus haut, la change en celle-ci $CT = \frac{e z^2 r}{u^2 Z + e \text{ cos. } \varsigma (zr - uZ)}$, qui devient $CT = \frac{e z^2 r}{u^2 Z}$, lorsque $\varsigma = 90°$.

(149). Si on vouloit que AM fût une ligne droite, & que d'un point fixe C, pris hors de cette ligne, on tirât d'autres droites CNM telles que la partie MN fût toujours égale à la même quantité donnée a, la courbe qui passeroit par tous les points N feroit la *conchoïde* de Nicomède. Elle a pour asymptote la droite $M\theta$, car il est clair qu'elle en approchera sans cesse sans pouvoir l'atteindre : on tire de son équation $u - z = a$, $r = Z$, laquelle valeur étant substituée dans $CT = \frac{e z^2 r}{u^2 Z}$, il vient $CT = \frac{e z^2}{u^2}$ qu'on construira de la manière suivante. On mènera par le point N une parallèle à $M\theta$ qui rencontrera $C\theta$ en un point E, on tirera ME & ensuite NT parallèle à ME; NT sera tangente au point N. En effet, $CM : CN :: C\theta : CE = \frac{ez}{u}$ & $CM : CN :: CE : CT = \frac{ez^2}{u^2}$.

Si on conçoit que l'extrémité A du rayon CA (*fig. XXXVI*), mobile autour du centre C, décrive uniformément la circonférence $ABEA$, tandis qu'un point mobile parcourt aussi d'un mouvement uniforme le rayon CA allant de C vers A; ce point mobile décrira, par la composition de ces deux mouvemens, une courbe $CDNA$ à laquelle Archimède a donné le nom de *spirale*. Je suppose que le rayon CA étant en CM, le point mobile soit en N; on aura, en nommant a le rayon CA, $2\pi a$ la circonférence entière $ABEA$, CN, z, l'arc ABM, ϵ; on aura, dis-je, cette proportion $a : z :: 2\pi a : \epsilon$; d'où l'on tire $\epsilon = 2\pi z$, c'est l'équation de la spirale d'Archimède. Dans cet exemple AMK (*fig. XXXV*) est un arc de cercle qui a son centre en C; & si $\varsigma = 90°$, $M\theta$ est égal & parallèle à $C\theta$, $CM = a$, $CT = \frac{e z^2 s}{du Z} = \frac{z^2 s}{a Z}$. Mais on tire de l'équation de la courbe $\frac{s}{Z} = 2\pi$; donc $CT = \frac{2\pi z^2}{a} = \frac{z\epsilon}{a}$, qu'on construira de la manière suivante. Du centre C (*fig. XXXVI*) & du rayon CN, on décrira l'arc de cercle Nea; puis on prendra $CT = Nea$, & l'on tirera NT qui sera tangente au point N; car les secteurs semblables $CNea$, $CMEA$ donnent

$CM : CN :: MEa : Nea = CT = \frac{z\epsilon}{a}$.

(150). Si on veut avoir Ct, t étant le point où la tangente rencontre le diamètre AE, il suffira de mettre pour u, sin. ς, cos. ς, $\frac{e}{d}$, leurs valeurs

a, $\frac{-\text{fin.}\ s}{a}$, $\frac{-\text{cos.}\ s}{a}$, $\frac{a}{\text{fin.}\ s}$, dans $CT = \frac{e z^2 s}{du Z - e z s \text{cos.}\ s}$, après y avoir changé le signe de s, à cause que fin. ζ entre dans la valeur de B, & on aura $Ct = \frac{-a z^2 s}{a Z \text{fin.}\ s + z s \text{cos.}\ s}$. On trouveroit le même résultat en faisant usage des formules du n°. 147, desquelles on tire $CT = \frac{z^2 B}{Z \text{fin.}\ \zeta + z B \text{cos.}\ \zeta}$; car en y substituant à B, fin. ζ, cos. ζ, leurs valeurs $\frac{s}{a}$, $\frac{-\text{fin.}\ s}{a}$, $\frac{-\text{cos.}\ s}{a}$, on auroit $CT = \frac{-a z^2 s}{a Z \text{fin.}\ s + z s \text{cos.}\ s} = \frac{-2 \pi a z^2}{a \text{fin.}\ s + 2 \pi z \text{cos.}\ s} = \frac{-a z s}{a \text{fin.}\ s + s \text{cos.}\ s}$, en y faisant les substitutions tirées de l'équation de la courbe.

La *quadratrice* de Dinostrate résulte aussi de mouvemens uniformes. Soit un quart de cercle (*fig. XXXVII*) AMB dont le centre est C; si l'on conçoit que le rayon CA se meuve uniformément autour du centre C jusqu'à ce qu'il arrive en CB, & que pendant ce temps-là une perpendiculaire PN au rayon CA, allant de A vers C, parcoure aussi uniformément le rayon AC; l'intersection N du rayon CA, qui devient CM, & de la perpendiculaire PN, sera à une courbe ANH qui est la quadratrice dont il s'agit. De la construction de cette courbe on tire cette proportion $AMB : AM :: AC : AP$; c'est pourquoi si l'on nomme le rayon CA, a, CN, z, l'angle ACM, ζ, on aura $AMB = \frac{\pi a}{2}$, $AM = a\zeta$, $AP = a - z \text{cos.}\ \zeta$, & pour équation de la courbe, $a - z \text{cos.}\ \zeta = \frac{2 a \zeta}{\pi}$.

Donc $z B \text{fin.}\ \zeta - Z \text{cos.}\ \zeta = \frac{2 a B}{\pi}$; & si l'on en tire $\frac{B}{Z}$ pour substituer sa valeur dans $CT = \frac{z^2 B}{Z \text{fin.}\ \zeta + z B \text{cos.}\ \zeta}$, on aura $CT = \frac{z^2 \text{cos.}\ \zeta}{z - \frac{2a}{\pi} \text{fin.}\ \zeta}$. Donc

$$PT = \frac{\frac{2 a z}{\pi} \text{fin.}\ \zeta \text{cos.}\ \zeta}{z - \frac{2a}{\pi} \text{fin.}\ \zeta};$$ &, à cause de $TP : PN :: TC : Ct$, $Ct = \frac{\pi z^2}{2a}$.

Au point H, $z = CH = Ct$; donc $CH = \frac{2a}{\pi}$, ce qui détermine le point où la quadratrice rencontre le rayon CB.

(151). Soient deux droites AE, AB (*fig. XXXVIII*) données de position; sur AB comme diamètre, je décris une demi-circonférence ADB, & par le centre C, je tire DCE perpendiculaire à AB; puis je mène des droites telles que AM sur lesquelles on prendra $RN = RM$, & les points N appartiendront à une courbe connue sous le nom de *cissoïde* de Dioclès. Ayant abaissé des points N & M des perpendiculaires NP, MQ sur AB, on remarquera que RN étant

$= RM$, on doit avoir $QC = PC$, $BQ = AP$: mais $AP : PN :: AQ : QM ::$ $QM : BQ$; donc $AP : PN :: QM : AP$; d'ailleurs $\overline{QM}^2 = AQ \cdot BQ = AP \cdot (AB - AP)$; donc $\frac{\overline{AP}^3}{\overline{PN}^2} = AB - AP$. C'est pourquoi si je nomme AB, $2a$, AP, x, PN, y, j'aurai l'équation $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. On en tire l'équation aux différences

$$(4a - 2x) y \Delta y - (y^2 + 3x^2) \Delta x + (2a - x) \Delta y^2 - 2y \Delta x \Delta y - 3x \Delta x^2 - \Delta x \Delta y^2 - \Delta x^3 = 0,$$

& généralement $\frac{p}{q} = \frac{(4a - 2x)y}{y^2 + 3x^2}$; partant $PT = \frac{2ax - x^2}{3a - x}$, $AT = \frac{ax}{3a - x}$, qui deviennent l'une & l'autre $= \frac{a}{2}$, lorsque $x = a$. Ayant prolongé la tangente jusqu'à ce qu'elle rencontre AE; pour trouver At, on nommera l'angle EAB, m; & à cause de $AtT = 180° - m - ATt$, & de sin. $ATt = \frac{q}{s}$, cos. $ATt = \frac{p}{s}$, on aura sin. $AtT = \frac{p \text{ sin. } m + q \text{ cos. } m}{s}$, & par conséquent $At = \frac{q\, AT}{p \text{ sin. } m + q \text{ cos. } m}$. Si AE étoit perpendiculaire sur AM, dans le cas particulier de $x = a$ & de $m = 45°$, on auroit $At = \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{AD}{3}$.

(152). Avant de passer à d'autres applications de la méthode des limites il ne sera pas inutile de nous la rendre plus familière par quelques exemples. Prenons les variables u, x, y, z, & désignons par $\frac{p}{n}, \frac{q}{n}, \frac{r}{n}$ les limites des rapports $\frac{\Delta x}{\Delta u}, \frac{\Delta y}{\Delta u}, \frac{\Delta z}{\Delta u}$, ou par $\frac{n}{p}, \frac{q}{p}, \frac{r}{p}$ les limites des rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta z}{\Delta x}$, ou &c. On demande l'équation qui renferme le rapport entre les limites, lorsque l'équation entre les variables est $z = uy$? On en tire $\frac{\Delta z}{\Delta u} = u \frac{\Delta y}{\Delta u} + y + \Delta y$; partant $r = uq + yn$. Si on eût proposé $z = \frac{y}{u}$, d'où $uz = y, q = ur + zn$, on auroit trouvé $r = \frac{uq - yn}{u^2}$. Au moyen de la première des deux formules, nous démontrerons que si $z = ay^m$, m étant un nombre entier positif & a une constante quelconque, on doit avoir $r = amy^{m-1}q$. En effet, en faisant dans la formule dont il s'agit $u = ay$, d'où $n = aq$, on en tire $r = 2ayq$, lorsque $z = ay^2$. Lorsque $z = ay^3$, on fera $u = ay^2$, d'où $n = 2ayq$, & on aura $r = 3ay^2q$. Lorsque $z = ay^4$, on fera $u = ay^3$, d'où $n = 3ay^2q$, & on aura $r = 4ay^3q$, &c.

On propose $z = ay^{\frac{h}{i}}$, h, i étant l'un & l'autre positif ou l'un & l'autre négatif? Il résulte de cette équation $z^i = ay^h$, & par conséquent $i z^{i-1} r = a h y^{h-1} q$; donc $r = \frac{h}{i} a y^{\frac{h}{i} - 1} q$. Si $z = a y^{-\frac{h}{i}}$, on aura $z y^{\frac{h}{i}} = a$, $y^{\frac{h}{i}} r + \frac{h}{i} z y^{\frac{h}{i} - 1} q = 0$, partant $r = -\frac{h}{i} a y^{-\frac{h}{i} - 1} q$. C'est pourquoi si l'on a $z = ay^m$, m étant tel nombre qu'on voudra, on en tirera $r = a m y^{m-1} q$.

Soit $y = x + \sqrt{a^2 + x^2}$, on aura $y^2 - 2xy = a^2$, $zq - xq - yp = 0$, & $q = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}} p$. Soit $z = \frac{x}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$: on fera $x + \sqrt{a^2 + x^2} = y$ & on aura $z = \frac{x}{y}$, $r = \frac{yp - xq}{y^2}$; partant $r = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - x}{(\sqrt{a^2 + x^2} + x)\sqrt{a^2 + x^2}} p = \frac{a^2 p}{(\sqrt{a^2 + x^2} + x)^2 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a^2 + 2x^2}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} p - \frac{2xp}{a^2}$.

(153). Nous avons démontré que si $z = \log. y$, on doit avoir $r = \frac{q}{y}$; donc si $z = \log. (x + \sqrt{a^2 + x^2})$, on a $r = \frac{p}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. On propose de trouver la limite du rapport entre les différences, lorsque $z = \log. \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{\sqrt{a^2 + x^2} + a}$? Si on avoit $y = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{\sqrt{a^2 + x^2} + a}$, on feroit $\sqrt{a^2 + x^2} + a = u$, d'où $\sqrt{a^2 + x^2} - a = u - 2a$, $y = \frac{u - 2a}{u}$: mais $\frac{n}{p} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $\frac{q}{n} = \frac{2a}{u^2}$; donc $q = \frac{2axp}{\sqrt{a^2 + x^2}(\sqrt{a^2 + x^2} + a)^2}$. Cela posé, à cause de $z = \log. y$, on a $r = \frac{q}{y} = \frac{2axp}{\sqrt{a^2 + x^2}(\sqrt{a^2 + x^2} + a)(\sqrt{a^2 + x^2} - a)} = \frac{2ap}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$.

On démontrera de la même manière que si $z = \log. \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}$, on doit avoir $r = \frac{2ap}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Soit $z = (\log. x^i)^m$; on fera $\log. x^i = y$, d'où $i \log. x = y$ & $q = \frac{ip}{x}$. Mais $r = m y^{m-1} q$; donc $r = i m (\log. x^i)^{m-1} . \frac{p}{x}$. Soit $z = \log. \log. x$; on fera $\log. x = y$, d'où $q = \frac{p}{x}$: mais de $z = \log. y$, on tire $r = \frac{q}{y}$; donc $r = \frac{p}{x \log. x}$.

On tire de $z = a^x$, $r = a^x p$. Soit $z = y^x$; on aura $\log. z = x \log. y$; $\frac{r}{z} = p \log. y + \frac{xq}{y}$; partant $r = y^x \left(p \log. y + \frac{xq}{y} \right)$.

(154). Le rayon étant 1, si $y = \text{fin. } u$, $x = \text{cos. } u$, on a $q = n \text{ cos. } u$; $p = -n \text{ fin. } u$: mais $\text{cos. } u = \sqrt{1 - y^2}$, $\text{fin. } u = \sqrt{1 - x^2}$; donc $n = \frac{q}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-p}{\sqrt{1-x^2}}$. On propose $z = \text{tang. } u$; à cause de $\text{tang. } u = \frac{y}{x}$; on en tire $r = \frac{xq - yp}{x^2} = \frac{n}{\text{cos. } u^2}$: mais $z^2 = \frac{\text{fin. } u^2}{\text{cos. } u^2} = \frac{1 - \text{cos. } u^2}{\text{cos. } u^2}$, d'où $\text{cos. } u^2 = \frac{1}{1 + z^2}$; donc $n = \frac{r}{1 + z^2}$. On démontrera de la même manière que si $z = \text{cot. } u$, on doit avoir $r = \frac{-n}{\text{fin. } u^2}$, & ensuite $n = \frac{-r}{1 + z^2}$.

Soit $z = \text{sec. } u = \sqrt{1 + \text{tang. } u^2}$; on fera $\text{tang. } u = y$, d'où $n = \frac{q}{1+y^2}$: mais $r = \frac{yq}{\sqrt{1+y^2}}$; donc $n = \frac{r}{y\sqrt{1+y^2}}$, où l'on mettra pour y sa valeur $\sqrt{z^2 - 1}$, & l'on aura $n = \frac{r}{z\sqrt{z^2 - 1}}$. On démontrera de la même manière que si $z = \text{cosé. } u$, on doit avoir $n = \frac{-r}{z\sqrt{z^2-1}}$.

Soit $z = \text{fin. v. } u = 1 - \text{cos. } u$; on aura $r = n \text{ fin. } u$: mais $\text{cos. } u = 1 - z$; d'où $\text{fin. } u = \sqrt{2z - z^2}$; donc $n = \frac{r}{\sqrt{2z - z^2}}$.

(155). Nous avons fait usage de $\frac{q}{p}$, $\frac{p}{q}$ pour représenter les limites des rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$: pour désigner les limites des rapports $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2}$ entre les différences du second ordre, nous nous servirons de $\frac{q'}{p^2}$, $\frac{p'}{p^2}$; comme nous nous servirons de

de $\frac{q''}{p^3}$, $\frac{p''}{p^3}$ pour déſigner les limites des rapports $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, $\frac{\Delta^3 x}{\Delta x^3}$; de $\frac{q'''}{p^4}$, $\frac{p'''}{p^4}$ pour déſigner les limites des rapports $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}$, $\frac{\Delta^4 x}{\Delta x^4}$, &c.

Suppoſons d'abord que la différence de x ſoit conſtante, & prenons pour exemple $y = x^m$ (n°. 109) : on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2} \Delta x + \&c.,$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = m \cdot \overline{m-1} \cdot x^{m-2} + m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot x^{m-3} \Delta x + \&c.;$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot x^{m-3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3} \cdot 3 x^{m-4} \Delta x + \&c.;$$

$$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3} \cdot x^{m-4} + \&c.,$$

&c.; d'où l'on tirera $\frac{q}{p} = m x^{m-1}$, $\frac{q'}{p^2} = m \cdot \overline{m-1} \cdot x^{m-2}$,
$\frac{q''}{p^3} = m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot x^{m-3}$, $\frac{q'''}{p^4} = m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3} \cdot x^{m-4}$, &c.
Mais comment repréſenter les limites des rapports

$$\frac{\Delta \frac{q}{p}}{\Delta x}, \frac{\Delta \frac{q'}{p^2}}{\Delta x}, \frac{\Delta \frac{q''}{p^3}}{\Delta x}, \frac{\Delta \frac{q'''}{p^4}}{\Delta x}, \&c.?$$

Dans le préſent exemple $\frac{\Delta \frac{q}{p}}{\Delta x} = m \left(\overline{m-1} \cdot x^{m-2} + \overline{m-1} \cdot \frac{m-2}{2} x^{m-3} \Delta x + \&c. \right)$, dont la limite eſt $m \cdot \overline{m-1} \cdot x^{m-2}$, la même que celle de $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$; c'eſt-à-dire, que dans cet exemple le même rapport $\frac{q'}{p^2}$ repréſente la limite de $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, & celle de $\frac{\Delta \frac{q}{p}}{\Delta x}$. On a auſſi $\frac{\Delta \frac{q'}{p^2}}{\Delta x} = m \cdot \overline{m-1} \left(\overline{m-2} \cdot x^{m-3} + \overline{m-2} \cdot \frac{m-3}{2} x^{m-4} \Delta x + \&c. \right)$, dont la limite eſt $m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot x^{m-3}$, la même que celle de $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$; c'eſt-à-dire, que ſi $\frac{q''}{p^3}$ repréſente la limite de $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, elle repréſentera auſſi celle de $\frac{\Delta \frac{q'}{p^2}}{\Delta x}$; ſi $\frac{q'''}{p^4}$ repréſente la limite de $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}$, elle repréſentera auſſi celle de $\frac{\Delta \frac{q''}{p^3}}{\Delta x}$; & ainſi de ſuite. Nous démontrerons bientôt cette propoſition d'une manière plus générale.

(156). Nous avons démontré (n°. 111) que y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse x, on a pour l'ordonnée Y, qui répond à l'abscisse $x + i\,\delta x$, $Y = y + i \cdot \Delta y + i \cdot \frac{i-1}{2}\Delta^2 y + i \cdot \frac{i-1}{2} \cdot \frac{i-2}{3}\Delta^3 y + i \cdot \frac{i-1}{2} \cdot \frac{i-2}{3} \cdot \frac{i-3}{4}\Delta^4 y +$ &c.

Je transforme cette formule en la suivante

$$Y = y + i\,\delta x \frac{\Delta y}{\delta x} + i \cdot \frac{i-1}{2}\,\delta x^2 \frac{\Delta^2 y}{\delta x^2} + i \cdot \frac{i-1}{2} \cdot \frac{i-2}{3}\,\delta x^3 \frac{\Delta^3 y}{\delta x^3} + \text{\&c.};$$

ou, faisant $i = \frac{1}{h}$, en celle-ci

$$Y = y + \frac{\delta x}{h}\frac{\Delta y}{\delta x} + \left(\frac{\delta x^2}{2h^2} - \frac{\delta x}{2h}\,\delta x\right)\frac{\Delta^2 y}{\delta x^2} + \left(\frac{\delta x^3}{2 \cdot 3 h^3} - \frac{\delta x^2}{2h^2}\,\delta x + \frac{\delta x}{3h}\,\delta x^2\right)\frac{\Delta^3 y}{\delta x^3} + \text{\&c.}$$

Quelle que soit la valeur de δx, notre formule sera toujours vraie : mais lorsque δx est nul, les rapports $\frac{\Delta y}{\delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\delta x^3}$, &c. se changent en ceux-ci $\frac{q}{p}$, $\frac{q'}{p^2}$, $\frac{q''}{p^3}$, &c.; de plus je puis supposer que δx & h diminuant continuellement, on ait $h = 0$ en même temps que $\delta x = 0$, & nommer Δx ce que devient alors $\frac{\delta x}{h}$.

C'est pourquoi si dans la dernière expression de Y, on met $\frac{q}{p}$, $\frac{q'}{p^2}$, $\frac{q''}{p^3}$, &c. pour $\frac{\Delta y}{\delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\delta x^3}$, &c. & Δx au lieu de $\frac{\delta x}{h}$; & que ces substitutions faites, on efface les termes qui seront encore multipliés par δx, δx^2, δx^3, &c. la formule dont il s'agit deviendra

$$Y = y + \frac{q}{p}\Delta x + \frac{q'}{2p^2}\Delta x^2 + \frac{q''}{2 \cdot 3 p^3}\Delta x^3 + \frac{q'''}{2 \cdot 3 \cdot 4 p^4}\Delta x^4 + \text{\&c.}$$

Pour plus de généralité, nommons Y ce que devient y lorsque x se change en $x \pm \Delta x$; il est clair que nous aurons

$$Y = y \pm \frac{q}{p}\Delta x + \frac{q'}{2p^2}\Delta x^2 \pm \frac{q''}{2 \cdot 3 p^3}\Delta x^3 + \frac{q'''}{2 \cdot 3 \cdot 4 p^4}\Delta x^4 \pm \text{\&c.}$$

Il n'est pas moins clair que $Y - y$ est la différence de y, soit que x augmente ou qu'il diminue, & que la formule précédente est très-propre à trouver les différences des fonctions algébriques & autres.

(157). On demande la différence de $y = x^m$? Je tire de cette équation $\frac{q}{p} = m x^{m-1}$, $\frac{q'}{p^2} = m \cdot \overline{m-1} \cdot x^{m-2}$, $\frac{q''}{p^3} = m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot x^{m-3}$, &c.;

donc $\Delta y = \pm m x^{m-1} \Delta x + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2} \Delta x^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} x^{m-3}$ $\Delta x^3 + \&c.$

Soit $y =$ log. x; on en tirera $\frac{q}{p} = \frac{1}{x}$, $\frac{q'}{p^2} = \frac{-1}{x^2}$, $\frac{q''}{p^3} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{q'''}{p^4} = \frac{-2 \cdot 3}{x^4}$, &c.; subſtituant ces valeurs dans la formule, il vient pour la différence demandée $\pm \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \frac{\Delta x^4}{4x^4} \pm \&c.$

De même pour trouver la différence de $a^x = y$, on remarquera que $\frac{q}{p} = a^x$ log. a, $\frac{q'}{p^2} = a^x (\text{log.} a)^2$, $\frac{q''}{p^3} = a^x (\text{log.} a)^3$, $\frac{q'''}{p^4} = a^x (\text{log.} a)^4$, &c.; d'où l'on tire pour la différence demandée $\pm \Delta x \cdot a^x \text{ log.} a + \frac{\Delta x^2}{2} a^x (\text{log.} a)^2$ $\pm \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} a^x (\text{log.} a)^3 + \frac{\Delta x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^x (\text{log.} a)^4 \pm \&c.$

Le rayon étant pris pour l'unité, on demande la différence de ſin. $x = y$? A cauſe de $\frac{q}{p} =$ cos. x, $\frac{q'}{p^2} = -$ ſin. x, $\frac{q''}{p^3} = -$ cos. x, $\frac{q'''}{p^4} =$ ſin. x, &c.; on a pour la différence demandée $\pm \Delta x$ cos. $x - \frac{\Delta x^2}{2}$ ſin. $x \mp \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3}$ cos. $x + \frac{\Delta x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ ſin. $x \pm$ &c. On propoſe encore de trouver la différence de cos. $x = y$? A cauſe de $\frac{q}{p} = -$ ſin. x, $\frac{q'}{p^2} = -$ cos. x, $\frac{q''}{p^3} =$ ſin. x, $\frac{q'''}{p^4} =$ cos. x, &c.; on a pour la différence demandée

$$\mp \Delta x \text{ ſin. } x - \frac{\Delta x^2}{2} \text{ cos. } x \pm \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} \text{ ſin. } x + \frac{\Delta x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ cos. } x \mp \&c.$$

(158). Il ſuit de ce qui précède que nous pouvons étendre à toutes les fonctions de x la propoſition du n°. 106, & l'énoncer ainſi : quelle que ſoit la fonction de x, on pourra toujours repréſenter ſa différence par

$$\pm A \Delta x + B \Delta x^2 \pm C \Delta x^3 + \&c.;$$

A, B, &c. étant des fonctions de x & de conſtantes; le ſigne ſupérieur des puiſſances impaires étant pour le cas de x croiſſant, & le ſigne inférieur pour le cas de x décroiſſant. Partons delà pour démontrer plus généralement une autre propoſition du n°. 155.

Ayant $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + B \Delta x + C \Delta x^2 + \&c.$, ſi l'on fait

$\Delta A = A' \Delta x + A'' \Delta x^2 + \&c.$ $\Delta B = B' \Delta x + B'' \Delta x^2 + \&c.$ &c.
$\Delta A' = A1 \Delta x + A2 \Delta x^2 + \&c.$, &c., $\Delta A1 = A(1) \Delta x + \&c.$ &c.;

à cause de

$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = A' + A'' \Delta x + \&c.$ $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = A\,1 + A\,2\,\Delta x + \&c.$;
$+ B' \Delta x + \&c.$ $\qquad + \&c.$

$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = A\,(1) + \&c.\ \&c.$, on aura $\frac{q}{p} = A$, $\frac{q'}{p^2} = A'$, $\frac{q''}{p^3} = A\,1$; $\frac{q'''}{p^4} = A\,(1)$, &c. Mais puisque $\frac{q}{p} = A$, A' est aussi la limite du rapport entre les différences de $\frac{q}{p}$ & x; puisque $\frac{q'}{p^2} = A'$, $A\,1$ est aussi la limite du rapport entre les différences de $\frac{q'}{p^2}$ & x; puisque $\frac{q''}{p^3} = A\,1$, $A\,(1)$ est aussi la limite du rapport entre les différences de $\frac{q''}{p^3}$ & x, &c.; donc la différence première de x étant constante, on peut représenter par $\frac{q'}{p^2}$ la limite de $\frac{\Delta \frac{q}{p}}{\Delta x}$; par $\frac{q''}{p^3}$ la limite de $\frac{\Delta \frac{q'}{p^2}}{\Delta x}$; par $\frac{q'''}{p^4}$ la limite de $\frac{\Delta \frac{q''}{p^3}}{\Delta x}$; & ainsi de suite.

(159). Si on ne suppose aucune différence constante, on aura $\Delta^2 y = A\,\Delta^2 x + 2\,B\,\Delta x\,\Delta^2 x + \&c. + A'\,\Delta x^2 + A''\,\Delta x^3 + \&c. + B'\,\Delta x^3 + \&c. + \&c.$, & $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} - A\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} = 2\,B\,\Delta x\,\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} + \&c. + A' + (A'' + B')\,\Delta x + \&c. + \&c.$; d'où l'on tire, lorsque $\Delta x = 0$, $\frac{q'}{p^2} - A\frac{p'}{p^2} = A'$. Donc à cause de $A = \frac{q}{p}$, $\frac{q'}{p^2} - \frac{q}{p}\frac{p'}{p^2}$ désigne la limite du rapport entre les différences de $\frac{q}{p}$ & x, dans l'hypothèse qu'aucune différence n'est constante; & $-\frac{q}{p}\frac{p'}{p^2}$ est l'expression de cette même limite, lorsqu'on suppose que c'est la différence de y qui est constante.

Soit entre les variables y & x l'équation $xy + x^2 + ax + by + c = 0$; d'où l'on tire $a + 2x + y + (b + x)\frac{q}{p} = 0$, & , faisant varier x uniformément, $(b + x)\frac{q'}{p^2} + 2\left(\frac{q}{p} + 1\right) = 0$. Pour trouver l'équation qu'on auroit eue, si on eût fait varier y uniformément, il faut mettre $-\frac{q}{p}\frac{p'}{p^2}$ pour $\frac{q'}{p^2}$, & l'équation $(b + x)\frac{p'}{p^2} - 2\left(\frac{p}{q} + 1\right) = 0$, est celle qu'on demande. En effet, en regardant la différence de y comme constante, on tire de l'équation

l'équation $b + x + (a + 2x + y)\frac{p}{q} = 0$, celle-ci $(a + 2x + y)\frac{p'}{q^2} + 2\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} + 1\right) = 0$; & chassant a au moyen de la première, $(b + x)\frac{p'}{q^2} - 2\left(\frac{p}{q}\right)^2\left(\frac{p}{q} + 1\right) = 0$, ou $(b + x)\frac{p'}{p^2} - 2\left(\frac{p}{q} + 1\right) = 0$. Je passe aux différences du troisième ordre.

(160). On trouvera $\Delta^3 y = A\Delta^3 x$ + &c. + $A'\,\Delta x\,\Delta^2 x$ + &c. + $2A'\Delta x \Delta^2 x$ + &c. + $A\,1\,\Delta x^3$ + &c. + &c., & $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = A\frac{\Delta^3 x}{\Delta x^3}$ + &c. + $3A'\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2}$ + &c. + $A\,1$ + &c. + &c.; d'où l'on tire, lorsque $\Delta x = 0$; $\frac{q''}{p^3} = A\frac{p''}{p^3} + 3A'\frac{p'}{p^2} + A\,1$; & mettant $\frac{q}{p}$, $\frac{q'}{p^2} - \frac{q}{p}\frac{p'}{p^2}$ pour A, A', on trouvera, dans l'hypothèse qu'aucune différence n'est constante, que $\frac{q''}{p^3} - \frac{q}{p}\frac{p''}{p^3} - 3\frac{p'}{p^2}\left(\frac{q'}{p^2} - \frac{q}{p}\frac{p'}{p^2}\right) = A\,1$ désigne la limite du rapport entre les différences de $\frac{q'}{p^2} - \frac{q}{p}\frac{p'}{p^2}$ & x; comme $-\frac{q}{p}\frac{p''}{p^3} + 3\frac{q}{p}\left(\frac{p'}{p^2}\right)^2$ celle du rapport entre les différences de $-\frac{q}{p}\frac{p'}{p^2}$ & x, lorsque c'est la différence de y qui est constante.

De l'équation $(b + x)\frac{q'}{p^2} + 2\left(\frac{q}{p} + 1\right) = 0$, on tire $(b + x)\frac{q''}{p^3} + 3\frac{q'}{p^2} = 0$, en continuant de faire varier x uniformément; & chassant b, $2\left(\frac{q}{p} + 1\right)\frac{q''}{p^3} - 3\left(\frac{q'}{p^2}\right)^2 = 0$. Pour trouver ce qu'on auroit eu si on eût fait varier y uniformément, il faut mettre dans cette équation $-\frac{q}{p}\frac{p''}{p^3} + 3\frac{q}{p}\left(\frac{p'}{p^2}\right)^2$ pour $\frac{q''}{p^3}$ & $-\frac{q}{p}\frac{p'}{p^2}$ pour $\frac{q'}{p^2}$; & l'équation $2\left(\frac{q}{p} + 1\right)\frac{p''}{p^3} - 3\left(\frac{q}{p} + 2\right)\left(\frac{p'}{p^2}\right)^2 = 0$ est celle qu'on demande.

En effet, l'équation $(b + x)\frac{p'}{q^2} - 2\left(\frac{p}{q}\right)^2\left(\frac{p}{q} + 1\right) = 0$, donne $(b + x)\frac{p''}{q^3} - 3\frac{p}{q}\frac{p'}{q^2} - 6\left(\frac{p}{q}\right)^2\frac{p'}{q^2} = 0$; & chassant b,

$2\left(\frac{p}{q} + 1\right)\frac{p''}{q^3} - 3\left(\frac{q}{p} + 2\right)\left(\frac{p'}{q^2}\right)^2 = 0$, ou

$2\left(\frac{q}{p} + 1\right)\frac{p''}{p^3} - 3\left(\frac{q}{p} + 2\right)\left(\frac{p'}{p^2}\right)^2 = 0$.

On trouvera $\Delta^4 y = A\,\Delta^4 x +$ &c. $+ A'\,\Delta x\,\Delta^3 x +$ &c. $+ 3\,A'\,\Delta x\,\Delta^3 x +$ $3\,A'\,\Delta^2 x^2 +$ &c. $+ 3\,A\,1\,\Delta x^2\,\Delta^2 x +$ &c. $+ 3\,A\,1\,\Delta x^2\,\Delta^2 x +$ &c. $+$ $A\,(1)\,\Delta x^4 +$ &c. $+$ &c., & $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = A\,\frac{\Delta^4 x}{\Delta x^4} +$ &c. $+ 4\,A'\,\frac{\Delta^3 x}{\Delta x^3} +$ &c. $+$ $3\,A'\,\frac{\Delta^2 x^2}{\Delta x^4} +$ &c. $+ 6\,A\,1\,\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} +$ &c. $+ A\,(1) +$ &c. $+$ &c. Donc $\frac{q'''}{p^4} = A\,\frac{p'''}{p^3} + 4\,A'\,\frac{p''}{p^3} + 3\,A'\left(\frac{p'}{p^2}\right)^2 + 6\,A\,1\,\frac{p'}{p^2} + A\,(1)$; & mettant $\frac{q}{p}$, $\frac{q'}{p^2} - \frac{q}{p}\,\frac{p'}{p^2}$, $\frac{q''}{p^3} - \frac{q}{p}\,\frac{p''}{p^3} - 3\,\frac{p'}{p^2}\cdot\frac{q'}{p^2} + 3\,\frac{q}{p}\left(\frac{p'}{p^2}\right)^2$ pour A, A', $A\,1$; on trouvera, dans l'hypothèse qu'aucune différence n'est constante, que $\frac{q'''}{p^4} - 6\,\frac{p'}{p^2}\,\frac{q''}{p^3} - 4\,\frac{p''}{p^3}\cdot\frac{q'}{p^2} + 15\,\frac{q'}{p^2}\left(\frac{p'}{p^2}\right)^2 + 10\,\frac{q}{p}\cdot\frac{p'}{p^2}\cdot\frac{p''}{p^3} -$ $15\,\frac{q}{p}\left(\frac{p'}{p^2}\right)^3 - \frac{q}{p}\,\frac{p'''}{p^4} = A\,1$ désigne la limite du rapport entre les différences $\frac{q''}{p^3} - \frac{q}{p}\,\frac{p''}{p^3} - 3\,\frac{p'}{p^2}\,\frac{q'}{p^2} + 3\,\frac{q}{p}\left(\frac{p'}{p^2}\right)^2$ & x; comme $10\,\frac{q}{p}\,\frac{p'}{p^2}\,\frac{p''}{p^3} - 15\,\frac{q}{p}\left(\frac{p'}{p^2}\right)^3 - \frac{q}{p}\,\frac{p'''}{p^4}$ désigne la limite du rapport entre les différences de $-\frac{q}{p}\,\frac{p''}{p^3} + 3\,\frac{q}{p}\left(\frac{p'}{p^2}\right)^2$ & x, lorsque c'est y qui varie uniformément, &c.

(161). Nous avons démontré (n°. 156) que

$$\Delta y = \pm\frac{q}{p}\,\Delta x + \frac{q'}{2p^2}\,\Delta x^2 \pm \frac{q''}{2\cdot 3\,p^3}\,\Delta x^3 + \frac{q'''}{2\cdot 3\cdot 4\,p^4}\,\Delta x^4 + \text{\&c.};$$

ainsi, en continuant de faire varier x uniformément,

$$\Delta^2 y = \pm\,\Delta\,\frac{q}{p}\cdot\Delta x + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,\frac{q'}{p^2}\cdot\Delta x^2 \pm \frac{1}{2\cdot 3}\,\Delta\,\frac{q''}{p^3}\cdot\Delta x^3 + \text{\&c.}:$$

mais

$$\Delta\,\frac{q}{p} = \pm\frac{q'}{p^2}\,\Delta x + \frac{q''}{2p^3}\,\Delta x^2 \pm \frac{q'''}{2\cdot 3\,p^4}\,\Delta x^3 + \text{\&c.}$$

$$\Delta\,\frac{q'}{p^2} = \pm\frac{q''}{p^3}\,\Delta x + \frac{q'''}{2p^4}\,\Delta x^2 \pm \text{\&c.}$$

$$\Delta\,\frac{q''}{p^3} = \pm\frac{q'''}{p^4}\,\Delta x + \text{\&c.}$$

&c.; donc

$$\Delta^2 y = \frac{q'}{p^2}\,\Delta x^2 \pm \frac{q''}{p^3}\,\Delta x^3 + \frac{7\,q'''}{3\cdot 4\,p^4}\,\Delta x^4 \pm \text{\&c.}$$

On trouvera de la même manière

$$\Delta^3 y = \pm \frac{q''}{p^3} \Delta x^3 + \frac{3 q'''}{2 p^4} \Delta x^4 \pm \frac{5 q^{iv}}{4 p^5} \Delta x^5 + \&c.,$$

$$\Delta^4 y = \frac{q'''}{p^4} \Delta x^4 \pm 2 \frac{q^{iv}}{p^5} \Delta x^5 + \frac{13 q^{v}}{6 p^6} \Delta x^6 \pm \&c.,$$

& les différences des ordres supérieurs. On pourroit même transformer facilement ces formules en d'autres où aucune différence ne feroit fuppofée conftante.

(162). y étant l'ordonnée qui répond à l'abfciffe x, nous défignerons par Y celle qui répond à $x + \Delta x$, par Z celle qui répond à $x - \Delta x$, & nous aurons

$$Y = y + \frac{q}{p} \Delta x + \frac{q'}{2 p^2} \Delta x^2 + \frac{q''}{2 \cdot 3 p^3} \Delta x^3 + \&c.,$$

$$Z = y - \frac{q}{p} \Delta x + \frac{q'}{2 p^2} \Delta x^2 - \frac{q''}{2 \cdot 3 p^3} \Delta x^3 + \&c.$$

En mettant x pour Δx dans la feconde, on trouvera ce que devient y lorfque dans cette fonction on fait $x = 0$: nommons h cette valeur de y, on aura

$$h = y - \frac{q}{p} x + \frac{q'}{2 p^2} x^2 - \frac{q''}{2 \cdot 3 p^3} x^3 + \&c.$$

Si $y = \frac{1}{1 + x}$, $x = 0$ donne $y = 1$; on doit donc avoir

$$\frac{1}{1 + x} + \frac{x}{(1 + x)^2} + \frac{x^2}{(1 + x)^3} + \frac{x^3}{(1 + x)^4} + \&c. = 1 : \text{mais}$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \&c., \quad \frac{x}{(1 + x)^2} = x - 2 x^2 + 3 x^3 - 4 x^4 + \&c.;$$

$$\frac{x^2}{(1 + x)^3} = x^2 - 3 x^3 + 6 x^4 - \&c., \quad \frac{x^3}{(1 + x)^4} = x^3 - 4 x^4 + \&c.;$$

$$\frac{x^4}{(1 + x)^5} = x^4 - \&c.; \text{ donc \&c.}$$

(163). On tire de la première formule que h étant l'ordonnée qui répond à $x = 0$, fi l'on nomme A', B', C', D', &c. ce que deviennent les quantités $\frac{q}{p}$, $\frac{q'}{p^2}$, $\frac{q''}{p^3}$, $\frac{q'''}{p^4}$, &c. lorfqu'on fait $x = 0$ & $y = h$, on doit avoir

$$y = h + A' x + \frac{B'}{2} x^2 + \frac{C'}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{D'}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \&c.$$

Ce beau théorême, qui nous fera de la plus grande utilité pour développer telle fonction qu'on voudra, a été donné pour la première fois par Taylor dans l'ouvrage qui a pour titre : *Methodus incrementorum* ; voici comment il y eft démontré.

y étant une fonction de x & de conftantes, on propofe de la développer en une férie de cette forme $A + B x + C x^2 + D x^3 + E x^4 + \&c.$? On formera cette fuite d'équations

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.,$$
$$\frac{q}{p} = +B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \&c.,$$
$$\frac{q'}{p^2} = +2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \&c.,$$
$$\frac{q''}{p^3} = +2.3D + 2.3.4Ex + \&c.,$$
$$\frac{q'''}{p^4} = +2.3.4E + \&c.,$$

&c., qui doivent être vraies, quelle que soit la valeur de x. On fera $x = 0$, & on les changera par-là en celles-ci

$$h = A,\ A' = B,\ B' = 2C,\ C' = 2.3D,\ D' = 2.3.4E,\ \&c.,$$

desquelles on tire

$$A = h,\ B = A',\ C = \frac{B'}{2},\ D = \frac{C'}{2.3},\ E = \frac{D'}{2.3.4},\ \&c.$$

Plus généralement, soit U une fonction de u & de constantes qu'on propose de développer en une série de cette forme

$$Au^{\lambda} + Bu^{\lambda+\mu} + Cu^{\lambda+2\mu} + Du^{\lambda+3\mu} + \&c.:$$

on fera $u^{\mu} = x$, $A + Bx + Cx^2 + \&c. = y$,

& on aura comme ci-dessus $A = h$, $B = A'$, &c.; partant

$$U = hu^{\lambda} + A'u^{\lambda+\mu} + \frac{B'}{2}u^{\lambda+2\mu} + \frac{C'}{2.3}u^{\lambda+3\mu} + \frac{D'}{2.3.4}u^{\lambda+4\mu} + \&c.$$

Eclaircissons tout cela par quelques exemples.

(164). Soit $y = \log.(1 \pm x)$; il est clair que $x = 0$ donne $y = 0$; donc $h = 0$. On trouve ensuite

$$A' = \pm 1,\ B' = -1,\ C' = \pm 2,\ D' = -2.3,\ \&c.;$$

partant $y = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm$ &c. Il suit delà que

$$\log.(1+x) - \log.(1-x) = \log.\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \&c.\right):$$

or en prenant $\frac{1+x}{1-x}$ égal à tel nombre qu'on voudra, on aura pour x un nombre fractionnaire moindre que 1; de plus x étant une fraction, la série sera très-convergente; donc cette série servira à trouver le logarithme d'un nombre quelconque d'une manière très-approchée.

Si $y = \sin.x$; à cause que $x = 0$ doit donner $y = 0$, on a $h = 0$; puis $A' = 1$, $B' = 0$, $C' = -1$, $D' = 0$, $E' = 1$, &c.

d'où

d'où l'on tire fin. $x = x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} -$ &c. Si $y = \cos. x$; à cauſe que $x = 0$ donne $y = 1$, on a $h = 1$; puis $A' = 0$, $B' = -1$, $C' = 0$, $D' = 1$, &c. d'où l'on tire cos. $x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} -$ &c.

Soit $y = A$ fin. x; on aura $\frac{q}{p} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{q'}{p^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{q''}{p^3} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$, $\frac{q'''}{p^4} = \frac{9x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3\cdot 5 x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$, $\frac{q^{iv}}{p^5} = \frac{9}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2\cdot 5\cdot 9 x^2}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7 x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}$, $\frac{q^{v}}{p^6} = \frac{5\cdot 5\cdot 9 x}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7 x^3}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9 x^5}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}}$,
$\frac{q^{vi}}{p^7} = \frac{5\cdot 5\cdot 9}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9 x^2}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} + \frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 9 x^4}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11 x^6}{(1-x^2)^{\frac{13}{2}}}$, &c. :
& comme $x = 0$ doit donner $y = 0$, on aura
$h = 0$, $A' = 1$, $B' = 0$, $C' = 1$, $D' = 0$, $E' = 9$, $F' = 0$, $G' = 5\cdot 5\cdot 9$, &c.
& par conſéquent

A fin. $x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} +$ &c.

Pour trouver l'arc de 30°, on fera $x = \frac{1}{2}$, & on aura pour la valeur de cet arc

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4\cdot 3} + \frac{3}{2^6\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5}{2^8\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \&c.,$$

ſérie extrêmement convergente, & dont la ſomme des dix premiers termes eſt égale à 0, 52359877. En multipliant ce nombre par 6, il en réſulte que la demi-circonférence $\pi = 3, 14159262$, expreſſion qui ne diffère de celle qui a été trouvée n°. 128 qu'à la ſeptième décimale.

Ainſi les ſéries que nous venons de trouver donneront très-exactement le logarithme d'un nombre quelconque, les valeurs des arcs en ſinus ou coſinus, & celles des ſinus & coſinus en arcs : & comme ces ſéries ſont toutes calculées dans les tables de logarithmes & de ſinus qu'on a entre les mains, nous regarderons tout problême qu'on en pourra faire dépendre comme réſolu par approximation de manière à ne rien laiſſer à deſirer.

(165). Nous ſavons qu'il y a quatre ſéries qui ſont les valeurs de U dans l'équation $mU^3 - u^3 U - m u^3 = 0$, & nous connoiſſons la forme de chacune, n°. 94. 1°. $U = Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 +$ &c.; dans cette hypothèſe $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $u = x$, $U = xy$; ces valeurs étant ſubſtituées dans la propoſée, elle devient $my^3 - xy - m = 0$; or $x = 0$ donne $y = 1$, donc $h = 1$ & $A = 1$.

On trouve ensuite $\frac{q}{p} = \frac{y}{3my^2 - x}$, d'où $A' = \frac{1}{3m}$ & $B = \frac{1}{3m}$; $\frac{q'}{p^2} = \frac{2\frac{q}{p} - 6my\left(\frac{q}{p}\right)^2}{3my^2 - x}$, d'où $B' = 0$ & $C = 0$;

$$\frac{q''}{p^3} = -\frac{6m\left(\frac{q}{p}\right)^3 + \left(18my\frac{q}{p} - 3\right)\frac{q'}{p^2}}{3my^2 - x},$$ d'où $C = \frac{\text{[illegible]}}{27m^3}$ & $D = \frac{-1}{81m^3}$; &c. 2°. $U = A + Bu^{-3} + Cu^{-6} + Du^{-9} + \&c.$; donc $\lambda = 0$, $\mu = -3$; $u^{-3} = x$, $U = y$, & la proposée devient $mxy^3 - y - m = 0$; or $x = 0$ donne $y = -m$, donc $h = -m$ & $A = -m$. On a ensuite $\frac{q}{p} = \frac{-my^3}{3mxy^2 - 1}$, d'où $A' = -m^4$ & $B = -m^4$; $\frac{q'}{p^2} = -\frac{6mxy\left(\frac{q}{p}\right)^2 + 6my^2\frac{q}{p}}{3mxy^2 - 1}$, d'où $B' = -6m^7$ & $C = -3m^7$; $D = -12m^{10}$; &c.

3°. $U = Au^{\frac{1}{2}} + B + Cu^{-\frac{3}{2}} + Du^{-3} + \&c.$: à cause de $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = -\frac{3}{2}$; $u^{-\frac{3}{2}} = x$, $U = \frac{y}{x}$, la proposée devient $my^3 - y - mx = 0$; or $x = 0$ donne $my^2 - 1 = 0$, donc $h = \frac{\pm 1}{\sqrt{m}}$ & $A = \frac{\pm 1}{\sqrt{m}}$. On trouve ensuite $\frac{q}{p} = \frac{m}{3my^2 - 1}$, d'où $A' = \frac{m}{2}$ & $B = \frac{m}{2}$; $\frac{q'}{p^2} = \frac{-6my}{3my^2 - 1}\left(\frac{q}{p}\right)^2$, d'où $B' = \mp\frac{3}{4}m^2\sqrt{m}$ & $C = \mp\frac{3}{8}m^2\sqrt{m}$; $D = \frac{m^4}{2}$; &c.

Soit cette autre équation $U^3 - a^2U + auU - u^3 = 0$, & supposons 1°. $U = Au + B + Cu^{-1} + Du^{-2} + \&c.$, on a $\lambda = 1$, $\mu = -1$, $u^{-1} = x$, $U = \frac{y}{x}$; en substituant ces valeurs dans la proposée, il vient $y^3 - a^2yx^2 + ayx - 1 = 0$; or $x = 0$ donne $y = 1$, donc $h = 1$ & $A = 1$. On trouve ensuite $\frac{q}{p} = \frac{2a^2xy - ay}{3y^2 - a^2x^2 + ax}$, d'où $A' = \frac{-a}{3}$ & $B = \frac{-a}{3}$; $\frac{q'}{p^2} = \frac{-6y\left(\frac{q}{p}\right)^2 + (4a^2x - 2a)\frac{q}{p} + 2a^2y}{3y^2 - a^2x^2 + ax}$, d'où $B' = \frac{2a^2}{3}$ & $C = \frac{a^2}{3}$; $D = \frac{a^3}{81}$; &c. 2°. $U = Au^3 + Bu^4 + Cu^5 + \&c.$; à cause de $\lambda = 3$; $\mu = 1$, $u = x$, $U = yx^3$, la proposée devient $y^3x^3 - a^2y + axy - 1 = 0$; or $x = 0$ donne $y = \frac{-1}{a^2}$, donc $h = \frac{-1}{a^2}$ & $A = \frac{-1}{a^2}$. On trouve ensuite

$\frac{q}{p} = \frac{-3y^3x^2 - ay}{3y^2x^3 - a^2 + ax}$, d'où $A' = \frac{-1}{a^3}$ & $B = \frac{-1}{a^3}$; $C = \frac{-1}{a^4}$; &c.

3°. $U = A + Bu + Cu^2 + Du^3 +$ &c., ce qui donne $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $u = x$, $U = y$; or dans l'équation $y^3 - a^2 y + ayx - x^3 = 0$, si l'on fait $x = 0$, on a $y = \pm a$, donc $h = \pm a$ & $A = \pm a$. On trouve ensuite

$\frac{q}{p} = \frac{-ay + 3x^2}{3y^2 - a^2 + ax}$, d'où $A' = \mp \frac{1}{2}$ & $B = \mp \frac{1}{2}$; $C = \mp \frac{1}{8a}$; &c.

(166). Le rapport entre q & p étant donné généralement par l'équation $Ap + Bq = 0$, il est possible que pour des valeurs particulières de y & x, les coefficiens A & B soient nuls en même temps. Pour trouver quelle est alors la valeur de $\frac{q}{p}$, il faudroit (n°. 140) avoir l'équation en y & x, pour en conclure celle entre les différences de ces variables. Représentons cette dernière équation par $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 +$ &c. $= 0$; nous avons remarqué dans l'article cité, que lorsque A & B sont nuls en même temps, le rapport entre q & p est donné par l'équation du second degré.

$$(a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad E\left(\frac{q}{p}\right)^2 + D\frac{q}{p} + C = 0;$$

que ce rapport est donné par l'équation du troisième degré

$$(b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad I\left(\frac{q}{p}\right)^3 + H\left(\frac{q}{p}\right)^2 + G\frac{q}{p} + F = 0,$$

lorsque A, B, C, D, E sont nuls en même temps, & ainsi de suite. Mais comment trouver ces équations a, b, &c. lorsqu'on n'a pas celle entre y & x? Avec un peu d'attention, on verra que, toutes réductions faites, l'équation a n'est que $Ap + Bq = 0$ dont on a cherché la limite du rapport entre les différences Δx, Δy en regardant q & p comme constans; que b n'est que a dont on a cherché la limite du rapport entre les différences Δx, Δy en regardant q & p comme constans, & ainsi des autres. Par exemple l'équation étant $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$ (n°. 139), on a entre q & p, $(4y^3 - 2axy)q + (3bx^2 - ay^2)p = 0$; on tire de celle-ci, en regardant q & p comme constans, $(6y^2 - ax)q^2 - 2aypq + 3bxp^2 = 0$; de la précédente, dans la même hypothèse, $4yq^3 - apq^2 + bp^3 = 0$, & de cette dernière $q^4 = 0$.

Je tire delà cette solution du problême proposé : si pour quelques valeurs particulières de y & x, le rapport $\frac{q}{p}$ ne peut être donné par $Ap + Bq = 0$, on formera l'équation a, & il pourra être renfermé dans cette équation qui est du second degré; sinon, on formera l'équation b, & continuant d'opérer toujours de la même manière, on parviendra à une équation qui donnera le rapport demandé. L'exposant du degré de cette équation, diminué d'une unité, sera égal au nombre d'opérations qu'on aura été forcé de faire. Telle est la solution que nous avons annoncée n°. 135, & que nous allons éclaircir par quelques exemples.

(167). On demande la valeur de la fraction $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$, dans le cas de $x=0$?

On peut supposer $\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}=\frac{q}{p}$, ou $a\,p-p\sqrt{a^2-x^2}=x^2 q$. On en tire, en cherchant la limite du rapport entre les différences dans l'hypothèse de p & q constans, $\frac{x\,p^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\,x\,p\,q$, & pour la valeur de $\frac{q}{p}$, lorsque $x=0$, $\frac{1}{2a}$.

Je prends pour second exemple la fraction $\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}}$, dont on demande la valeur dans le cas de $x=a$. Je forme l'équation $(x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2})\,p=(x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2})\,q$, de laquelle je tire

$$\left(3x^2-8ax+7a^2-\frac{2a^3}{\sqrt{2ax-a^2}}\right)p^2=\left(2x-2a+\frac{2a(a-x)}{\sqrt{2ax-x^2}}\right)p\,q;$$

$$\left(6x-8a+\frac{2a^4}{(2ax-a^2)^{\frac{3}{2}}}\right)p^3=\left(2-\frac{2a^3}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)p^2 q,$$

$$\left(6-\frac{6a^5}{(2ax-a^2)^{\frac{5}{2}}}\right)p^4=\frac{6a^3(a-x)}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}p^3 q,$$

$$-\frac{30a^5}{(2ax-a^2)^{\frac{7}{2}}}p^5=\left(\frac{6a^3}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{30a^3(a-x)^2}{(2ax-x^2)^{\frac{7}{2}}}\right)p^4 q:$$

ce n'est qu'à la quatrième opération que je parviens à découvrir le rapport $\frac{q}{p}$ dans l'hypothèse de $x=a$; la dernière équation donne ce rapport égal à $-5a$, & c'est la valeur de la fraction proposée lorsque $x=a$.

Pour trouver la valeur de $\frac{1-\text{sin.}\,x+\text{cos.}\,x}{\text{sin.}\,x+\text{cos.}\,x-1}$, lorsque x est un arc de 90°; j'ai $(1-\text{sin.}\,x+\text{cos.}\,x)\,p=(\text{sin.}\,x+\text{cos.}\,x-1)\,q$, & par une seule opération $\frac{pq}{p^2}$ ou $\frac{q}{p}=-\frac{\text{cos.}\,x+\text{sin.}\,x}{\text{cos.}\,x-\text{sin.}\,x}$, ou $\frac{q}{p}=1$, en faisant sin. $x=1$ & cos. $x=0$; c'est effectivement la valeur de la fraction proposée, lorsque x est égal à 90°. Proposons-nous encore de trouver la valeur de $\frac{x^x-x}{1-x+\text{log.}\,x}$, dans l'hypothèse de $x=1$. De $(x^x-x)\,p=(1-x+\text{log.}\,x)\,q$, on tire $[x^x(1+\text{log.}\,x)-1]\,p^2=\left[\frac{1}{x}-1\right]p\,q$; comme la supposition de $x=1$ fait disparoître tous les termes de cette équation, on passera à une seconde opération

opération qui donnera $[x^x(1+\log. x)^2+x^{x-1}]p^2 = \frac{-1}{x^2}p^2 q$, & le rapport $\frac{q}{p}$, lorſque $x=1$, égal à -2. La règle eſt générale, & peut s'appliquer à des fonctions de pluſieurs variables, comme à celles qui n'en renferment qu'une ſeule; ainſi nous n'en dirons pas davantage là-deſſus, & nous paſſons aux affections des lignes courbes qui nous reſtent à déterminer.

(168). Une ordonnée qui eſt plus grande ou plus petite que les ordonnées à la même branche d'une courbe adjacentes de part & d'autre, ſe nomme un *maximum* ou un *minimum* d'ordonnées. Il y a auſſi des *maxima* & des *minima* d'abſciſſes: dans l'ellipſe, aux points où les tangentes parallèles à la ligne des abſciſſes, rencontrent la courbe, répondent deux ordonnées qui ſont les plus grandes de toutes les ordonnées au grand axe; & aux points, où les tangentes parallèles aux ordonnées à l'axe, rencontrent la courbe, répondent deux abſciſſes, l'une $=0$ qui eſt un minimum, l'autre égale au grand axe qui eſt un maximum. Toutes les fois qu'il y a un maximum ou un minimum d'abſciſſes, la tangente eſt parallèle aux ordonnées & la limite $\frac{p}{q}=0$; la tangente eſt parallèle à la ligne des abſciſſes & la limite $\frac{q}{p}=0$, toutes les fois qu'il y a un maximum ou un minimum d'ordonnées. Mais pour que l'inverſe de cette propoſition fût toujours vraie, il faudroit pouvoir toujours conclure de $\frac{q}{p}=0$, que les ordonnées adjacentes ſont moindres ou plus grandes que y ſelon que celle-ci eſt un plus grand ou un moindre.

Nommons Y l'ordonnée qui répond à $x+i$, i étant une quantité très-petite; & Z celle qui répond à $x-i$; on aura lorſque $\frac{q}{p}=0$ (n°. 162)

$$Y=y+\frac{i^2}{2}\frac{q'}{p^2}+\frac{i^3}{2\cdot 3}\frac{q''}{p^3}+\frac{i^4}{2\cdot 3\cdot 4}\frac{q'''}{p^4}+\&c.,$$
$$Z=y+\frac{i^2}{2}\frac{q'}{p^2}-\frac{i^3}{2\cdot 3}\frac{q''}{p^3}+\frac{i^4}{2\cdot 3\cdot 4}\frac{q'''}{p^4}-\&c.:$$

or l'une & l'autre de ces ordonnées adjacentes ſeront plus grandes ou moindres que y au point où $\frac{q}{p}=0$, ſi à ce même point $\frac{q'}{p^2}$ a une valeur réelle; elles ſeront plus grandes ſi cette valeur eſt poſitive & moindres ſi elle eſt négative; dans le premier cas y ſera un minimum & un maximum dans le ſecond cas. Si au point en queſtion $\frac{q'}{p^2}$ eſt nul ſans que $\frac{q''}{p^3}$ le ſoit; cette dernière quantité n'ayant pas le même ſigne dans la valeur de Y & dans celle de Z, l'une de ces ordonnées ne pourra être moindre ou plus grande que y ſans que l'autre ſoit plus grande ou moindre, & dans ce cas y ne ſera ni un maximum ni un minimum.

Au même point $\frac{q}{p}$, $\frac{q'}{p^2}$, $\frac{q''}{p^3}$ font nulles & $\frac{q'''}{p^4}$ a une valeur réelle ; alors Y & Z feront l'une & l'autre moindres que y si cette valeur eft négative & plus grandes fi elle eft pofitive ; dans le premier cas y fera un maximum & un minimum dans le fecond cas. En général pour qu'à un point quelconque l'ordonnée y foit un maximum ou un minimum, il faut que le nombre des limites des rapports entre les différences fucceffives de cette fonction & Δx, Δx^2, Δx^3, &c., qui deviennent nulles à ce point, foit impair ; elle fera un maximum fi la limite qui fuit celle qui a difparu la dernière eft négative, un minimum fi elle eft pofitive. Après avoir difcuté l'équation $\frac{q}{p} = 0$, on difcutera $\frac{p}{q} = 0$ de la même manière, & on aura tout ce qui fera relatif aux maxima & minima d'ordonnées & d'abfciffes de la courbe propofée.

(169). On demande les plus grandes & les moindres ordonnées & abfciffes de la courbe qui a pour équation $y^3 + x^3 = axy$ (*fig. XXXIX*) ? Il fera aifé de voir d'abord qu'à l'origine des co-ordonnées, au point A, deux branches de la courbe fe coupent de manière que l'une d'elles a fa tangente parallèle à la ligne des abfciffes, & l'autre fa tangente parallèle aux ordonnées. Secondement on tire de fon équation

$$\frac{q}{p} = \frac{ay - 3x^2}{3y^2 - ax}, \quad \frac{q'}{p^2} = \frac{2a\frac{q}{p} - 6y\left(\frac{q}{p}\right)^2 - 6x}{3y^2 - ax};$$

& comme la fuppofition de $ay - 3x^2 = 0$ ne rend pas nul $\frac{q'}{p^2}$ & que la valeur qui en réfulte eft négative, on en conclut qu'il y a un maximum d'ordonnées au point D où $x = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$, $y = \frac{a}{3}\sqrt[3]{4}$. Troifiémement on tire de la même équation

$$\frac{p}{q} = \frac{3y^2 - ax}{ay - 3x^2}, \quad \frac{p'}{q^2} = \frac{2a\frac{p}{q} - 6x\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 6y}{3x^2 - ay};$$

& parce que la fuppofition de $3y^2 - ax = 0$ ne rend pas nul $\frac{p'}{q^2}$, & que la valeur qui en réfulte eft négative, on en tire qu'il y a un maximum d'abfciffes au point F où $x = \frac{a}{3}\sqrt[3]{4}$, $y = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$. A ce même point F répond une autre ordonnée $FG = \frac{-2a}{3}\sqrt[3]{2}$: mais lorfque les abfciffes pofitives font moindres que AF, à chacune d'elles répondent trois ordonnées ; ainfi au point D, outre l'ordonnée DE qui eft un maximum, répondent deux autres ordonnées

$$DE' = -\frac{a}{6}\sqrt[3]{4} + \frac{a}{6}\sqrt{6\sqrt[3]{2}}, \quad DE'' = -\frac{a}{6}\sqrt[3]{4} - \frac{a}{6}\sqrt{6\sqrt[3]{2}}.$$

Enfin les deux branches AG', AH s'étendent à l'infini & ont pour asymptote Kt déterminé de manière que $AK = At = \frac{a}{3}$.

(170). Soit une fonction y telle que $\frac{q}{p} = X(x-f)$, par X j'entends une fonction de x qui ne renferme pas le facteur $x-f$. On aura $\frac{q'}{p^2} = X + X'(x-f)$, en désignant par X' la limite de $\frac{\Delta X}{\Delta x}$, comme nous désignerons par X'' celle de $\frac{\Delta X'}{\Delta x}$, par X''' celle de $\frac{\Delta X''}{\Delta x}$, & ainsi des autres; & parce que $x = f$ ne fait pas disparoître cette expression, il y aura maximum ou minimum dans cette hypothèse, selon que X deviendra négatif ou positif. Si $\frac{q}{p} = X(x-f)^2$, on aura $\frac{q'}{p^2} = 2X(x-f) + X'(x-f)^2$, $\frac{q''}{p^3} = 2X + 4X'(x-f) + X''(x-f)^2$; & comme la supposition de $x = f$ fait disparoître $\frac{q}{p}$, $\frac{q'}{p^2}$ sans faire disparoître $\frac{q''}{p^3}$, il ne pourra y avoir dans ce cas ni maximum ni minimum.

Si $\frac{q}{p} = X(x-f)^3$, on aura

$\frac{q'}{p^2} = 3X(x-f)^2 + X'(x-f)^3$, $\frac{q''}{p^3} = 6X(x-f) + 6X'(x-f)^2 + X''(x-f)^3$, $\frac{q'''}{p^4} = 6X + 18X'(x-f) + 9X''(x-f)^2 + X'''(x-f)^3$; & comme $x = f$ fait disparoître $\frac{q}{p}$, $\frac{q'}{p^2}$, $\frac{q''}{p^3}$ sans faire disparoître $\frac{q'''}{p^4}$, il suit que la substitution de f pour x rendra y un maximum ou un minimum selon que ce que deviendra X par la même substitution sera négatif ou positif. On voit que si $\frac{q}{p} = X(x-f)^n$, & que n soit un nombre impair, la substitution de f pour x doit rendre y un maximum ou un minimum, selon que X deviendra négatif ou positif par la même substitution; mais que si ce nombre de facteurs égaux étoit pair, la même substitution ne pourroit rendre y ni un maximum ni un minimum.

La fonction y est telle que $\frac{q}{p} = X(x-f)(x-g)(x-h)$ &c., ces facteurs $x-f$, $x-g$, $x-h$, &c. font réels & inégaux & X ne doit renfermer ni eux ni leurs multiples. On aura $\frac{q'}{p^2} = X(x-g)(x-h)$ &c. $+$ $X(x-f)(x-h)$ &c. $+$ &c. $+$ $X'(x-f)(x-g)(x-h)$ &c.; & comme ni $x-f=0$, ni $x-g=0$, ni $x-h=0$, &c. ne peuvent faire disparoître $\frac{q'}{p^2}$, chacune de ces substitutions rendra y un maximum ou un minimum;

un maximum si ce que deviendra $\frac{q'}{p^2}$ par la substitution est négatif, un minimum s'il est positif.

(171). Une courbe étant proposée, on demande les points pour lesquels la sous-normale, étant regardée comme une fonction de l'abscisse x, est un plus grand ou un moindre? Nommons z la sous-normale & $\frac{r}{p}$ la limite du rapport $\frac{\Delta z}{\Delta x}$; on aura $\frac{r}{p} = 0$, & il faudra que le nombre des limites $\frac{r}{p}$, $\frac{r'}{p^2}$, $\frac{r''}{p^3}$, &c. qui deviendront nulles à ce point soit impair. Mais de $z = \frac{yq}{p}$, on tire

$\frac{r}{p} = \frac{yq'}{p^2} + \frac{q^2}{p^2}$, $\frac{r'}{p^2} = \frac{yq''}{p^3} + \frac{3qq'}{p^3}$, $\frac{r''}{p^3} = \frac{yq'''}{p^4} + \frac{4qq''}{p^4} + \frac{3q'^2}{p^4}$, &c.; donc &c. Nous prendrons pour exemple la courbe qui a pour équation $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$ (*fig. XL*), & pour laquelle

$\frac{q}{p} = \frac{3ax^2 - 4x^3}{2a^2y}$, $\frac{q'}{p^2} = \frac{3ax - 6x^2}{a^2y} - \frac{1}{y}\left(\frac{q}{p}\right)^2$, $\frac{q''}{p^3} = \frac{3a - 12x}{a^2y} - \frac{3}{y}\frac{q}{p}\frac{q'}{p^2}$, &c.; or $\frac{yq' + q^2}{p^2} = \frac{3ax - 6x^2}{a^2}$; nous ferons d'abord $3a - 6x = 0$, d'où $x = \frac{a}{2}$, $y = \pm\frac{a}{4}$, $z = \frac{a}{8}$, ce qui montre qu'à l'abscisse $AD = \frac{a}{2}$, répondent deux ordonnées DE, DE', chacune égale à $\frac{a}{4}$, & que les normales EK, $E'K$ sont telles que DK est la plus grande de toutes les sous-normales, puisque les substitutions faites dans $\frac{yq'' + 3qq'}{p^3}$ rendent cette formule égale à $\frac{-2}{a}$. Nous remarquerons en outre qu'au point A, origine des co-ordonnées, passent deux branches de la courbe qui à ce point ont pour tangente la ligne des abscisses.

(172). Il s'agit de trouver les points où AT (*fig. VII*), regardé comme fonction de x, est un plus grand ou un moindre? On fera $AT = z$, $\frac{r}{p} = 0$, & il faudra que le nombre des limites $\frac{r}{p}$, $\frac{r'}{p^2}$, $\frac{r''}{p^3}$, $\frac{r'''}{p^4}$, &c. qui deviendront nulles à ce point soit impair. Mais $z = \frac{yp}{q} - x$, $\frac{r}{p} = -y\left(\frac{p}{q}\right)^2\frac{q'}{p^2}$, $\frac{r'}{p^2} = -y\left(\frac{p}{q}\right)^2\frac{q''}{p^3} + 2y\left(\frac{p}{q}\right)^3\left(\frac{q'}{p^2}\right)^2 - \frac{p}{q}\frac{q'}{p^2}$, $\frac{r''}{p^3} = -y\left(\frac{p}{q}\right)^2\frac{q'''}{p^4} + 6y\left(\frac{p}{q}\right)^3\frac{q'}{p^2}\frac{q''}{p^3} - 2\frac{p}{q}\frac{q''}{p^3} + 3\left(\frac{p}{q}\right)^2\left(\frac{q'}{p^2}\right)^2 - 6y\left(\frac{p}{q}\right)^4\left(\frac{q'}{p^2}\right)^3$, &c. Ainsi pour trouver ce maximum ou ce minimum, on fera $\frac{q'}{p^2} = 0$, & il sera nécessaire

faire que les valeurs de x & y tirées de cette équation & de celle de la courbe ne fassent pas disparoître $\frac{q''}{p^3}$, ou que si $\frac{q''}{p^3}$ disparoît, il faudra que ces valeurs rendent nulle $\frac{q'''}{p^4}$ sans que $\frac{q^{iv}}{p^5}$ le devienne; il faut en un mot que le nombre des limites qui disparoissent par la substitution soit impair en comptant de la première exclusivement, celle qui suit immédiatement ayant une valeur réelle.

Si c'étoit la différence de y qui fût regardée comme constante, de $z = \frac{yp}{q} - x$, on tireroit $\frac{r}{q} = y\frac{p'}{q^2}$, $\frac{r'}{q^2} = y\frac{p''}{q^3} + \frac{p'}{q^2}$, $\frac{r''}{q^3} = y\frac{p'''}{q^4} + 2\frac{p''}{q^3}$, $\frac{r'''}{q^4} = y\frac{p^{iv}}{q^5} + 3\frac{p'''}{q^4}$, &c.; &, ayant fait $\frac{p'}{q^2} = 0$, il faudroit que le nombre des limites $\frac{p''}{q^3}$, $\frac{p'''}{q^4}$, $\frac{p^{iv}}{q^5}$, &c. qui disparoîtroient par la substitution, fût impair en comptant de la première exclusivement, celle qui suivroit immédiatement ayant une valeur réelle.

(173). Nous prendrons pour exemple la courbe qui a pour équation $ax^3 + by^3 + c^4 = 0$. On en tire

$$\frac{q}{p} = \frac{-ax^2}{by^2},\ \frac{q'}{p^2} = \frac{-2ax - 2by\left(\frac{q}{p}\right)^2}{by^2},\ \frac{q''}{p^3} = \frac{-2a - 2b\left(\frac{q}{p}\right)^3 - 6by\frac{q}{p}\frac{q'}{p^2}}{by^2}:$$

or l'équation $ax + by\left(\frac{q}{p}\right)^2 = 0$ & celle de la courbe donnent

$x = 0$, $y = -\frac{c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b}}$ qui ne rendent pas nulle $\frac{q''}{p^3}$; donc à ce point la ligne AT est un maximum. De $\frac{p}{q} = \frac{-by^2}{ax^2}$, on tire

$$\frac{p'}{q^2} = \frac{-2by - 2ax\left(\frac{p}{q}\right)^2}{ax^2},\ \frac{p''}{q^3} = \frac{-2b - 2a\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6ax\frac{p}{q}\frac{p'}{q^2}}{ax^2};$$

puis $by + ax\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 0$, qui avec celle de la courbe donnent

$y = 0$, $x = -\frac{c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}}$; donc pour cet autre point la ligne AT est encore un maximum.

(174). Lorsqu'une ligne courbe AFK (*fig. XLI*) est en partie concave & en partie convexe vers une droite AB, le point F qui sépare la partie concave de la convexe, est appellé *point d'inflexion*, lorsque la courbe étant parvenue

en F, continue ſon chemin vers le même côté ; & *point de rebrouſſement*, lorſqu'elle rebrouſſe chemin du côté de ſon origine. Il eſt clair que dans les courbes qui ont un point d'inflexion, l'abſciſſe AP croiſſant continuellement, la partie AT du diamètre, interceptée entre l'origine des x & la rencontre de la tangente, croît auſſi juſqu'à ce que le point P tombe en E, après quoi elle va en diminuant ; d'où l'on voit que AT étant regardée comme une fonction de l'abſciſſe, doit devenir un plus grand AL, lorſque le point P tombe ſur le point cherché E. Que dans les courbes qui ont un point de rebrouſſement, la partie AT croiſſant continuellement, l'abſciſſe AP croît auſſi juſqu'à ce que le point T tombe en L, après quoi elle va en diminuant ; d'où l'on voit que AP étant regardée comme une fonction de AT, doit devenir un plus grand AE lorſque le point T tombe en L.

Il ſuit delà que pour déterminer les points d'inflexion ou de rebrouſſement, il faut faire ou $\frac{q'}{p^3} = 0$, ou $\frac{p'}{q^3} = 0$, & examiner enſuite ſi le nombre des limites que font diſparoître les ſubſtitutions eſt impair en comptant de la première $\frac{q}{p}$ ou $\frac{p}{q}$ excluſivement. Ainſi la courbe qui a pour équation $ax^3 + by^3 + c^4 = 0$ ſubit inflexion aux deux points dont les co-ordonnées ſont $x = 0$, $y = -\frac{c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b}}$, &

$x = -\frac{c\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}}$, $y = 0$.

(175). La demi-cicloïde alongée CBA (*fig. XXXIII*), dont la baſe EA (i) ſurpaſſe la demi-circonférence CFE (h) du cercle générateur ayant pour diamètre $CE = 2a$, a pour équation (n°. 145) $y = LF + \frac{i}{h} CF$. Mais $LF = \sqrt{2ax - x^2}$, limite de $\frac{\Delta LF}{\Delta x} = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$, limite de $\frac{\Delta CF}{\Delta x} =$

$\frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$; donc $\frac{q}{p} = \frac{a \cdot \overline{h + i} - hx}{h\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{q'}{p^2} = \frac{aix - a^2 \cdot \overline{h + i}}{h(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$\frac{q''}{p^3} = \frac{-2ai(2ax - x^2) + 3a^2h(a - x) + 3a^3i}{h(2ax - x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

On fera $x = a \cdot \frac{h + i}{i}$; & comme la ſubſtitution de cette valeur ne fait pas diſparoître $\frac{q''}{p^3}$, il eſt clair que la courbe ſubit inflexion à ce point, pourvu toutefois que i ſoit plus grand que h, car s'il étoit moindre, on auroit $x - a \left(= a\frac{h}{i}\right)$ plus grand que a.

Nous propoſerons pour ſecond exemple une autre courbe connue ſous

le nom de conchoïde de Nicomède (n°. 149). En nommant AB, a, CB, b, si l'on prend pour l'équation de cette courbe $MN = a$ (*fig. XLII*); à cause de $PB = a - x$, les triangles semblables CPM, CBN donneront $a + b - x : y :: b : BN = \frac{by}{a+b-x}$. C'est pourquoi si l'on abaisse la perpendiculaire MQ sur BD, on aura $NQ = \frac{\overline{a-x} \cdot y}{a+b-x}$; &, à cause du triangle rectangle NQM, $a^2 = (a-x)^2 \frac{(a+b-x)^2 + y^2}{(a+b-x)^2}$, d'où l'on tire

$$y = \frac{a+b-x}{a-x} \sqrt{2ax - x^2}, \quad \frac{q}{p} = \frac{a^2 b + (a-x)^3}{(a-x)^2 \sqrt{2ax - x^2}},$$

$$\frac{q'}{p^2} = \frac{a^2 b \,[\, 2a^2 - 3(a-x)^2 \,] - a^2 (a-x)^3}{(a-x)^3 (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{q''}{p^3} =$$

$$\frac{3a^2 [\, 2a^2 b (a-x)^2 - 3b(a-x)^4 - (a-x)^5 \,] - 3a^2 b (2ax - x^2) [\, 2a^2 - (a-x)^2 \,]}{(a-x)^4 (2ax - x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Pour trouver où cette courbe subit inflexion, il faut faire

$$(a-x)^3 + 3b(a-x)^2 - 2a^2 b = 0,$$

& examiner celles des racines de cette équation qui ne font pas disparoître $\frac{q''}{p^3}$. Pour y parvenir, je fais $a - x = u - b$, & l'équation du troisième degré devient $u^3 - 3b^2 u = 2b(a^2 - b^2)$ dont une seule racine est réelle, lorsque a^2 est plus grand que $2b^2$, & ne fait pas disparoître $\frac{q''}{p^3}$; cette racine est (n°. 75)

$$u = \sqrt[3]{b(a^2 - b^2) + ab\sqrt{a^2 - 2b^2}} + \sqrt[3]{b(a^2 - b^2) - ab\sqrt{a^2 - 2b^2}}.$$

Lorsque a^2 est moindre que $2b^2$, si $2b(a^2 - b^2)$ est négatif, on nommera (n°. 67) A l'arc qui a pour sinus $\frac{2(a^2 - b^2)}{b}$, le rayon étant $2b$, & on aura pour les trois valeurs de u ces quantités sin. $\frac{A}{3}$, sin. $\frac{A + 2\pi}{3}$, sin. $\frac{A + 4\pi}{3}$; mais si $2b(a^2 - b^2)$ est positif, en nommant A l'arc qui a pour cosinus $\frac{2(a^2 - b^2)}{b}$, le rayon étant $2b$, on aura pour les trois valeurs de u ces quantités cos. $\frac{A}{3}$, cos. $\frac{A + 2\pi}{3}$, cos. $\frac{A + 4\pi}{3}$. On en tire pour le cas où $a = b$, $u = 0$, $u = b\sqrt{3}$, $u = -b\sqrt{3}$; & par conséquent $x = 2b$, $x = 2b - b\sqrt{3}$, $x = 2b + b\sqrt{3}$, dont la première & la troisième ne peuvent être admises,

& il n'y a d'inflexion qu'au point où $x = 2b - b\sqrt{3}$. Lorsque $a^2 = 2b^2$, on a pour racines de l'équation du troisième degré $u = 2b$ & $(u+b)^2 = 0$, dont la première seule indique le point où la courbe subit inflexion. Quelqu'hypothèse qu'on fasse sur a & b, la conchoïde n'a qu'un seul point où elle subit inflexion.

(176). Soit encore pris pour exemple la courbe qui a pour équation

$$y^3 + 3xy^2 - 3ay^2 - 12axy - 4ax^2 + 4a^2x = 0;$$

on en tire l'équation aux différences

$$3(y^2 + 2xy - 2ay - 4ax)\Delta y + (3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2)\Delta x + 3(y + x - a)\Delta y^2 + 6(y - 2a)\Delta y\Delta x - 4a\Delta x^2 + \Delta y^3 + 3\Delta x\Delta y^2 = 0.$$

Pour s'assurer d'abord si cette courbe a des points multiples*, on fera

$y^2 + 2xy - 2ay - 4ax = 0$, $3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2 = 0$,

desquelles on tirera, en éliminant x, $3y^3 - 14ay^2 + 20a^2y - 8a^3 = 0$, dont le premier membre a pour facteurs $(y - 2a)^2$, $3y - 2a$.

A $y = 2a$, répond $x = -a$; & comme ces seules valeurs satisfont à la proposée, la courbe n'a qu'un point double déterminé par l'équation $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 0$, qui indique qu'à ce point deux des branches de la courbe se touchent, & ont pour tangente commune une parallèle aux ordonnées.

Ayant tiré de l'équation aux différences finies

$$\frac{q}{p} = \frac{-3y^2 + 12ay + 8ax - 4a^2}{3y^2 + 6xy - 6ay - 12ax}, \quad \frac{q'}{p^2} = \frac{8a + 12(a - 2y)\frac{q}{p} + 6(a - x - y)\frac{q^2}{p^2}}{3y^2 + 6xy - 6ay - 12ax},$$

$$\frac{q''}{p^3} = \frac{18(2a - y)\frac{q'}{p^2} + 18(a - x - y)\frac{qq'}{p^3} - 18\frac{q^2}{p^2} - 6\frac{q^3}{p^3}}{3y^2 + 6xy - 6ay - 12ax},$$

si l'on fait $8a + 12(a - 2y)\frac{q}{p} + 6(a - x - y)\frac{q^2}{p^2} = 0$; en combinant cette équation avec la proposée, on aura entr'autres valeurs de y & x, celles-ci $y = 0$, $x = a$, qui ne rendent pas nul le numérateur de $\frac{q''}{p^3}$; la courbe a donc une inflexion au point où $y = 0$ & $x = a$.

De $\frac{p}{q} = \frac{12ax + 6ay - 6xy - 3y^2}{3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2}$, on tire aussi

$$\frac{p'}{q^2} = \frac{6(a - x - y) + 12(a - 2y)\frac{p}{q} + 8a\frac{p^2}{q^2}}{3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2},$$

$$\frac{p''}{q^3} = \frac{-6 - 18\frac{p}{q} + 18(2a - y)\frac{p'}{q^2} + 24a\frac{pp'}{q^3}}{3y^2 - 12ay - 8ax + 4a^2};$$

or

cr l'équation $6(a-x-y)+12(a-2y)\frac{p}{q}+8a\frac{q^2}{p^2}=0$, étant combinée avec la proposée, donne entr'autres valeurs de y & x, $y=2a$, $x=-a$, qui ne rendent pas nul le numérateur de $\frac{p'}{p^3}$; donc ce point, où deux des branches de la courbe se touchent, est un point de rebroussement.

(177). Je passe à la recherche du rayon de courbure. Si l'on conçoit qu'une ligne courbe quelconque BRR' concave vers le même côté, soit enveloppée d'un fil $ABRR'$, dont l'une des extrêmités soit fixe en un point de cette courbe, & l'autre soit tendue le long de la tangente BA, & que l'on fasse mouvoir l'extrêmité A en la tenant toujours tendue, & en développant continuellement la courbe BRR', on voit que l'extrêmité A de ce fil décrira dans ce mouvement une ligne courbe AMM'. Cela posé, la courbe BRR' sera nommée la *développée* de la courbe AMM'; & les parties droites AB, MR, MR' du fil seront nommées les rayons de la développée, ou *rayons de courbure* de la courbe AMM'. Je suppose que deux rayons de courbure MR, $M'R'$ se coupent en un point S, & que de ce point comme centre, avec un rayon égal à l'unité, on décrive l'arc $\alpha\mathcal{C}$. D'après la définition, il est clair que plus le point M' approchera du point M, plus le rapport entre l'arc $\alpha\mathcal{C}$ & l'arc MM' de la courbe, approchera du rapport qu'il y auroit entre le même arc $\alpha\mathcal{C}$, & un autre arc décrit du point S comme centre avec le rayon SM; rapport qui n'est autre que celui de 1 à SM, lequel approche continuellement de celui de 1 à RM. On voit donc que le rapport de l'unité au rayon de courbure, est la limite du rapport entre l'arc $\alpha\mathcal{C}$ & l'arc MM' de la courbe; ou ce qui revient au même, qu'il est la limite du rapport entre les différences de l'angle MKA, formé par la normale MK & la ligne des abscisses, & de l'arc AM de la courbe. Il faut remarquer que lorsque la courbe est concave, comme dans la figure ci-jointe, les angles que forment les normales avec la ligne des abscisses, vont en augmentant en partant de l'origine des cô-ordonnées; & qu'au contraire, ces mêmes angles vont en diminuant quand la courbe est convexe. De plus, en nommant $\frac{s}{p}$, $\frac{s}{q}$ les limites des rapports entre les différences finies de l'arc AM & de l'abscisse, de l'arc AM & de l'ordonnée (n°. 143), on a sin. $MKA=\frac{p}{s}$, cos. $MKA=\frac{q}{s}$; d'où l'on tire, en nommant R le rayon de courbure,

$$\frac{1}{R}\left(=\text{limite de }\frac{\Delta MKA}{\Delta AM}\right)=\pm\text{limite de}\frac{\Delta\left(\frac{p}{s}\right)}{\Delta y}=\mp\text{limite de}\frac{\Delta\left(\frac{q}{s}\right)}{\Delta x}.$$

Mais en regardant Δx comme constant, limite de $\frac{\Delta\left(\frac{p}{s}\right)}{\Delta y}=-\frac{ps'}{s^2q}$, limite de $\frac{\Delta\left(\frac{q}{s}\right)}{\Delta x}=\frac{sq'-qs'}{s^2p}$; donc $R=\mp\frac{qs^2}{ps'}=\mp\frac{ps^2}{sq'-qs'}$, ou sim-

plement $R = \mp \frac{qs^2}{ps'}$, car les deux expreffions font identiquement les mêmes ; & l'on ne perdra pas de vue que le figne — eft pour la courbe concave & le figne + pour la courbe convexe. A caufe des triangles femblables MPK, MQR, on en tire facilement $MQ = \mp \frac{qs}{s'}$, $QR = \mp \frac{q}{p} \cdot \frac{qs}{s'}$.

(178). Si la courbe propofée eft la parabole ordinaire qui a pour équation $y^2 = ax$, d'où l'on tire

$$\frac{q}{p} = \frac{a}{2\sqrt{ax}},\ \frac{s}{p} = \frac{\sqrt{4x+a}}{2\sqrt{x}},\ \frac{s'}{p^2} = \frac{-a}{4x\sqrt{x}\sqrt{4x+a}},\ \frac{s}{s'} = -2x\frac{4x+a}{ap};$$

on aura $R = \frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{a}}$, $MQ = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, $QR = 2x + \frac{a}{2}$.

Mais en faifant $x = 0$ dans l'expreffion de R, on en tire $AB = \frac{a}{2}$: c'eft pourquoi fi l'on nomme t & u les co-ordonnées perpendiculaires BE & ER, on aura $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, $u = 3x$; & pour équation de la développée $u^3 = \frac{27a}{16}t^2$, qui eft celle d'une feconde parabole cubique dont le paramètre eft les $\frac{27}{16}$ du paramètre de la parabole propofée. Nous verrons tout à l'heure que cette développée eft rectifiable, la parabole elle-même ne l'étant pas.

(179). Prenons pour fecond exemple les courbes du fecond ordre dont l'équation générale peut fe réduire à $ay^2 + cx^2 + ex = 0$. On en tire $\frac{q}{p} = -\frac{2cx+e}{2ay}$; &, faifant $a - c = i$,

$$\frac{s}{p} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4cix^2+4eix-e^2}{ax(cx+e)}},\ \frac{s'}{p^2} = \frac{ae^2(2cx+e)}{4(ax\cdot cx+e)^{\frac{3}{2}}\sqrt{4cix^2+4eix-e^2}};$$

& par conféquent $R = \frac{(e^2-4eix-4cix^2)^{\frac{3}{2}}}{2ae^2}$, ou, à caufe de $MK = \frac{\sqrt{e^2-4eix-4cix^2}}{2a}$, $R = \frac{4a^2}{e^2}\overline{MK}^3$. Pour l'ellipfe en particulier, dont l'équation eft $y^2 = \frac{g^2}{h^2}(2hx - x^2)$, on a $a = h^2$, $c = g^2$, $e = -2hg^2$, $i = h^2 - g^2$; partant $R = \frac{(h^2g^2 + 2hix - ix^2)^{\frac{3}{2}}}{gh^4}$. On tire de cette expreffion, faifant $x = 0$, puis $x = h$ (*fig. XLIV*), $AB = \frac{g^2}{h}$, $DH = \frac{h^2}{g}$.

Maintenant, à cauſe de $R = \frac{h^2}{g^4} \overline{MK}^3$ & des triangles ſemblables MPK, MQR, on a $h^2 g^2 : h^2 g^2 + 2hix - ix^2 :: y : MQ :: \frac{g^2}{h^2}(h-x) : QR$, d'où l'on tire $BE = \frac{iy}{h^2 g^2}(2hx - x^2)$, $ER = \frac{ix}{h^2} + \frac{i}{h^4}(h-x)(2hx-x^2)$, & faiſant $\frac{h^2}{i} BE = t$, $\frac{h^2}{i} ER = u$,

$$hgt = (2hx - x^2)^{\frac{3}{2}},\ h^2(h-u) = (h-x)^3.$$

On éliminera x, & on aura pour l'équation de la développée de l'ellipſe,

$$g^2 t^2 = h\left(h - \sqrt[3]{h(h-u)^2}\right)^3 \text{ ou } h(h-u)^2 = \left(h - \sqrt[3]{\frac{g^2 t^2}{h}}\right)^3,$$

qui forme un point de rebrouſſement en H où $t = \frac{h^2}{g}$ & $u = h$.

(180). Si la courbe propoſée eſt la demi-cicloïde CBA (n°. 175.) pour laquelle $\frac{q}{p} = \frac{a(h+i) - hx}{h\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{s}{p} = \frac{\sqrt{a^2(h+i)^2 - 2ahix}}{h\sqrt{2ax-x^2}}$,

$$\frac{s'}{p^2} = -\frac{ahi(2ax-x^2) + (a-x)(a^2 \cdot \overline{h+i}^2 - 2ahix)}{h(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^2(h+i)^2 - 2ahix}},\text{ on a}$$

$$R = \frac{a(h+i) - hx}{h^2} \cdot \frac{(a^2 \cdot \overline{h+i}^2 - 2ahix)^{\frac{3}{2}}}{ahi(2ax-x^2) + (a-x)(a^2 \cdot \overline{h+i}^2 - 2ahix)},$$

qui devient lorſque $i = h$, $R = 2\sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a - x}$. Mais $MK = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a - x}$; ſi donc l'on tire (*fig. XLV*) la corde $FE = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a - x}$, on aura $R = 2\,MK = 2\,FE$.

Si dans l'expreſſion du rayon de courbure on fait $x = 0$, on aura $R = 4a$; & ſi l'on fait $x = 2a$, on aura $R = 0$, ce qui montre que la développée a ſon origine en A; & que ſi l'on prolonge le diamètre CE, juſqu'à ce qu'il rencontre la développée au point H où elle ſe termine, on doit avoir $EH = EC$. Pour déterminer la nature de cette développée, il faut achever le rectangle EB, décrire le demi-cercle AIB & tirer AI parallèle au rayon de courbure RM, qui lui-même eſt parallèle à FE, à cauſe de $MK = FE$. Alors les angles AEF, EAI étant égaux, les arcs AI & FE le feront; la corde AI étant égale à la corde FE, le ſera à RK; & ſi l'on tire RI, cette droite ſera égale & parallèle à AK qui par la génération de la cicloïde eſt égale à l'arc FE ou à l'arc AI. Donc la développée de cette cicloïde eſt la cicloïde elle-même dans une ſituation renverſée.

(181). Nous avons enſeigné à réſoudre généralement ce problême : trouver

les limites des rapports entre les différences des quantités variables dont le rapport est donné. Le problême inverse consiste à remonter des limites des rapports entre les différences, au rapport même des quantités. Par exemple, étant donné $\frac{q}{p} = a x^n$, si on demandoit le rapport entre les variables y & x, on trouveroit que hors le cas de $n = -1$, ce rapport est donné par l'équation $y = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + c$; c est une constante arbitraire qu'il est nécessaire d'ajouter, puisque généralement $\frac{q}{p} = a x^n$ ne vient pas plutôt de $y = \frac{a x^{n+1}}{n+1}$, que de $y = \frac{a x^{n+1}}{n+1}$ augmenté ou diminué d'une quantité constante (n°. 114). Lorsque $n = -1$, on a $\frac{q}{p} = \frac{a}{x}$ qui donne $y = a$ log. $x + c$, ou mieux $y = a$ log. $x +$ log. b, car log. b peut également représenter une constante quelconque, ou encore $y =$ log. $b x^a$.

Plus généralement, X étant une fonction de x & de constantes, si la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a X^n$, on aura, hors le cas de $n = -1$, $y = \frac{a}{n+1} X^{n+1} + c$, & lorsque $n = -1$, $y =$ log. $b X^a$; ce qui nous indique un grand nombre de cas où l'on peut facilement résoudre le problême. Représentons par $\frac{q}{p}$ la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta X}$, & M étant une fonction de x, proposons $\frac{q}{p} = M$; le problême sera résolu toutes les fois qu'on pourra transformer l'équation précédente en celle-ci $\frac{q}{p} = a X^n$. Par exemple si $\frac{q}{p} = \frac{h x}{\sqrt{i^2 \pm x^2}}$, on fera $i^2 \pm x^2 = X$, d'où $\frac{p}{p} = \pm 2 x$ & $\frac{q}{p} = \pm \frac{h}{2} X^{-\frac{1}{2}}$. On en tire $y = \pm \frac{3h}{4} X^{\frac{2}{3}} + c = \pm \frac{3h}{4} \sqrt[3]{(i^2 \pm x^2)^2} + c$.

Si $\frac{q}{p} = \frac{e + f x}{(g + h x + i x^2)^\mu}$, on fera $g + h x + i x^2 = X$, d'où $\frac{p}{p} = h + 2 i x$ & $\frac{q}{p} = \frac{e + f x}{h + 2 i x} (g + h x + i x^2)^{-\mu}$, qui pour être ramenée à la formule générale exige que $e = a h$, $f = 2 a i$.

Alors $y = \frac{-a}{\mu - 1} (g + h x + i x^2)^{-\mu + 1} + c$.

(182). On propose l'équation $\frac{q}{p} = K x^m (h + i x^r)^s$, K, h, i sont des co-efficiens constans & m, r, s des nombres quelconques, positifs ou négatifs, entiers

entiers ou fractionnaires. En développant $(h+ix^r)^s$, on trouve

$$h^s+sh^{s-1}ix^r+s\cdot\frac{s-1}{2}h^{s-2}i^2x^{2r}+s\cdot\frac{s-1}{2}\cdot\frac{s-2}{3}h^{s-3}i^3x^{3r}+\&c.;$$

il suit delà que si s est un nombre entier positif, on aura $\frac{q}{p}$ égal à un nombre fini de termes de la forme ax^n, d'où il sera facile de tirer la valeur de y.

Je fais $h+ix^r=X$, d'où $x=\left(\frac{X-h}{i}\right)^{\frac{1}{r}}$, $x^m=\left(\frac{X-h}{i}\right)^{\frac{m}{r}}$,

$$\frac{p}{P}=\frac{1}{ir}\left(\frac{X-h}{i}\right)^{\frac{1-r}{r}},\ x^m\frac{p}{P}=\frac{1}{ir}\left(\frac{X-h}{i}\right)^{\frac{m+1}{r}-1};$$

faisant toutes ces substitutions, l'équation proposée devient

$$\frac{q}{P}=\frac{KX^s}{ir}\left(\frac{X-h}{i}\right)^{\frac{m+1}{r}-1}.$$

Si $\frac{m+1}{r}$ est un nombre entier positif, on pourra trouver la valeur de y en une fonction algébrique de x & de constantes, ou qui ne renferme d'autres quantités transcendantes que des logarithmes. Car alors ou $\frac{m+1}{r}-1$ sera zéro, ou il sera un nombre entier positif. S'il est zéro, ce qui donne $m=r-1$, on aura $\frac{q}{P}=\frac{KX^s}{ir}$, d'où l'on tire $y=\frac{KX^{s+1}}{ir(s+1)}+c=\frac{K}{ir}\frac{(h+ix^r)^{s+1}}{s+1}+c$, & lorsque $s=-1$, $y=\log.\left(bX^{\frac{K}{ir}}\right)=\log.\left(b(h+ix^r)^{\frac{K}{ir}}\right)$.

S'il est un nombre entier positif, on aura $\frac{q}{p}$ égal à un nombre fini de termes de la forme aX^n. L'équation $\frac{q}{p}=Kx^3\sqrt{h+ix^2}$ est dans ce second cas; en faisant $h+ix^2=X$, on la transforme en celle-ci $\frac{q}{p}=\frac{K}{2i^2}\left(X^{\frac{3}{2}}-hX^{\frac{1}{2}}\right)$, d'où l'on tire

$$y=\frac{K}{15i^2}(3X^2-5hX)\sqrt{X}+e=\frac{K}{15i^2}(3ix^2-2h)(h+ix^2)^{\frac{3}{2}}+e.$$

Donnons à l'équation $\frac{q}{p}=Kx^m(h+ix^r)^s$ la forme que voici, $\frac{q}{p}=Kx^{m+rs}(hx^{-r}+i)^s$; & nous verrons qu'on peut encore trouver la valeur de y en une fonction algébrique de x & de constantes, ou qui ne renferme

d'autres quantités tranſcendantes que des logarithmes, toutes les fois que $\frac{m+rs+1}{-r}$ eſt un nombre entier poſitif. Ainſi l'équation $\frac{q}{p} = Kx^{-6}\sqrt{h+ix^2}$ ayant été changée en cette autre $\frac{q}{p} = Kx^{-5}\sqrt{hx^{-2}+i}$, on fera $hx^{-2}+i = X$, d'où l'on tire $x = \left(\frac{X-i}{h}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{p}{P} = \frac{-1}{2h}\left(\frac{X-i}{h}\right)^{-\frac{3}{2}}$; ſubſtituant ces valeurs, on a $\frac{q}{P} = -\frac{K}{2h^2}\left(X^{\frac{3}{2}} - hX^{\frac{1}{2}}\right)$, & par conſéquent $y = c - \frac{K}{2h^2}\left(\frac{2}{5}X^{\frac{5}{2}} - \frac{2h}{3}X^{\frac{3}{2}}\right) = c - \frac{K}{15h^2}(3hx^{-5} - 2ix^{-3})(h+ix^2)^{\frac{3}{2}}$.

(183). Le premier uſage qu'on ait fait de la méthode précédente, a été de l'appliquer à la quadrature & à la rectification des lignes courbes, à la meſure des ſurfaces & des ſolidités.

Soit une courbe AMM' (*fig. XLVI*), & deux ordonnées MP, $M'P'$ perpendiculaires à l'axe AC; je tire une corde MM', & je conſtruis un rectangle $BAPL$ qui ait AP pour baſe, & dont la hauteur AB ſoit conſtante & priſe pour l'unité. Nous avons démontré (nº. 116) que l'eſpace $MPP'M'$, terminé par l'arc MM', eſt la différence de l'eſpace APM; or le rapport du trapèze $MPP'M'$ au rectangle $LPP'K$, différence du rectangle $BAPL$, approchera d'autant plus du rapport de l'eſpace $MPP'M'$, différence de l'eſpace APM, au même rectangle $LPP'K$, que le point M' ſera plus près du point M. On trouvera la limite du rapport entre le trapèze & le rectangle $LPP'K$, en cherchant ce que devient le rapport entre les différences de l'eſpace APM & du rectangle $BAPL$, lorſque $\Delta x = 0$ & $\Delta y = 0$; c'eſt-à-dire que la limite du rapport entre ces différences eſt auſſi la limite du rapport entre le trapèze $MPP'M'$ & le rectangle $LPP'K$. Le trapèze eſt égal à $\frac{2y+\Delta y}{2}\Delta x$, & le rectangle à $1 \cdot \Delta x$; on a donc $y + \frac{\Delta y}{2}$ pour le rapport entre ces deux quantités, & y pour la limite de ce rapport. Donc en nommant E l'eſpace APM, & $\frac{1}{p}$ la limite de $\frac{\Delta E}{\Delta x}$, on aura $\frac{1}{p} = y$, & il ne s'agira plus que de trouver la valeur de y en x, au moyen de l'équation de la courbe. Si les ſubſtitutions faites, la valeur de $\frac{1}{p}$ eſt telle qu'en remontant au rapport des quantités E & x, on le trouve donné par une équation algébrique, la courbe ſera de celles qu'on dit être *quarrables* exactement, ou ſimplement quarrables.

(184). Suppoſons $y^m = x$; cette équation exprime la nature de toutes les paraboles, lorſque l'expoſant m eſt un nombre poſitif entier ou fractionnaire, & de toutes les hyperboles lorſqu'il eſt un nombre négatif. On aura

$$\frac{1}{p} = y = x^{\frac{1}{m}}, \text{ d'où l'on tire } E = \frac{m}{m+1}x^{\frac{m+1}{m}} + c = \frac{m}{m+1}xy + c.$$

Ainsi les paraboles de tous les genres sont des courbes quarrables; il en est de même de toutes les hyperboles rapportées à leurs asymptotes, excepté l'hyperbole ordinaire. La quadrature de l'hyperbole ordinaire équilatère, rapportée aux asymptotes, en prenant la première abscisse pour l'unité, dépend de la construction d'une logarithmique, dans laquelle la sous-tangente seroit prise pour l'unité, & c'est la raison pour laquelle on a donné à ces logarithmes le nom de logarithmes hyperboliques.

De l'équation $\frac{q}{p} = \frac{\pm 1}{1 \pm x}$, on tire $y = \log.(1 \pm x) + \log. b$, ou faisant ensorte que $y = 0$ lorsque $x = 0$, $y = \log.(1 \pm x)$. Mais $\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \&c.$; donc $\frac{q}{p} = \pm 1 - x \pm x^2 - x^3 \pm \&c.$, & $y = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \&c.$ On déduira aisément delà que $\log. \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \&c.$, formule que nous avons démontrée d'une autre manière n°. 164.

(185). La formule pour rectifier les lignes courbes est $s = \sqrt{p^2 + q^2}$. Si l'on vouloit savoir quelles sont les paraboles qu'on peut rectifier, on le trouveroit en mettant dans la formule précédente pour $\frac{q}{p}$ sa valeur tirée de l'équation $y^m = x$, & on auroit $\frac{s}{p} = \frac{1}{m} \sqrt{m^2 + x^{2\left(\frac{1}{m} - 1\right)}}$. Or il est clair qu'on peut trouver l'arc AM exactement dans les deux cas suivans; lorsque $\frac{m}{2(1-m)}$ & $\frac{1}{2(m-1)}$ sont l'un ou l'autre des nombres entiers positifs.

Ainsi i étant un nombre entier positif, les paraboles $y^{2i} = x^{2i+1}$, ou $y^{2i+1} = x^{2i}$ sont rectifiables. Je tire de la seconde équation $y = x^{\frac{2i}{2i+1}}$, $\frac{q}{p} = \frac{2i}{2i+1} x^{\frac{-1}{2i+1}}$, & par conséquent $\frac{s}{p} = x^{\frac{-1}{2i+1}} \sqrt{\frac{4i^2}{(2i+1)^2} + x^{\frac{2}{2i+1}}}$. Je fais $\frac{4i^2}{(2i+1)^2} + x^{\frac{2}{2i+1}} = X$, d'où $x = \left[X - \frac{4i^2}{(2i+1)^2}\right]^{\frac{2i+1}{2}}$, $\frac{p}{P} = \frac{2i+1}{2}\left[X - \frac{4i^2}{(2i+1)^2}\right]^{\frac{2i-1}{2}}$; substituant ces valeurs, il vient $\frac{s}{P} = \frac{2i+1}{2} X^{\frac{1}{2}} \left[X - \frac{4i^2}{(2i+1)^2}\right]^{i-1}$, dont le second membre étant développé donnera une suite finie de termes de cette

forme aX^n. Le paramètre étant 1, la parabole cubique du n°. 178 a pour équation $y^3 = x^2$; on a alors $i = 1$ & pour la valeur de l'arc, $X^{\frac{3}{2}} + c = \left(\frac{4}{9} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}_{4} + c$.

(186). Le rayon étant pris pour l'unité, nommons y le sinus d'un arc u, on aura (n°. 154) $\frac{n}{q} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. A cause de

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{1\cdot 3\, y^4}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\, y^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\, y^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \&c.,$$

on a $u = y + \frac{y^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\, y^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\, y^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\, y^9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \&c.$,

puisque $y = 0$ doit donner $u = 0$. Cette série est tellement convergente qu'il suffit des dix premiers termes pour avoir un rapport très-approché de la circonférence au rayon (n°. 164). Aucune courbe du second ordre n'est rectifiable; peu d'autres le font; la cicloïde simple l'est évidemment, puisqu'on a $\frac{s}{p} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x}}$, d'où l'on tire, en nommant S l'arc CB de la cicloïde (*fig. XXXIII*), $S = 2\sqrt{2ax}$. Pour avoir une équation plus générale, & à laquelle nous puissions rapporter toutes celles de la même courbe qui se présenteront dans les applications qui vont suivre, soit tiré une droite IOG, qui fasse avec le diamètre un angle m; puis ayant abaissé la perpendiculaire IK & tiré BH, qui fasse avec IOG un angle q, on nommera CK, h, IH, X, HB, Y; alors la formule du n°. 23 donnera $x = h + X\cos. m - Y\cos.(q - m)$; partant

$$S = 2\sqrt{2a}\,\sqrt{h + X\cos. m - Y\cos.(q-m)}.$$

(187). Imaginons que toute la figure (*fig. XLVI*) fasse une révolution entière sur l'axe AC; & nommons S la surface décrite par l'arc AM, laquelle surface a pour différence la zone décrite par l'arc MM'. La surface décrite par la corde $MM' = \pi(2y + \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, & celle décrite par la ligne $LK = 2\pi\Delta x$, à cause de $AB = 1$; on a donc pour le rapport entre ces deux surfaces $\frac{2y+\Delta y}{2\Delta x}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, & pour la limite de ce rapport $y\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p}$. Mais ce même rapport approchera d'autant plus de $\frac{\Delta S}{2\pi\Delta x}$ que le point M' sera plus près du point M, c'est-à-dire, qu'il a aussi pour limite celle de $\frac{\Delta S}{2\pi\Delta x}$; & si on la représente par $\frac{s}{2\pi p}$, on aura $s = 2\pi y\sqrt{p^2+q^2}$; c'est la formule dont on fait usage pour trouver la surface de tout solide de révolution.

Si,

Si, par exemple, le folide de révolution eft une fphère qui a r pour rayon, on a $\varsigma = 2\pi r p$, & $S = 2\pi r x + c$: $2\pi r x$ eft la furface de la calote qui a x pour flèche; fi dans cette expreffion on fait $x = 2r$, on aura $4\pi r^2$ pour la furface de la fphère. Mais fi l'on vouloit la zone comprife entre deux petits cercles, dont le plus près de l'équateur en feroit éloigné de la quantité b, & l'autre de la quantité d, il faudroit faire enforte que S fût nulle lorfque $x = r - d$, ce qui donneroit $2\pi r(r-d) + c = 0$, & $S = 2\pi r(d - r + x)$; on feroit enfuite $x = r - b$, & on auroit pour la furface demandée $2\pi r(d-b)$.

Pour trouver la furface d'un paraboloïde dont le paramètre $= a$, on a $\varsigma = \pi p\sqrt{4ax + a^2}$ & $S = \frac{\pi}{6a}(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}} + c$; & fi l'on veut cette furface à compter du fommet A, on trouvera qu'elle eft égale à $\frac{\pi}{6a}(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi a^2}{6}$.

(188). Je nomme T le folide engendré par l'efpace APM dans fa révolution fur l'axe AC; ce folide a pour différence le folide engendré par l'efpace $MPP'M'$ terminé par l'arc MM'. Cela pofé, le cône tronqué engendré par le trapèze $MPP'M' = \frac{\pi}{3}[3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2]\Delta x$, & le cylindre engendré par le rectangle $LPP'K = \pi\Delta x$; on a donc pour le rapport entre ces deux folides $\frac{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}{3}$, & pour la limite de ce rapport y^2. Mais ce même rapport approchera d'autant plus de $\frac{\Delta T}{\pi\Delta x}$ que Δx fera moindre, c'eft-à-dire, que nommant $\frac{\tau}{\pi p}$ la limite de $\frac{\Delta T}{\pi\Delta x}$, on doit avoir $\tau = \pi y^2 p$, c'eft la formule propre à trouver la folidité de tout folide de révolution.

Si c'eft une fphère, on a $\tau = \pi(2rx - x^2)p$, & pour la calote dont la flèche eft x, $\pi\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$, car alors T doit être nul lorfque $x = 0$; dans cette expreffion, je fais $x = 2r$, & il vient pour le folide de la fphère $\frac{4}{3}\pi r^3$. Si le folide de révolution eft un paraboloïde dont le paramètre $= a$, on a $\tau = \pi a x p$, & $T = \frac{\pi a x^2}{2} + c$. Je demande le tronc compris entre l'ordonnée qui paffe par le foyer & une autre ordonnée quelconque; dans ce cas T doit être nul lorfque $x = \frac{a}{4}$, ce qui donne pour la quantité demandée, $\frac{\pi a}{2}\left(x^2 - \frac{a^2}{16}\right)$; fi ce tronc devoit avoir pour hauteur b, on feroit $x = \frac{a}{4} + b$; & on auroit le folide du tronc égal à $\frac{\pi a}{2}\left(\frac{ab}{2} + b^2\right)$. Si le folide a été formé

par la révolution d'un espace elliptique ou hyperbolique autour de l'axe $2a$; à cause de $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax \mp x^2)$, on a $\tau = \frac{\pi b^2}{a^2}(2ax \mp x^2)p$, & $T = \frac{\pi b^2}{3a^2}(3ax^2 \mp x^3) + c$.

CHAPITRE V.

USAGE DE LA MÉTHODE DES LIMITES POUR DÉMONTRER LES PRINCIPES DE LA MÉCHANIQUE.

Du centre de gravité.

(189). TOUS les corps sont pesans. Abandonnés à eux-mêmes, ils descendent suivant des directions perpendiculaires à la surface de la terre, ou qui tendent à-peu-près au centre de cette planète, que l'on sait être un sphéroïde très-peu différent de la sphère. Les corps qui sont à sa surface ont trop peu d'étendue, relativement à la grande distance de son centre, pour qu'on doive avoir égard aux très-petits angles que font entr'elles les directions des parties qui les composent considérées comme de petits corps pesans. On peut donc sans craindre aucune erreur sensible, regarder toutes ces directions comme parallèles; & quoique la pesanteur n'agisse pas également à différentes distances du centre de la terre, qu'elle augmente ou diminue en même raison que les quarrés de ces distances augmentent ou diminuent, on peut, sans craindre aucune erreur sensible, n'avoir aucun égard à la différence de pesanteur d'une partie à l'autre d'un même corps. Ainsi nous regarderons la pesanteur de toutes les molécules de matière comme une force constante, & les directions des poids de toutes les parties d'un même corps comme parallèles entr'elles.

Or on démontre dans les traités de statique que lorsque les forces sont parallèles, quelque situation qu'on puisse donner au systême d'un nombre quelconque de corps, pourvu qu'ils conservent entr'eux les mêmes distances, les directions des résultantes se couperont toutes en un même point. Il y a donc dans tous les corps un point tel, que si l'on suspend ce corps par un cordon dont la direction prolongée passe par ce point, il demeurera immobile dans toutes les situations possibles; c'est ce point auquel on a donné le nom de *centre de gravité*.

(190). On appelle *momens* les produits des forces par les distances de leurs directions à un point, à une ligne, à un plan; & l'on démontre que lorsque les forces sont parallèles, si elles sont placées d'un même côté du point, de la ligne

ou du plan, la somme de leurs momens particuliers est égale au moment de la résultante ; mais que lorsque ces forces sont placées de différens côtés, la différence entre la somme des momens des forces placées d'un côté, & la somme des momens des forces placées de l'autre côté, est égale au moment de la résultante.

Cela posé, la courbe *AME* (*fig. XLVII*) étant regardée comme un corps pesant, si on la suppose composée de parties telles que *MM'*, & qu'on imagine deux axes perpendiculaires entr'eux *AB*, *AD* ; on aura le moment de la ligne entière par rapport à chacun de ces axes, égal à la somme des momens de toutes ses parties par rapport aux mêmes axes. On pourra dire la même chose de l'espace *ABE*, de la surface décrite par l'arc *AE* dans la révolution de la figure sur l'axe *AB*, & du solide engendré par l'espace *ABE* dans la même révolution.

(191). Je prends sur *AE* un arc indéterminé *AM*, & j'imagine que le centre de gravité de cet arc est en *C*, que celui de sa différence *MM'* est en *C'* ; je mène aux deux axes *AB*, *AD* les parallèles *CK*, *CO* ; *C'R*, *C'S*. Il est clair que les momens $AM \cdot CK$, $AM \cdot CO$ ont pour différences $MM' \cdot C'R$, $MM' \cdot C'S$; c'est-à-dire, que $\frac{\Delta(AM \cdot CK)}{\Delta AM} = C'R$, & que $\frac{\Delta(AM \cdot CO)}{\Delta AM} = C'S$. Mais lorsque $\Delta x = 0$, *C'R* devient *AP*, & *C'S* devient *PM* ; donc, nommant s l'arc *AM*, $\lim. \frac{\Delta(s \cdot CK)}{\Delta s} = x$, $\lim. \frac{\Delta(s \cdot CO)}{\Delta s} = y$, d'où l'on tirera *CK*, *CO*, & la position du centre de gravité de l'arc *AM*.

Supposons que *C* & *C'* soient les centres de gravité des espaces *APM*, *MPP'M'* ; on aura $\frac{\Delta(APM \cdot CK)}{\Delta APM} = C'R$, $\frac{\Delta(APM \cdot CO)}{\Delta APM} = C'S$. Mais lorsque $\Delta x = 0$, *C'R* devient *AP* & *C'S* devient $\frac{PM}{2}$, puisque le centre de gravité d'une ligne droite est dans son milieu ; donc, nommant *E* l'espace *APM*, $\lim. \frac{\Delta(E \cdot CK)}{\Delta E} = x$, $\lim. \frac{\Delta(E \cdot CO)}{\Delta E} = \frac{y}{2}$.

Les centres de gravité des surfaces décrites par *AM*, *MM'* & des solides engendrés par les espaces *APM*, *MPP'M'*, dans la révolution de la figure sur l'axe *AB*, sont placés dans cet axe. Soit en *O* & *S* les centres de gravité des surfaces décrites par *AM* & *MM'* ; en nommant *S* la surface décrite par *AM*, on aura $\frac{\Delta(S \cdot AO)}{\Delta S} = SA$, & lorsque $\Delta x = 0$, $\lim. \frac{\Delta(S \cdot AO)}{\Delta S} = x$.

Si les points *O* & *S* sont les centres de gravité des solides engendrés par les espaces *APM*, *MPP'M'* ; en nommant Σ le solide engendré par l'espace *APM*, on aura $\frac{\Delta(\Sigma \cdot AO)}{\Delta \Sigma} = SA$, & lorsque $\Delta x = 0$, $\lim. \frac{\Delta(\Sigma \cdot AO)}{\Delta \Sigma} = x$.

(192). Si AM est un arc de cercle qui ait a pour rayon, c'est-à-dire, si $y = \sqrt{2ax - x^2}$; en désignant par $\frac{q}{p}$, $\frac{r}{p}$, $\frac{e}{p}$, $\frac{R}{p}$, $\frac{s}{p}$ les limites de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, $\frac{\Delta E}{\Delta x}$, $\frac{\Delta S}{\Delta x}$, $\frac{\Delta \Sigma}{\Delta x}$, on aura $\frac{q}{p} = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$, $\frac{r}{p} = \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$; $\frac{e}{p} = \sqrt{2ax - x^2}$, $\frac{R}{p} = 2\pi a$, $\frac{s}{p} = \pi(2ax - x^2)$.

Partant lim. $\frac{\Delta(s \cdot CK)}{\Delta x} = \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{a(a - x)}{\sqrt{2ax - x^2}}$,

d'où $s \cdot CK = as - ay$ & $CK = a - \frac{ay}{s}$: lim. $\frac{\Delta(s \cdot CO)}{\Delta x} = a$, d'où $s \cdot CO = ax$ & $CO = \frac{ax}{s}$: lim. $\frac{\Delta(E \cdot CK)}{\Delta x} = x\sqrt{2ax - x^2} = a\sqrt{2ax - x^2}$ $- (a - x)\sqrt{2ax - x^2}$, d'où $E \cdot CK = aE - \frac{y^3}{3}$ & $CK = a - \frac{y^3}{3E}$:

lim. $\frac{\Delta(E \cdot CO)}{\Delta x} = ax - \frac{x^2}{2}$, d'où $E \cdot CO = \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3}$ & $CO = \frac{3ax^2 - x^3}{2 \cdot 3 E}$:

lim. $\frac{\Delta(S \cdot AO)}{\Delta x} = 2\pi ax$, d'où $S \cdot AO = \pi ax^2$ & $AO = \frac{x}{2}$:

lim. $\frac{\Delta(\Sigma \cdot AO)}{\Delta x} = \pi(2ax^2 - x^3)$, d'où $\Sigma \cdot AO = \pi\left(\frac{2ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$

& $AO = \frac{8ax - 3x^2}{12a - 4x}$.

Nous avons déterminé les constantes arbitraires de manière que chacun de ces momens fût nul lorsque $x = 0$. Mais si l'on fait dans les expressions de CK, AO, $x = 2a$, $y = 0$, on trouvera que les centres de gravité de la circonférence, de la surface du cercle, de la surface de la sphère, de la sphère, toutes étant considérées comme des corps homogènes, sont placés au centre même de figure.

(193). Si l'arc AM appartient à une parabole qui ait pour équation $y^2 = ax$; à cause de $\frac{r}{p} = \frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}}$, on aura lim. $\frac{\Delta(s \cdot CK)}{\Delta x} = x\frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}}$.

Soit A une constante indéterminée & X une fonction inconnue de x; soit aussi représentée par $\frac{U}{p}$ la limite de $\frac{\Delta X}{\Delta x}$, on fera $x\frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}} = A\frac{r}{p} + \frac{U}{p}$,

d'où l'on tirera $\frac{U}{p} = (x - A)\frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}}$. Nous supposerons que X peut être de cette forme $B(4ax + a^2)^m (ax)^n$, B étant un co-efficient constant qu'il

qu'il s'agit de déterminer, aussi bien que les nombres m & n. Alors nous aurons $(x - A)\frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}} = B\Big(4ma(4ax + a^2)^{m-1}(ax)^n + na$ $(4ax + a^2)^m (ax)^{n-1}\Big)$, & divisant les deux membres de cette équation par $\frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2\sqrt{ax}}$, $x - A = 8maB(4ax + a^2)^{m-\frac{1}{2}}(ax)^{n+\frac{1}{2}} +$ $2naB(4ax + a^2)^{m-\frac{1}{2}}(ax)^{n-\frac{1}{2}}$. Puisque ces deux membres doivent être identiquement la même chose, il faut que dans le second il ne se trouve d'autre puissance de x que la première, ce qui arrive lorsque $m = \frac{3}{2}$ & $n = \frac{1}{2}$; alors on a $x - A = 16a^2Bx + a^3B$, d'où l'on tire $B = \frac{1}{16a^3}$, $A = -\frac{a}{16}$. Donc $X = \frac{(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}}}{16a^2}\sqrt{ax}$, & $s \cdot CK = \frac{(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}}}{16a^2}\sqrt{ax} - \frac{as}{16}$.

Mais on tirera plus facilement de l'équation lim. $\frac{\Delta(s \cdot CO)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{4ax + a^2}}{2}$, la valeur de $s \cdot CO = \frac{(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}}}{12a} - \frac{a^2}{12}$; ici, comme dans les calculs précédens & dans ceux qui suivent, la constante arbitraire se détermine de manière que le moment soit nul lorsque $x = 0$. Nous continuerons de faire les substitutions tirées de l'équation de la parabole & nous aurons,

lim. $\frac{\Delta(E \cdot CK)}{\Delta x} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$ & $CK = \frac{3}{5}x$: lim. $\frac{\Delta(E \cdot CO)}{\Delta x} = \frac{ax}{2}$, & $CO = \frac{3}{8}\sqrt{ax}$: lim. $\frac{\Delta(S \cdot AO)}{\Delta x} = \pi x\sqrt{4ax + a^2}$, & $S \cdot AO = \frac{\pi}{60a^2}(6ax - a^2)$ $(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi a^3}{60}$: lim. $\frac{\Delta(\Sigma \cdot AO)}{\Delta x} = \pi a x^2$, & $\Sigma \cdot AO = \frac{\pi a x^3}{3}$.

Du mouvement accéléré ou retardé.

(194). Si les lignes PM, $P'M'$, &c. parallèles entr'elles & que nous supposons représenter les espaces parcourus pendant les temps AP, AP', &c. sont à une ligne droite AMM' (*fig. XLVIII*), le mouvement est uniforme, puisqu'alors les espaces parcourus sont entr'eux comme les temps employés à les parcourir. Deux corps se meuvent uniformément; ils parcourent dans les temps AP, AP', &c. l'un les espaces PM, $P'M'$, &c. l'autre les espaces Pm, $P'm'$, &c. : il est clair que les vitesses de ces deux corps sont entr'elles :: $PM : Pm$, ou :: $P'M' : P'm'$, &c. Mais, à cause de $AP : AP' :: Pm : P'm'$, $Pm = \frac{AP \cdot P'm'}{AP'}$; ces vitesses sont donc

entr'elles : : $PM : \frac{AP \cdot P'm'}{AP'} : : \frac{PM}{AP} : \frac{P'm'}{AP'}$; c'eſt-à-dire, que les vîteſſes de deux corps qui ſe meuvent uniformément ſont entr'elles comme les eſpaces qu'ils parcourent dans des temps quelconques, ces eſpaces étant diviſés par les temps employés à les parcourir. Il n'eſt pas moins clair que les forces motrices ſont entr'elles comme les produits des maſſes par les vîteſſes; en ſorte que ſi l'on nomme M, m les maſſes, F, f les forces motrices, U, u les vîteſſes, T, t les temps, E, e les eſpaces parcourus, on doit avoir ces deux proportions

$$F : f : : MU : mu, \quad U : u : : \frac{E}{T} : \frac{e}{t},$$

qui renferment toute la théorie du mouvement uniforme.

(195). Si ces lignes PM, $P'M'$, $P''M''$, &c. ſont à une courbe (*fig. XLIX*) $BMM'M''$ le mouvement eſt accéléré ou retardé, ſelon que la courbe eſt convexe ou concave vers AC. Je ſuppoſe que le mouvement ſoit accéléré & qu'à l'inſtant même où le corps finit de parcourir la ligne PM, il vienne à ſe mouvoir uniformément avec la vîteſſe qu'il a en M. Je fais $Pp = PP'$, & des points M & m je mène parallélement à AC les droites MN, mn. Cela poſé, ſi l'on prend Nt pour repréſenter l'eſpace que le corps parcourroit uniformément dans le temps PP' avec la vîteſſe qu'il a en M, cet eſpace ſera plus grand que l'eſpace Mn qu'il a parcouru effectivement dans le temps $Pp = PP'$, & moindre que l'eſpace NM'; il faut pour cela que Mt ſoit tangente au point M. En effet, Mt étant tangente au point M, ſi l'eſpace que le corps parcourroit uniformément dans le temps PP' pouvoit être moindre que Nt & $= Ne$, par exemple, en tirant eMh & la parallèle hg à AP, on auroit $Ne = Mg$, & moindre que Mn; ce même eſpace ne peut être plus grand que Nt & $= Ne'$, car en tirant Me', on peut ſuppoſer que cette ligne rencontre une des ordonnées de la courbe en un point E, tellement ſitué que NE ſoit plus grand que NK, ce qui donneroit l'eſpace que le corps parcourroit uniformément dans le temps PQ plus grand que celui qu'il a parcouru dans le même temps avec un mouvement accéléré. Donc Mt eſt néceſſairement tangente au point M; d'où il ſuit que ſi nous nommons AP, t, l'eſpace PM, e, on aura $\frac{Nt}{MN} = \lim. \frac{\Delta e}{\Delta t}$. Mais $\frac{Nt}{MN}$ eſt l'expreſſion de la vîteſſe au point M, puiſqu'en vertu de cette vîteſſe, le corps parcourroit uniformément l'eſpace Nt dans le temps MN; donc, nommant u cette vîteſſe, on aura $u = \lim. \frac{\Delta e}{\Delta t}$.

(196). Nous déſignerons par $\frac{e'}{t'}$ la limite du rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$, & par $\frac{e''}{t'^2}$, $\frac{e'''}{t'^3}$, $\frac{e''''}{t'^4}$, &c. les limites de $\frac{\Delta^2 e}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta^3 e}{\Delta t^3}$, $\frac{\Delta^4 e}{\Delta t^4}$, &c., Δt étant conſtant. Nous remarquerons enſuite que l'eſpace tM' eſt celui que le corps a parcouru dans le temps PP' de plus que l'eſpace Nt qu'il eût parcouru uniformément avec la vîteſſe qu'il a eu M, c'eſt donc cet eſpace que la force accélératrice feroit parcourir

au corps dans le temps PP', si au commencement de ce temps il n'avoit aucune vitesse. Soit $PP' = P'P'' = \Delta t$, c'est-à-dire que Δt est constant; & $P'M' = e + \Delta e$, $P''M'' = e + 2\Delta e + \Delta^2 e$; à cause de $Nt = \frac{e}{\theta}\Delta t$, on aura $P't = e + \frac{e}{\theta}\Delta t$, & $tM' = \Delta e - \frac{e}{\theta}\Delta t$. Mais (n°. 161) $\Delta e = \frac{e}{\theta}\Delta t + \frac{e'}{2\theta^2}\Delta t^2 + \frac{e''}{2\cdot 3\theta^3}\Delta t^3 + \&c.$; donc $\frac{tM'}{\Delta t^2} = \frac{e'}{2\theta^2} + \frac{e''}{2\cdot 3\theta^3}\Delta t + \&c.$ Nommons φ ce que devient ce rapport $\frac{tM'}{\Delta t^2}$ au point M, & nous aurons $\varphi = \frac{e'}{2\theta^2}$.

En désignant par $\frac{U}{\theta}$ la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, nous tirerons de l'équation $u = \frac{e}{\theta}$, celle-ci $\frac{U}{\theta} = \frac{e'}{\theta^2}$; donc $\varphi = \frac{U}{2\theta}$ & $\varphi = u\frac{U}{2e}$. Il est clair qu'au lieu de supposer le mouvement accéléré, si nous l'avions supposé retardé, nous aurions trouvé $\varphi = -\frac{e'}{2\theta^2}$, $\varphi = -\frac{U}{2\theta}$ & $\varphi = -u\frac{U}{2e}$. Nous remarquerons que φ est ce que les géomètres nomment la force accélératrice ou retardatrice.

(197). Au point M' je mène la tangente $M't'$, & je tire la corde $MM'u$; $t'M$ est l'espace que la force accélératrice feroit parcourir au corps dans le temps $P'P''$, si au commencement de ce temps il n'avoit aucune vitesse. Ce que devient le rapport $\frac{t'M''}{\Delta t^2}$, lorsque $\Delta t = 0$, est ce que nous avons nommé la force accélératrice; d'autres fois on donne ce nom à ce que devient le rapport $\frac{uM''}{\Delta t^2}$, lorsque $\Delta t = 0$: or comme $t'M''$ n'est point égal à uM'', il faut bien prendre garde à ne point confondre ces différens rapports dans l'estimation des effets des forces accélératrices, & dans la comparaison de ces effets entr'eux.

En abaissant la perpendiculaire $M'O$, on trouvera que $Ot' = \Delta t \text{ lim. } \frac{\Delta(e+\Delta e)}{\Delta t}$ donc $t'M'' = \Delta e + \Delta^2 e - \Delta t \text{ lim. } \frac{\Delta(e+\Delta e)}{\Delta t}$, & mettant (n°. 161) pour Δe, $\Delta^2 e$, lim. $\frac{\Delta(e+\Delta e)}{\Delta t}$ leurs valeurs, on aura

$$\frac{t'M''}{\Delta t^2} = \frac{e'}{2\theta^2} + \frac{e''}{2\cdot 3\theta^3}\Delta t + \&c. + \frac{e'}{\theta^2} + \frac{e''}{\theta^3}\Delta t + \&c. - \frac{e'}{\theta^2} - \frac{e''}{2\theta^3}\Delta t - \&c.$$
$$= \frac{e'}{2\theta^2} + \frac{2e''}{3\theta^3} + \&c.$$

Pour calculer uM'', je remarque que $P''u = e + 2\Delta e$, & par conséquent que $uM'' = \Delta^2 e$, c'est-à-dire, que uM'' est la différence du second ordre de

l'espace; donc $\frac{u\,M''}{\Delta t^2} = \frac{e'}{\theta^2} + \frac{e''}{\theta^3}\,\Delta t +$ &c. En cherchant les limites des deux rapports $\frac{e'\,M''}{\Delta t^2}$ & $\frac{u\,M''}{\Delta t^2}$, on trouve pour la limite du premier rapport $\frac{e'}{2\theta^2}$, & pour la limite de l'autre rapport $\frac{e'}{\theta^2}$; ces deux limites sont donc entr'elles :: 1 : 2; & si un des effets a été calculé en regardant une de ces limites comme l'expression de la force accélératrice, il faut calculer l'autre effet dans la même hypothèse, autrement on courroit risque de faire le rapport des forces doubles ou seulement moitié de ce qu'il est réellement.

(198). Il suit de ce que nous venons de démontrer que si un corps dont la masse est m, animé par une force φ, a parcouru l'espace e dans un temps t, on doit avoir, en regardant Δt comme constant, $\varphi = \pm \frac{m e'}{2\theta^2}$, le signe $+$ étant pour le cas où le mouvement est accéléré, & le signe $-$ pour le cas où il est retardé; & si u est la vitesse qu'avoit le corps à la fin du temps t, on aura de plus $u = \frac{e}{\theta}$, $\varphi = \pm\, m u \frac{U}{2e}$. Cela est vrai dans la supposition de la courbe rigoureuse; mais dans la supposition de la courbe polygone, on auroit $\varphi = \pm \frac{m e'}{\theta^2}$, $\varphi = \pm\, m u \frac{U}{e}$.

(199). Soit φ une force accélératrice constante, telle que la pesanteur à une hauteur peu considérable relativement à la longueur du rayon de la terre, on aura, en déterminant les constantes arbitraires de manière qu'elles soient nulles à l'origine du mouvement, $2\varphi t = \pm \frac{m e}{\theta}$, $\varphi t^2 = \pm\, m e$; & dans le cas de la courbe polygone $\varphi t^2 = \pm\, 2 m e$. Maintenant pour comparer toute force accélératrice ou retardatrice avec la pesanteur que nous nommerons p; soit T le temps qu'un corps pesant mettroit à tomber de la hauteur g, on fera

dans l'hypothèse de la courbe rigoureuse $\frac{2g}{T^2} : \pm \frac{m e'}{2\theta^2} :: p : \varphi = \pm \frac{T^2}{2g} \cdot \frac{m p e'}{\theta^2}$,

dans l'hypothèse de la courbe polygone $\frac{2g}{T^2} : \pm \frac{m e'}{\theta^2} :: p : \varphi = \pm \frac{T^2}{2g} \cdot \frac{m p e'}{\theta^2}$.

D'où il suit qu'en désignant par m le poids de la molécule, ou le produit de sa masse par la gravité, par g la hauteur dont la gravité feroit descendre un corps dans un certain temps pris pour l'unité, on pourra substituer aux dernières formules celle-ci $\varphi = \pm \frac{m}{2g} \cdot \frac{e'}{\theta^2}$.

(200). Ces formules ne suffisent pas pour mettre en équation les problêmes relatifs aux différens mouvemens qu'un corps peut prendre en vertu des forces qui l'animent; il faut les joindre à quelqu'autre principe qui ne soit pas identique avec

avec ceux-là. Si, par exemple, je me propoſois ce problême : Un corps dont la maſſe eſt m ſe mouvoit dans la direction Tt avec une certaine vîteſſe, lorſqu'arrivé au point A, il a été détourné de cette direction par une force tendante vers un centre S (*fig. L*), & a été obligé de décrire l'orbite curviligne AP qui eſt toute dans un même plan.

J'imaginerois le corps en P, & de ce point j'abaiſſerois ſur SA une perpendiculaire PM; puis j'aurois recours à ce principe de ſtatique : ſi un nombre quelconque de forces, toutes dans un même plan, agiſſent ſur un corps, on peut toujours les réduire à deux dont les directions ſoient perpendiculaires entr'elles. Nous pouvons donc décompoſer les forces qui agiſſent ſur le corps m en deux P & Q, dont l'une agit dans la direction de SM, x, l'autre dans la direction de MP, y; & deſignant par $\frac{p}{\theta}$, $\frac{p'}{\theta^2}$, $\frac{q}{\theta}$, $\frac{q'}{\theta^2}$, les limites de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}$, la théorie du mouvement accéléré nous donnera ces deux équations

$$P = \frac{mp'}{2\theta^2},\ Q = \frac{mq}{2\theta^2}.$$

(201). Je prends ſur PS une partie PU pour repréſenter la force centrale que je nomme V; je nomme auſſi PS, ζ, l'angle ASP, ς, lim. $\frac{\Delta \zeta}{\Delta t}$, $\frac{Z}{\theta}$, lim. $\frac{\Delta^2 \zeta}{\Delta t^2}$, $\frac{Z'}{\theta^2}$, lim. $\frac{\Delta \varsigma}{\Delta t}$, $\frac{B}{\theta}$, lim. $\frac{\Delta^2 \varsigma}{\Delta t^2}$, $\frac{B'}{\theta^2}$; puis ayant tiré UK parallélement à SM, j'ai cette proportion $V : PK : KU :: PS : PM : MS :: 1 : \text{ſin.}\ \varsigma : \text{cos.}\ \varsigma$, d'où $PK = -Q = V\ \text{ſin.}\ \varsigma$, $KU = -P = V\ \text{cos.}\ \varsigma$; & les deux équations précédentes ſeront d'abord changées en celles-ci

$$\frac{mp'}{2\theta^2} = -V\ \text{cos.}\ \varsigma,\ \frac{mq'}{2\theta^2} = -V\ \text{ſin.}\ \varsigma.$$

On multipliera la première par cos. ς, & la ſeconde par ſin. ς, puis on les ajoutera enſemble, ce qui donnera $mp'\ \text{cos.}\ \varsigma + mq'\ \text{ſin.}\ \varsigma = -2V\theta^2$.

On multipliera la première par ſin. ς, & la ſeconde par cos. ς; on retranchera enſuite la ſeconde de la première, & on aura $mp'\ \text{ſin.}\ \varsigma - mq'\ \text{cos.}\ \varsigma = 0$.

(202). Le triangle rectangle SMP donne $x = \zeta\ \text{cos.}\ \varsigma$, $y = \zeta\ \text{ſin.}\ \varsigma$; donc

$$p = Z\ \text{cos.}\ \varsigma - \zeta B\ \text{ſin.}\ \varsigma,\ q = Z\ \text{ſin.}\ \varsigma + \zeta B\ \text{cos.}\ \varsigma,$$
$$p' = Z'\ \text{cos.}\ \varsigma - 2ZB\ \text{ſin.}\ \varsigma - \zeta B^2\ \text{cos.}\ \varsigma - \zeta B'\ \text{ſin.}\ \varsigma,$$
$$q' = Z'\ \text{ſin.}\ \varsigma + 2ZB\ \text{cos.}\ \varsigma - \zeta B^2\ \text{ſin.}\ \varsigma + \zeta B'\ \text{cos.}\ \varsigma.$$

On tire delà $m(p'\ \text{cos.}\ \varsigma + q'\ \text{ſin.}\ \varsigma) = m(Z' - \zeta B^2)$,

$$m(p'\ \text{ſin.}\ \varsigma - q'\ \text{cos.}\ \varsigma) = -m(2ZB + \zeta B').$$

En ſubſtituant ces valeurs dans les deux dernières équations du n°. précédent, on les change en celles-ci $Z' - \zeta B^2 = -\frac{2V}{m}\theta^2$, $2ZB + \zeta B' = 0$.

Mais le premier membre de la ſeconde équation étant multiplié par ζ, n'eſt autre

chose que la limite du rapport $\frac{\Delta\left(\frac{\zeta^2 B}{\theta}\right)}{\Delta t}$; donc $\frac{\zeta^2 B}{\theta} = h$; h étant une constante arbitraire.

(203). Pour tirer de ces deux équations $\zeta^2 B = h\theta$ & $Z' - \zeta B^2 = -\frac{2V}{m}\theta^2$; celle de la trajectoire que décrit le corps, il faut éliminer θ, puisqu'elle ne doit renfermer que ζ, ς & les limites des rapports entre leurs différences finies; & si nous croyons nécessaire de regarder dans cette équation une des différences premières comme constante, il faudra faire varier Δt, puisque dans un même problême on ne peut regarder en même temps deux différences premières comme constantes. Or dans l'équation $\frac{Z'}{\theta^2} - \zeta\frac{B^2}{\theta^2} = -\frac{2V}{m}$, $\frac{Z'}{\theta^2}$ est la limite de $\Delta\left(\frac{Z}{\theta}\right)$ en regardant Δt comme constant, afin de la déterminer en regardant Δt & $\Delta\zeta$ comme variables, on représentera par $\frac{t'}{\theta^2}$ la limite de $\frac{\Delta^2 t}{\Delta t^2}$, & on aura pour celle qu'on demande $\frac{Z'}{\theta^2} - \frac{Z}{\theta}\cdot\frac{\theta'}{\theta^2}$. On fera cette substitution dans l'équation précédente qui deviendra $\frac{Z'}{\theta^2} - \frac{Z}{\theta}\frac{\theta'}{\theta^2} - \zeta\frac{B^2}{\theta^2} = -\frac{2V}{m}$, & dans laquelle il faudra mettre pour θ, θ' leurs valeurs tirées de $\theta = \frac{\zeta^2 B}{h}$, en regardant $\Delta\varsigma$ comme constant. Dans cette hypothèse $\theta' = \frac{2\zeta Z B}{h}$; l'équation dont il s'agit sera donc changée en celle-ci $\frac{Z'}{\zeta^2 B^2} - \frac{2Z^2}{\zeta^3 B^2} - \frac{1}{\zeta} = -\frac{2V}{m}\cdot\frac{\zeta^2}{h^2}$.

(204). Soit $\frac{1}{\zeta} = r$, d'où l'on tire, en désignant par $\frac{R}{B}$, $\frac{R'}{B^2}$ les limites des rapports $\frac{\Delta r}{\Delta\varsigma}$, $\frac{\Delta^2 r}{\Delta\varsigma^2}$, $-\frac{Z}{\zeta^2 B} = \frac{R}{B}$, $-\frac{Z'}{\zeta^2 B^2} + \frac{2Z^2}{\zeta^3 B^2} = \frac{R'}{B^2}$; &, substituant ces valeurs, l'équation de la trajectoire sous cette forme beaucoup plus simple $\frac{R'}{B^2} + r = \frac{2V}{m h^2 r^2}$.

(205). Je nomme l'arc AP, s, secteur ASP, S, lim. $\frac{\Delta s}{\Delta\varsigma}$, $\frac{s}{B}$, lim. $\frac{\Delta S}{\Delta\varsigma}$, $\frac{\Sigma}{B}$; & ayant tiré un autre rayon vecteur Sp, une corde Pp & une perpendiculaire SO sur cette corde, j'ai le rapport $\frac{Pp\cdot SO}{2\Delta\varsigma}$ qui a la même limite que $\frac{\Delta S}{\Delta\varsigma}$. Mais on trouve la limite de la première quantité, en mettant pour $\frac{Pp}{\Delta\varsigma}$, $\frac{s}{B}$ & pour SQ

la perpendiculaire sur la tangente ; tout se réduit donc à trouver la perpendiculaire sur la tangente.

Or en regardant PO comme la tangente que nous supposerons faire avec la ligne des abscisses un angle T, on a $1 : \zeta :: \text{sin.}\, STO : SO$ & $\text{sin.}\, STO = \text{sin.}\, (\varsigma + T) = \text{sin.}\, \varsigma \cos.\, T + \cos.\, \varsigma\, \text{sin.}\, T$; de plus (nº 143)

$\text{sin.}\, T = \frac{q}{\varepsilon}$, $\cos.\, T = -\frac{p}{\varepsilon}$, en faisant attention que dans la figure lorsque les y augmentent les x diminuent; donc $SO = \frac{q\zeta \cos.\, \varsigma - p\zeta\, \text{sin.}\, \varsigma}{\varepsilon}$ &

$\frac{\Sigma}{B} = \frac{q\zeta \cos.\, \varsigma - p\zeta\, \text{sin.}\, \varsigma}{2B}$. On mettra pour q & p leurs valeurs trouvées nº. 202, & on aura $\frac{\Sigma}{B} = \frac{\zeta^2}{2}$. Ainsi l'équation $\frac{\zeta^2 B}{\theta} = h$, devient $\frac{\Sigma}{\theta} = \frac{h}{2}$; d'où suit cette proposition très-connue des astronomes, que quelle que soit la force centrale, les aires décrites par le rayon vecteur sont proportionnelles au temps.

(206). On peut la démontrer indépendamment des calculs précédens de la manière suivante. On suppose le temps divisé en un certain nombre de parties, & que la force centrale n'agit pas continuellement, mais d'instant en instant. Or si le corps en se mouvant uniformément a parcouru dans le premier de ces instans la corde Aa, dans l'instant suivant il parcourra $ab' = Aa$, si rien ne l'en empêche. Mais il est détourné de cette direction par un coup de la force centrale, & il est obligé de parcourir la corde aa' qui est la diagonale du parallélogramme $aba'b'$. Arrivé en a' il parcourroit dans le troisième instant $a'c' = aa'$, si un second coup de la force centrale ne l'en détournoit, & ne l'obligeoit de parcourir la corde $a'a''$ qui est la diagonale du parallélogramme $a'c'a''c$; & ainsi de suite. Il est à remarquer premiérement que le corps, en se mouvant de cette manière, est toujours dans un même plan ; secondement, que le polygone qu'il décrit est concave vers le centre S; troisiémement, que le triangle aSa', qui est égal au triangle aSb', est aussi égal au triangle ASa, que le triangle $a'Sa''$, qui est égal au triangle $a'Sc'$, est égal au triangle aSa', & ainsi des autres. Il suit évidemment de la dernière proposition, que deux portions quelconques ASP, ASQ du polygone décrit autour du centre S, sont entr'elles comme les temps que le corps a mis à aller de A en P & de A en Q : or comme cela seroit encore vrai, quelque fût le nombre des côtés du polygone, lequel nombre on peut faire aussi grand qu'on voudra, en prenant pour l'instant une aussi petite partie du temps qu'il sera nécessaire ; il est démontré que les secteurs ASP, ASQ, qui sont les limites des portions ASP, ASQ de tous ces polygônes, sont entr'eux comme les temps que le corps a mis à décrire les arcs AP & AQ. On tire des deux premières propositions que la trajectoire doit être toute dans un même plan, & que de plus elle doit être concave vers le centre.

(207). Le principe des aires proportionnelles au temps, combiné avec une des formules du mouvement retardé, doit conduire à la détermination de la trajec-

toire. Pour y parvenir nous lui donnerons cette forme $\frac{\zeta^2 B}{\theta} = h$, où nous mettrons pour θ, $\frac{\varsigma}{u}$, & ensuite pour u sa valeur tirée de l'équation $uU = -\frac{2V}{m}Z$.

A cause de $\varsigma = \sqrt{Z^2 + \zeta^2 B^2}$ (n°. 147), $\zeta^2 B = \frac{h\sqrt{Z^2 + \zeta^2 B^2}}{u}$, d'où l'on tire $u^2 = \frac{h^2 Z^2}{\zeta^4 B^2} + \frac{h^2}{\zeta^2}$ & $uU = -\frac{2V}{m}Z = \frac{h^2 ZZ'}{\zeta^4 B^2} - \frac{2h^2 Z^3}{\zeta^5 B^2} - \frac{h^2 Z}{\zeta^3}$.
Cette équation n'est autre que celle-ci $\frac{Z'}{\zeta^2 B^2} - \frac{2Z^2}{\zeta^3 B^2} - \frac{1}{\zeta} = -\frac{2V}{m} \cdot \frac{\zeta^2}{h^2}$; à laquelle nous avons été conduits par la première manière de mettre le problême en équation.

(208). Nous supposerons $V = \frac{K}{\zeta^2}$, K étant une quantité constante, & nous aurons $uU = -\frac{2K}{m} \cdot \frac{Z}{\zeta^2}$, d'où $u^2 = \frac{4K}{m\zeta} + 2i$, i étant la constante arbitraire. Donc $\frac{4K}{m\zeta} + 2i = \frac{h^2 Z^2}{\zeta^4 B^2} + \frac{h^2}{\zeta^2}$, $\frac{h^2 Z^2}{B^2} = 2i\zeta^4 + \frac{4K}{m}\zeta^3 - h^2\zeta^2$,

& $B = \frac{hZ}{\zeta^2\sqrt{2i + \frac{4K}{m\zeta} - \frac{h^2}{\zeta^2}}}$.

Nous ferons comme ci-dessus (n°. 204) $\frac{1}{\zeta} = r$, & nous aurons

$B = \frac{-hR}{\sqrt{2i + \frac{4K}{m}r - h^2 r^2}}$. Soit $hr - \frac{2K}{mh} = \rho$, lim. $\frac{\Delta\rho}{\Delta B} = \frac{\rho'}{B}$;

à cause de $-h^2 r^2 + \frac{4K}{m}r = -\rho^2 + \frac{4K^2}{m^2 h^2}$, l'équation précédente se changera en celle-ci $B = \frac{-\rho'}{\sqrt{2i + \frac{4K^2}{m^2 h^2} - \rho^2}}$, de laquelle on tire (n°. 154)

que $\beta + n$, n étant une constante arbitraire, est égal à l'arc qui a pour cosinus

$\frac{\rho}{\sqrt{2i + \frac{4K^2}{m^2 h^2}}}$. Donc $\rho = hr - \frac{2K}{mh} = \sqrt{2i + \frac{4K^2}{m^2 h^2}} \cdot \cos.(\beta + n)$;

donc $\frac{1}{\zeta} = \frac{2K}{mh^2} + \sqrt{2i + \frac{4K^2}{m^2 h^2}} \cdot \frac{\cos.(\beta + n)}{h}$.

(209). En nommant b le rayon vecteur qui passe par le sommet de la courbe &

& g la vîteffe du corps à ce point, on tire de l'équation $u^2 = \frac{4K}{mz} + 2i$, $i = \frac{g^2}{2} - \frac{2K}{bm}$. Si de plus on fuppofe qu'à ce même point la tangente eft perpendiculaire au rayon b, à caufe de $\frac{\Sigma}{\theta} = \frac{\Sigma u}{s} = \frac{h}{2}$, on aura $h = bg$. En mettant les valeurs de h & i dans $2i + \frac{4K^2}{m^2h^2}$, il vient

$$g^2 - \frac{4K}{bm} + \frac{4K^2}{m^2b^2g^2} = g^2\left(1 - \frac{4K}{bmg^2} + \frac{4K^2}{b^2m^2g^4}\right) = \left(1 - \frac{2K}{bmg^2}\right)^2 g^2.$$

Ainfi, en déterminant comme nous venons de le faire les conftantes arbitraires h & i, on change l'équation de la courbe en celle-ci

$$\frac{1}{z} = \frac{2K}{mb^2g^2} + \left(\frac{1}{b} - \frac{2K}{mb^2g^2}\right)\cos.(C + n).$$

Mais (n°s. 31 & 37) nous avons trouvé pour l'équation polaire des fections coniques $\frac{1}{z} = \frac{c \pm b + c\cos.(C+n)}{2bc \pm b^2}$, où c eft l'excentricité ; donc $\frac{2K}{mb^2g^2} = \frac{c \pm b}{2bc \pm b^2}$, $\frac{1}{b} - \frac{2K}{mb^2g^2} = \frac{c}{2bc \pm b^2}$, qui font identiquement la même chofe & defquelles on tire $g^2 = \frac{2K}{mb} \cdot \frac{2c \pm b}{c \pm b}$. Il fuit delà que fi nous nommons H la hauteur dont il faudroit que le corps, pouffé conftamment par la force $\frac{K}{mb^2}$, tombât pour acquérir la vîteffe g, on aura $g^2 = \frac{4KH}{mb^2}$ & $2H = \frac{2bc \pm b^2}{c \pm b}$.

(210). Nous conclurons de ce qui précède :

1°. Que dans l'ellipfe, en nommant $2a$ le grand axe $2c + 2b$, on a $2a = \frac{b^2}{b - H}$; & comme $2a$ doit être une quantité pofitive, il eft néceffaire que H foit moindre que b pour que le corps décrive une ellipfe.

2°. Que dans l'hyperbole, en nommant auffi $2a$ le grand axe, on a $2a = \frac{b^2}{H - b}$; d'où l'on tire que H doit être plus grand que b pour que le corps décrive une hyperbole.

3°. Dans la parabole H doit être égal à b.

(211). Les planètes principales décrivent fenfiblement des ellipfes & on a $g = \sqrt{\frac{2K}{mb} \cdot \frac{2c+b}{c+b}}$, d'où $\frac{2\Sigma}{\theta} = \sqrt{\frac{2K}{m} \cdot \frac{2bc+b^2}{c+b}}$. On tire delà, en nom-

mant T le temps de toute la révolution & A l'aire entière de l'ellipſe

$T = 2A\sqrt{\frac{m}{2K} \cdot \frac{c+b}{2bc+b^2}}$. Mais (n°. 132) $\pi(c+b)^2 : A :: c+b : \sqrt{b^2+2bc}$,

d'où $A = \pi(c+b)\sqrt{2bc+b^2}$; donc $T = \sqrt{\frac{m}{2K}} \cdot 2\pi(c+b)^{\frac{3}{2}}$.

K étant la ſomme des maſſes du ſoleil & de la planète, ſi l'on peut négliger les maſſes des planètes auprès de celle du ſoleil, on tirera de l'équation précédente, que les quarrés des temps des révolutions ſont comme les cubes des demi-grands axes ou des moyennes-diſtances : c'eſt une des loix de Kepler ; les deux autres ſont que les planètes décrivent des ellipſes dont le ſoleil occupe un des foyers, & que dans ces ellipſes les aires décrites par les rayons vecteurs ſont proportionnelles au temps.

(212). Nous aurons auſſi $\frac{t}{B} = \zeta^2\sqrt{\frac{m}{2K} \cdot \frac{c+b}{2bc+b^2}}$, ou mettant pour ζ^2 ſa valeur $\frac{(2bc+b^2)^2}{(c+b+c\cos.(\epsilon+n))^2}$, $\frac{t}{B} = \sqrt{\frac{m}{2K}}(c+b) \cdot \frac{(2bc+b^2)^{\frac{3}{2}}}{(c+b+c\cos.(\epsilon+n))^2}$. Si je fais cette proportion $T : 360^\circ :: t : X$, X ſera l'anomalie moyenne de la planète dont $\epsilon+n$ eſt l'anomalie vraie; on ſuppoſe que $\epsilon+n$ eſt nul au point ou $\zeta = b$. Donc $t = X\sqrt{\frac{m}{2K}}(c+b)$; &, nommant $\frac{X'}{B}$ la limite du rapport entre les différences de X & ϵ, on aura entre l'anomalie vraie & l'anomalie moyenne cette équation $\frac{X'}{B} = \frac{(2bc+b^2)^{\frac{3}{2}}}{(c+b+c\cos.(\epsilon+n))^2}$.

(213). Un corps décrit une circonférence de cercle (*fig. LI*) dont le rayon $= r$. Arrivé au point A, ſi l'on prend ſur cette circonférence un autre point M & que l'on tire Mn perpendiculaire à la tangente $A\Gamma$ & la corde AM, le rapport $\frac{Mn}{\Delta t^2} = \frac{\overline{AM}^2}{2r\Delta t^2}$ aura pour limite la force centrifuge au point A : & comme à ce point l'arc & la corde ſe confondent, & que la vîteſſe eſt la limite de $\frac{AM}{\Delta t}$, AM étant l'arc ; il s'enſuivra que la force centrifuge au point A a pour expreſſion le quarré de la vîteſſe diviſé par le double du rayon, ou ſimplement le quarré de la vîteſſe diviſé par le rayon, en calculant dans l'hypothèſe de la courbe polygone (n°. 198). Nous pouvons conclure delà qu'un corps dont la maſſe eſt m, qui décrit une courbe quelconque, a à chaque point de cette courbe une force centrifuge exprimée par $\frac{mu^2}{2r}$, r étant le rayon de courbure & u la vîteſſe à ce point.

Mais la courbe étant concave vers l'axe, on a (n°. 177)

$\frac{1}{r} = \lim. \frac{\Delta\left(\frac{p}{s}\right)}{\Delta y}$, où $s = \sqrt{p^2 + q^2}$; donc, en prenant pour limite de $\frac{\Delta\left(\frac{q}{p}\right)}{\Delta x}$ cette quantité $\frac{pq' - qp'}{p^3}$ (nº. 159), on aura
$\frac{1}{r} = -\frac{pq' - qp'}{(p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{pq' - qp'}{s^3}$.

(214). Je reprends les équations $P = \frac{m\,p'}{2\,\theta^2}$, $Q = \frac{m\,q'}{2\,\theta^2}$, $u = \frac{s}{\theta}$, desquelles je tire, à cause de $u^2 = \frac{p^2 + q^2}{\theta^2}$, $u\,U = \frac{pp' + qq'}{\theta^2} = \frac{2}{m}(Pp + Qq)$. On a aussi $pq' - qp' = \frac{2\theta^2}{m}(Qp - Pq)$ & $\frac{m\,u^2}{2\,r} = \frac{Pq - Qp}{s}$.

Nous remarquerons que $\frac{Pq + Qq}{s}$ & $\frac{Pq - Qp}{s}$ sont les expressions de la force tangentielle & de la force normale. En effet ayant mené une tangente MT (*fig. LII*), une normale MK, une ordonnée perpendiculaire MP & une parallèle MO à AP, si on prend sur MP & MO les parties Mn & Mm pour représenter les forces $-Q$ & P, qu'on achève ensuite les parallélogrammes $Mhni$, $Memf$; $Mi + Me$ fera la force normale, & $Mf - Mh$ la force tangentielle. Mais les triangles semblables Min, Mem, MPK donnent
$MK : MP : PK :: Mn : Mi : in :: Mm : me : Me$, ou (nº. 143)
$s : p : q :: -Q : Mi : Mh :: P : Mf : Me$, d'où l'on tire
$Mi = -\frac{Qp}{s}$, $Mh = -\frac{Qq}{s}$, $Mf = \frac{Pp}{s}$, $Me = \frac{Pq}{s}$, & par conséquent
$Mi + Me = \frac{Pq - Qp}{s}$, $Mf - Mh = \frac{Pp + Qq}{s}$.

(215). Si le corps dont la masse est m, n'étant animé d'autre force accélératrice que de sa pesanteur, étoit assujetti à se mouvoir dans la rainure curviligne BME (*fig. LIII*), on auroit, en nommant g la gravité, $Q = 0$, $P = \pm mg$, la force étant accélératrice lorsque le corps descend & retardatrice lorsqu'il monte; on auroit en outre $u\,U = \pm 2gp$, d'où $u^2 = h^2 \pm 4gx$, h^2 étant la constante arbitraire. On fera attention que dans la figure actuelle, les x augmentant les y diminuent, & que par conséquent p étant positif, q doit être négatif; il sera facile d'en conclure que $\frac{m\,u^2}{2\,r} \pm \frac{mgq}{s}$ est la force avec laquelle la rainure est pressée par le corps. Mais $\frac{1}{r} = \frac{pq' - qp'}{s^3}$, où toutes les différences premières sont supposées variables; on peut donc y regarder Δs comme constant,

& parce que dans cette hypothèse on tire de $\epsilon^2 = p^2 + q^2$, $pp' + qq' = 0$, ou $p' = -\frac{qq'}{p}$, on aura $\frac{1}{r} = \frac{q'}{p\epsilon}$. Ainsi la force dont il s'agit a pour expression $\frac{m}{2}(h^2 \pm 4gx)\frac{q'}{p\epsilon} \pm mg\frac{q}{\epsilon}$, qu'on égalera à une constante, lorsqu'il sera question de trouver la rainure pour laquelle la pression est la même dans toute son étendue.

Si la rainure étoit circulaire, à cause de $y = \sqrt{2rx - x^2}$, on auroit $\frac{-q}{p} = \frac{r-x}{\sqrt{2rx - x^2}}$, $\frac{p}{\epsilon} = \frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r}$, & par conséquent $\frac{-q}{\epsilon} = \frac{r-x}{r}$. La valeur $\frac{mu^2}{2r} \pm mg\frac{q}{\epsilon}$ deviendroit $\frac{m}{2r}(h^2 \pm 4gx) \mp mg \cdot \frac{r-x}{r} = \frac{mh^2}{2r} \pm \frac{3mgx}{r} \mp mg$.

(216). Une chaîne ou une corde dont les extrémités sont attachées à des points fixes doit prendre une certaine courbure; pour trouver cette courbure ou la nature de la courbe qu'on nomme chaînette, des points fixes B & D (*fig. LIV*) & d'un point M pris à volonté, j'abaisse sur l'horizontale AC, les ordonnées perpendiculaires BA, DC & MP; & ayant mené par les points B & M des tangentes BT, MT, je tire par le point T où elles se rencontrent, une perpendiculaire TO au même axe AC. Je nomme AP, x, PM, y, l'arc BM, s, le poids de cet arc Π, la tension de la chaîne suivant BT, f, l'angle que la direction de cette force fait avec la verticale TO, m. On peut supposer que tout le systême est en équilibre; or la chose étant ainsi, on démontre dans les élémens de statique, que $\Pi : f :: \text{sin. } BTM : \text{sin. } OTM$. Mais (nº. 138) l'angle TMP a pour tangente lim. $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ que nous désignerons par $\frac{p}{q}$; donc sin. $TMP = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$, cos. $TMP = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$: de plus, l'angle OTM est le supplément de TMP; il a donc pour sinus, $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ & pour cosinus, $\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

On a aussi sin. BTM = sin. $(BTO + OTM) = \frac{-q \text{ sin. } m + p \text{ cos. } m}{\sqrt{p^2+q^2}}$;

donc $\Pi : f :: p \text{ cos. } m - q \text{ sin. } m : p :: \text{cos. } m - \frac{q}{p} \text{ sin. } m : 1$; d'où l'on tire $\frac{q}{p} = \frac{f \text{ cos. } m - \Pi}{f \text{ sin. } m}$, qui est l'équation générale de la chaînette.

Si la courbe est uniforme dans sa grosseur, on pourra faire $\Pi = s$, & on aura

aura $\frac{q}{p} = \frac{f \cos. m - s}{f \sin. m}$; d'où l'on tire, en désignant par $\frac{r}{p}$ la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta p}$ & faisant Δx constant, $\frac{q'}{p} = \frac{-\sqrt{p^2 + q^2}}{f \sin. m}$, ou $\frac{q q'}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{-p q}{f \sin. m}$.

En repassant de la limite à la quantité même, il vient $\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p} = \frac{h - y}{f \sin. m}$, h étant la constante arbitraire, $\frac{q^2}{p^2} = \frac{(h-y)^2 - f^2 \sin. m^2}{f^2 \sin. m^2}$, & $\frac{p}{q} = \frac{f \sin. m}{\sqrt{(h-y)^2 - f^2 \sin. m^2}}$.
Enfin (n°. 153) si $\zeta = \log. (h - y + \sqrt{(h-y)^2 - f^2 \sin. m^2})$, on a $r = \frac{-q}{\sqrt{(h-y)^2 - f^2 \sin. m^2}}$; donc ici
$x = i - f \sin. m \log. (h - y + \sqrt{(h-y)^2 - f^2 \sin. m^2})$, où i est une constante arbitraire.

(217). Ainsi la chaînette est une courbe transcendante constructible par la logarithmique. Il en est de même de la courbe du n°. 147 qui coupe les rayons vecteurs ζ en faisant avec eux tous un même angle. Car en nommant ς l'angle du rayon vecteur avec la ligne des abscisses & $\frac{B}{Z}$ la limite du rapport $\frac{\Delta \varsigma}{\Delta \zeta}$, elle a pour équation $\frac{B}{Z} = \frac{c}{\zeta}$, d'où l'on tire $\varsigma = c \log. \frac{\zeta}{h}$, où h est la constante arbitraire On verra aisément que cette courbe ne doit pas passer par le centre U, qu'elle fait autour de ce centre une infinité de tours ; ces deux propriétés, jointes à celle d'être constructible par la logarithmique lui ont fait donner le nom de spirale logarithmique.

(218). Je terminerai ces applications par la recherche d'autres courbes transcendantes auxquelles Jacques Bernoulli a donné le nom de courbes élastiques. J'imagine une lame élastique AMB (*fig. LV*) appuyée contre un obstacle inébranlable B, & une verge inflexible CA qui, étant normale au point A, fait prendre à la lame élastique la courbure BMA & la retient dans cet état avec une force φ appliquée au point C. Je prends CA prolongé pour ligne des abscisses, & je nomme CA, c, AP, y, PM, x. Le moment de la force φ est $\varphi(c + y)$, & ce moment doit faire équilibre à l'élasticité de la lame au point M. Cette élasticité dépend, & de la nature de la lame, que nous supposons être la même dans toute son étendue, & de sa courbure au point M, de sorte que nous pourrons supposer que l'élasticité au point M est en raison réciproque du rayon de courbure à ce point, ou qu'elle est proportionnelle à $\frac{-q p'}{\varsigma^3}$, en regardant Δy comme constant. Ainsi, en nommant $b c^2$ l'élasticité absolue de la lame, ou celle

qui ne dépend que de la nature de ses parties constituantes, on aura l'équation

$$\varphi(c+y) = -\frac{bc^2qp'}{s^3}, \text{ ou } \varphi(c+y) = -bc^2\frac{qp'}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais lim. $\dfrac{\Delta\dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}}{\Delta y} = \dfrac{\dfrac{p'}{\sqrt{p^2+q^2}} - \dfrac{p^2p'}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}}{q} = \dfrac{qp'}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$;

donc $\varphi(c+y) = -bc^2 \text{ lim. } \dfrac{\Delta\dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}}{\Delta y}$, d'où l'on tire, en nommant h la constante arbitraire, $\varphi\left(h+cy+\dfrac{y^2}{2}\right) = -bc^2\dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

Ainsi la courbe élastique a pour équation

$$\frac{p}{q} = \frac{\varphi\left(h+cy+\frac{y^2}{2}\right)}{\sqrt{b^2c^4-\varphi^2\left(h+cy+\frac{y^2}{2}\right)^2}};$$ de laquelle il n'est pas possible de tirer une relation algébrique entre y & x, comme nous le verrons dans la suite.

TRAITÉ
DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET DE CALCUL INTÉGRAL.

(219). LA Géométrie tranſcendante a pour objet de trouver les tangentes de toutes ſortes de courbes, leurs plus grandes ou leurs moindres abſciſſes & ordonnées, leurs points d'inflexion & de rebrouſſement, leurs développées, leurs points multiples, &c.; elle s'étend aux quadratures de ces mêmes courbes, à leurs rectifications, à leurs centres de gravité, aux ſolides formés par leurs révolutions, aux ſurfaces de ces ſolides, aux centres de gravité de ces ſurfaces & de ces ſolides, &c. La méthode qu'elle emploie pour réſoudre les premières queſtions eſt connue ſous le nom de calcul différentiel; & l'autre ſous le nom de calcul intégral. Ainſi, d'après ce qui précède, nous pouvons définir le calcul différentiel, *la méthode pour trouver les limites des rapports entre les différences des quantités variables ;* & le calcul intégral, qui eſt l'inverſe du calcul différentiel, *la méthode pour remonter des limites des rapports entre les différences aux rapports même des quantités.*

Nous conviendrons de nous ſervir de $\frac{dy}{dx}$ pour déſigner la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entre les différences du premier ordre des variables y & x; & de $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2 x}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, $\frac{d^3 x}{dx^3}$; &c. pour marquer les limites des rapports $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, $\frac{\Delta^3 x}{\Delta x^3}$; &c. entre les différences des ordres ſupérieurs. Nous appellerons différentielles du premier ordre les termes dy, dx de la limite $\frac{dy}{dx}$; différentielles du ſecond ordre les termes $d^2 y$, $d^2 x$, dx^2 des limites $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2 x}{dx^2}$; différentielles du troiſième ordre les termes $d^3 y$, $d^3 x$, dx^3 des limites $\frac{d^3 y}{dx^3}$, $\frac{d^3 x}{dx^3}$, & ainſi des autres; c'eſt-à-dire, que par le rapport entre les différentielles de deux quantités, nous n'entendrons jamais que la limite du rapport entre leurs différences.

Chercher cette limite, c'est ce que nous appellerons *différentier*; & nous donnerons le nom d'*équation différentielle* à l'équation qui résultera de la *différentiation*.

(220). Quelques auteurs, d'après Leibnitz, appellent *différentielle* la *différence* dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement; & comme cette différence est supposée infiniment petite, le calcul différentiel n'est, selon ces géomètres, que l'*analyse des infiniment petits*. Nous n'examinerons pas s'il est possible d'avoir de l'infiniment petit d'autres notions que des notions vagues & imparfaites; cette question nous est absolument étrangère, puisque nous savons qu'on peut établir le calcul différentiel sur des principes plus évidens. Mais il ne sera pas inutile de faire voir que les hypothèses sur lesquelles l'analyse des infiniment petits est fondée, doivent nécessairement conduire au même résultat que la méthode des limites.

La première hypothèse, c'est qu'une quantité infiniment petite doit être regardée comme nulle, comparativement à toute quantité finie. On introduit ensuite des infiniment petits de tous les ordres, & cela doit être ainsi; car si l'on admet que dans un cercle on peut concevoir une corde infiniment petite du premier ordre, il faut nécessairement admettre que l'abscisse ou sinus verse correspondant est infiniment petit du second ordre; si la corde est infiniment petite du second, l'abscisse sera infiniment petite du quatrième, &c.; puisque le diamètre qui est fini est toujours à la corde, comme la corde est à l'abscisse correspondante. Une autre hypothèse, c'est qu'une quantité infiniment petite d'un ordre quelconque, est infiniment petite par rapport à une quantité infiniment petite d'un ordre moins élevé; c'est-à-dire, que la première de ces quantités doit être regardée comme nulle relativement à l'autre. Cela posé, voici la règle que prescrit l'analyse des infiniment petits pour trouver le rapport entre les différentielles de deux quantités variables dont le rapport est donné. On cherchera d'abord le rapport entre les différences finies de ces quantités; &, après avoir substitué à la caractéristique qui désigne la différence finie, celle qui désigne la différence infiniment petite, on effacera les termes qui doivent être regardés comme nuls relativement aux autres. Soit y une fonction de x & de constantes, & $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 +$ &c.; après avoir mis dans cette équation dx pour Δx, & dy pour Δy, je ne conserve du second membre que le premier terme, puisque les autres doivent être regardés comme nuls relativement à lui, & il vient $\frac{dy}{dx} = A$, comme nous l'avons trouvé par la méthode des limites. Cette méthode nous enseigne que pour trouver le rapport entre les différentielles de deux variables, dont le rapport est donné, il faut chercher premièrement le rapport entre les différences de ces variables, & après avoir substitué à ce rapport l'expression de sa limite, effacer les termes qui sont encore multipliés par des différences. N'est-il pas clair maintenant que les règles prescrites par l'une & l'autre méthode, doivent nécessairement conduire au même résultat?

On

On auroit pu définir le calcul différentiel, la méthode pour trouver ce que deviennent les rapports entre les différences des quantités variables, lorsqu'on suppose que ces différences deviennent nulles ; & cette définition de Euler est très-exacte.

Newton nomme *fluxions* ce que nous avons nommé *différentielles ;* & pour désigner la fluxion du premier ordre d'une variable quelconque y, il met au-dessus un point, il met deux points pour désigner la fluxion du second ordre, trois points pour désigner celle du troisième ordre, &c. de la manière suivante, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. : nous avons adopté préférablement la caractéristique de Leibnitz, qui nous a paru être beaucoup plus commode dans la pratique. Ces deux hommes célèbres ont partagé la gloire de l'invention de ces nouveaux calculs ; mais Newton en a démontré les règles avec clarté ; au lieu que Leibnitz, effrayé des difficultés qu'on lui faisoit contre les grandeurs infiniment grandes & les grandeurs infiniment petites, réduisit ses infiniment petits à n'être que des incomparables, dans le même sens que l'on diroit qu'un grain de sable est incomparablement plus petit que la terre. Si le calcul différentiel pouvoit être envisagé sous ce point de vue, il ne seroit qu'une méthode d'approximation.

Le signe dont les inventeurs ont fait usage pour désigner les différentielles ou les fluxions est indépendant de la méthode ; nous avons pu nous en passer assez long-temps. Cependant il servira à la simplifier en donnant les moyens d'éviter une nomenclature toujours pénible. Nous ne négligerons pas de faire remarquer dans la suite de cet ouvrage combien l'invention d'un signe peut contribuer & à simplifier une méthode, & à lui donner toute la généralité dont elle est susceptible.

Mais avant d'entrer en matière nous dirons un mot de l'ordre que nous avons cru devoir suivre dans la distribution de cet ouvrage. Nous le diviserons en deux parties. Dans la première nous traiterons du calcul différentiel & du calcul intégral. Mais en traitant du calcul intégral, nous nous occuperons moins à donner aux méthodes toute l'étendue dont elles sont susceptibles, qu'à en faire voir l'esprit & l'usage par un très-grand nombre d'applications. Nous reprendrons ces mêmes méthodes dans la seconde partie, où nous ne craindrons plus d'occuper nos lecteurs de pure analyse, n'ayant rien négligé dans la première pour les convaincre que toutes les grandes questions de physique-mathématique se réduisent à des problêmes de calcul intégral.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

Du Calcul différentiel.

(221). Quelques principes qu'on adopte, soit ceux de la méthode des limites; soit ceux de la méthode des infiniment petits, on parviendra toujours à ce résultat : la différentielle du produit xy est égale à $ydx + xdy$ (n°. 152), & cette formule suffit pour trouver la différentielle d'une fonction quelconque.

Nous représenterons le produit xy par le rectangle $APMN$ (*fig. LVI*), où $AP = x$ & $PM = y$; & nous remarquerons que de quelque manière qu'on fasse varier x & y, ces variations appartiendront nécessairement à une courbe BM, & le rectangle ne pourra avoir pour différentielle que la somme des différentielles de l'espace concave APM & de l'espace convexe $ABMN$. Or nous avons démontré (n°. 183) que la différentielle de l'espace concave $= ydx$, que celle de l'espace convexe $= xdy$; donc $d \cdot xy = ydx + xdy$.

(222). On tire aisément de cette formule que la différentielle de ax^m, a & m étant constant & x une variable quelconque, est égale à $amx^{m-1}dx$; que celle de $\frac{x}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a^2 + 2x^2}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} dx - \frac{2xdx}{a^2}$, &c.

La différentielle du logarithme, ou la différentielle logarithmique d'une quantité quelconque, est égale à la différentielle de cette quantité, divisée par la quantité même. Ainsi la différentielle logarithmique de $x + \sqrt{(a^2 + x^2)}$ est égale à $\frac{dx + \frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}}{x + \sqrt{(a^2 + x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$. Pour trouver la différentielle logarithmique de $\frac{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}$, je cherche d'abord la différentielle de cette quantité de la manière suivante. Je fais $\frac{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}} = y$, d'où

$\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)} = y[\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}]$;

différentiant, il vient $\frac{dx}{2\sqrt{(1+x)}} - \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}} = dy[\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}]$ $+ y\left(\frac{dx}{2\sqrt{(1+x)}} + \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}}\right)$, & $dy = \frac{-dx}{2\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{dx \cdot [\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}]^2}{2\sqrt{(1-x^2)} \cdot [\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}]^2} = \frac{-2dx}{\sqrt{(1-x^2)} \cdot [\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}]^2}$.

Il ne reste plus qu'à diviser cette différentielle par la quantité même, ce qui donne $\frac{-dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$ pour la différentielle logarithmique demandée. Autrement, log. $\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}} = \log.[\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}] - \log.$ $[\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}]$; on tire delà que la différentielle logarithmique demandée est égale à $\frac{-dx[\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}]}{2\sqrt{(1-x^2)}[\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}]} -$ $\frac{dx[\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}]}{2\sqrt{(1-x^2)}[\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}]} = \frac{-dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$.

Soit $y = (\log. x^n)^m$; cette équation n'est autre que celle-ci $y = (n\log. x)^m$; & donne par conséquent $dy = \frac{mndx}{x}(n\log. x)^{m-1} = \frac{mndx}{x}(\log. x^n)^{m-1}$.

Soit encore $y = \log.\log. x$; je fais $\log. x = u$, d'où $\frac{dx}{x} = du$, &, à cause de $y = \log. u$, $dy\left(=\frac{du}{u}\right) = \frac{dx}{x\log. x}$. Les mêmes règles serviront pour les quantités exponentielles. Nous savons que la différentielle de a^x est $a^x dx \log. a$; si l'on demandoit celle de X^x, on feroit $X^x = y$, d'où $x \log. X = \log. y$ & $dx\log. X + x\frac{dX}{X} = \frac{dy}{y}$; il est clair que la différentielle demandée est égale à $X^x\left(dx\log. X + \frac{xdX}{X}\right)$.

(223). La différentielle du sinus d'un arc quelconque est égale à la différentielle de l'arc, multipliée par son cosinus, & divisée par le rayon; la différentielle du cosinus d'un arc quelconque est égale à la différentielle de l'arc prise négativement, multipliée par le sinus, & divisée par le rayon. Si c'est le sinus & le cosinus qui sont donnés, la différentielle de l'arc est égale à la différentielle du sinus, multipliée par le rayon, & divisée par le cosinus, ou à la différentielle du cosinus prise négativement, multipliée par le rayon, & divisée par le sinus. Pour trouver la différentielle de la tangente d'un arc s, le rayon étant r; il faut se rappeller que tang. $s = \frac{r\,\text{sin.}\,s}{\text{cos.}\,s}$. Or soit $\frac{\text{sin.}\,s}{\text{cos.}\,s} = y$, on a $\text{sin.}\,s = y\,\text{cos.}\,s$ & $\frac{ds\,\text{cos.}\,s}{r} = dy$ $\text{cos.}\,s - y\frac{ds\,\text{sin.}\,s}{r}$; d'où l'on tire $dy = \frac{ds(\text{cos.}\,s^2 + \text{sin.}\,s^2)}{r\,\text{cos.}\,s^2} = \frac{r\,ds}{\text{cos.}\,s^2}$; donc la différentielle de la tangente d'un arc quelconque est égale à la différentielle de l'arc, multipliée par le quarré du rayon, & divisée par le quarré du cosinus. Réciproquement la différentielle de l'arc, dont la tangente est donnée, est égale à la différentielle de cette tangente, multipliée par le quarré du rayon, & divisée par le quarré de la sécante. On trouvera de la même manière que la différentielle

de la co-tangente d'un arc quelconque est égale à la différentielle de l'arc prise négativement, multipliée par le quarré du rayon, & divisée par le quarré du sinus; réciproquement la différentielle de l'arc, dont la co-tangente est donnée, est égale à la différentielle de cette co-tangente prise négativement, multipliée par le quarré du rayon, & divisée par le quarré de la co-sécante. La sécante de l'arc s est égale à $\frac{r^2}{\cos. s}$, & elle a pour différentielle $\frac{r\,d\,s\,\text{sin.}\,s}{\cos.\,s^2}$; la co-sécante du même arc, qui est égale à $\frac{r^2}{\text{sin.}\,s}$, a pour différentielle $-\frac{r\,d\,s\cos.\,s}{\text{sin.}\,s^2}$.

Le rayon étant pris pour l'unité, ce que nous observerons constamment dans le cours de cet Ouvrage, si x est le sinus d'un arc s, $\sqrt{[1-x^2]}$ en est le cosinus; & réciproquement, si x est le cosinus de cet arc, $\sqrt{(1-x^2)}$ en est le sinus. Mais si x est la tangente du même arc, à cause de $x = \frac{\text{sin.}\,s}{\cos.\,s}$, on a $\cos.\,s^2 = \frac{1}{1+x^2}$; pour les mêmes raisons, si x en est la co-tangente, on a $\text{sin.}\,s^2 = \frac{1}{1+x^2}$. Cela posé, en désignant par A sin. x, A tang. x, &c. l'arc qui a pour sinus x, l'arc qui a pour tangente x, &c. on déduira aisément de ce qui précède les formules suivantes :

$d \cdot A\,\text{sin.}\,x = \frac{d\,x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $d \cdot A\cos.\,x = \frac{-d\,x}{\sqrt{[1-x^2]}}$,
$d \cdot A\,\text{tang.}\,x = \frac{d\,x}{1+x^2}$, $d \cdot A\,\text{cot.}\,x = \frac{-d\,x}{1+x^2}$; &
$d \cdot A\,\text{séc.}\,x = \frac{d\,x}{x\sqrt{(x^2-1)}}$, $d \cdot A\,\text{cosé.}\,x = \frac{-d\,x}{x\sqrt{(x^2-1)}}$;
$d \cdot A\,\text{sin. v.}\,x = \frac{d\,x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$, car la sécante de l'arc s étant x, on a $\cos.\,s = \frac{1}{x}$, & $\text{sin.}\,s = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$, &c. Voici quelques exemples de fonctions qui renferment plusieurs variables.

(224). Pour différentier $\frac{x}{y}$, je fais $\frac{x}{y} = z$, d'où $x = y\,z$, & $d\,x = y\,d\,z + z\,d\,y$; on tire delà $d\,z = \frac{d\,x}{y} - \frac{x\,d\,y}{y^2} = \frac{y\,d\,x - x\,d\,y}{y^2}$. Pour différentier la quantité $\sqrt[n]{(x\,y+y^2)}$, je la suppose $= z$, & il vient $x\,y + y^2 = z^n$, d'où $y\,d\,x + x\,d\,y + 2\,y\,d\,y = n\,z^{n-1}\,d\,z$, & $d\,z = \frac{y\,d\,x + x\,d\,y + 2\,y\,d\,y}{n\sqrt[n]{[(x\,y+y)^{n-1}]}}$.

On

On trouvera de même que la différentielle de $\frac{\sqrt[q]{(ax+x^2)}}{\sqrt[n]{(xy+y^2)}}$ eſt égale à

$$\frac{\sqrt[n]{(xy+y^2)}\cdot\frac{a\,dx+2x\,dx}{q\sqrt[q]{[(ax+x^2)^{q-1}]}}-\sqrt[q]{(ax+x^2)}\cdot\frac{y\,dx+x\,dy+2y\,dy}{n\sqrt[n]{[(xy+y^2)^{n-1}]}}}{\sqrt[n]{[(xy+y^2)^2]}}.$$

On demande la différentielle de l'arc qui a pour ſinus, $\frac{x}{y}$, ou de A ſin. $\frac{x}{y}$?

Je le ſuppoſe $=z$, & il vient $dz=\frac{d\cdot\frac{x}{y}}{\text{cos. } z}$; mais cos. $z=\frac{\sqrt{(y^2-x^2)}}{y}$; donc $dz=\frac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{(y^2-x^2)}}$. On propoſe encore de trouver la différentielle de l'arc qui a pour tangente $\frac{x}{y}$, ou de A tang. $\frac{x}{y}$? En le ſuppoſant $=z$, on a $dz=\frac{d\frac{x}{y}}{\text{ſéc. } z^2}$; mais ſéc $z^2=\frac{x^2+y^2}{y^2}$; donc $dz=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$. En nommant e le nombre dont le logarithme eſt l'unité, ce que nous ferons toujours dans la ſuite, la différentielle de $\frac{e^u y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ eſt égale à

$$\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}\cdot(e^u\,dy+e^u y\,du)-e^u y\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}}{x^2+y^2}=\frac{e^u y\,du}{\sqrt{(x^2+y)^2}}+\frac{e^u(x^2\,dy-xy\,dx)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(225). Après avoir différentié une fonction de pluſieurs variables, ſi vous raſſemblez ce qui eſt affecté de la différentielle d'une des variables, & que vous en faſſiez une ſomme qui ne peut être qu'une fonction des mêmes variables, multipliée par cette différentielle, vous aurez ce qu'on appelle un terme de la différentielle de la fonction propoſée. La fonction $\frac{y^3+x^3}{y-x}+\frac{x^2y}{a}$ différentiée, donne $(2y^3\,dy+3x^2y\,dx-3xy^2\,dy-2x^3\,dx+y^3\,dx-x^3\,dy):(y-x)^2+\frac{x^2\,dy+2xy\,dx}{a}$; $\left(\frac{2y^3-3xy^2-x^3}{(y-x)^2}+\frac{x^2}{a}\right)dy$ & $\left(\frac{3x^2y-2x^3+y^3}{(y-x)^2}+\frac{2xy}{a}\right)dx$ font les deux termes de cette différentielle. Soient $M\,dy+N\,dx+P\,du$ autant de termes de la différentielle d'une fonction z: on démontre que $M\,dy$ eſt la différentielle de z priſe en regardant y ſeul comme variable, que $N\,dx$ eſt la différentielle de la même fonction priſe en

regardant x seul comme variable, & ainsi des autres termes ; en effet, si y seul doit varier, les différences des autres variables sont nulles, & la différentielle de z se réduit à $M\,dy$; si c'est x seul qui doit varier, la même différentielle se réduit à $N\,dx$, &c. On verra aisément que $\left[\frac{2y^3 - 3xy^2 - x^3}{(y-x)^2} + \frac{x^2}{a}\right] dy$ est la différentielle de $\frac{y^3 + x^3}{y - x} + \frac{x^2 y}{a}$ par rapport à y seul ; que $\left[\frac{3x^2 y - 2x^3 + y^3}{(y-x)^2} + \frac{2xy}{a}\right] dx$ est la différentielle de la même fonction par rapport à x seul ; que $\frac{-c^a xy\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ est la différentielle de $\frac{c^a y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ par rapport à x seul, &c. Il suit de tout cela qu'une différentielle proposée, telle que $M\,dy + N\,dx + P\,du$, ne peut être exacte, sans qu'il y ait entre les co-efficiens M, N, P de certaines relations qu'il s'agit de découvrir.

(226). Une relation qui existe toujours entre les co-efficiens M & N de deux termes $M\,dy + N\,dx$ d'une différentielle exacte ; c'est que le co-efficient de dx dans la différentielle de M doit être identiquement la même chose que le co-efficient de dy dans la différentielle de N. Pour le démontrer, nommons z la fonction qui a pour différentielle celle dont $M\,dy + N\,dx$ sont deux termes ; puis concevons qu'en mettant $y + dy$ pour y, & effaçant ce qui est multiplié par toute autre puissance de dy que la première, z devienne Π ; qu'en substituant $x + dx$ pour x, & effaçant de même ce qui est multiplié par dx^2, dx^3, &c. cette fonction devienne Λ. Concevons de plus qu'en faisant en même temps les deux substitutions de $y + dy$ pour y, & de $x + dx$ pour x, avec les conditions requises d'effacer ce qui est multiplié par toute autre puissance de dy & de dx que la première, la fonction z devienne Z. On aura $\Pi - z = M\,dy$, $\Lambda - z = N\,dx$; & si dans Π l'on met $x + dx$ pour x, & dans Λ, $y + dy$ pour y, chacune de ces fonctions se changera en Z. Nous supposerons encore que la différentielle de M par rapport à x seul $= m\,dx$, que celle de N par rapport à y seul $= n\,dy$. Cela posé, il faut différentier l'équation $\Pi - z = M\,dy$, en ne faisant varier que x ; on mettra d'abord dans le premier membre, $x + dx$ pour x, & comme par cette substitution Π devient Z, & z devient Λ, on aura $Z - \Lambda - \Pi + z$ pour la différentielle de ce premier membre, en ne faisant varier que x, & par conséquent $Z - \Lambda - \Pi + z = m\,dx\,dy$. En différentiant l'équation $\Lambda - z = N\,dx$, en ne faisant varier que y, on trouvera $Z - \Pi - \Lambda + z = n\,dy\,dx$. On voit que $Z - \Lambda - \Pi + z$ est identiquement la même chose que $Z - \Pi - \Lambda + z$; il s'ensuit donc que $m = n$, & que cette équation est identique.

Au lieu de deux termes d'une différentielle exacte, concevons-en trois $M\,dy + N\,dx + P\,du$; & nous aurons, 1°. que le co-efficient de dx dans la différentielle de M, est égal au co-efficient de dy dans la différentielle de N ; 2°. que le co-efficient de du dans la différentielle de M, est égal au co-efficient de dy dans la différentielle de P ; 3°. que le co-efficient de du dans la différentielle de N, est égal au co-efficient de dx dans la différentielle de P. En général, on

aura autant de ces équations identiques, auxquelles on a donné le nom d'*équations de condition*, que les termes de la différentielle exacte pourront être combinés de fois deux à deux ; pour deux variables, on aura une équation de condition, on en aura trois pour trois variables, six pour quatre variables, & ainsi de suite. Il ne sera pas inutile d'éclaircir ce théorême par plusieurs exemples.

(227). Je prends pour premier exemple $\frac{-(5xy+6y^2)dx-(5xy+6x^2)dy}{2x^4y^4\sqrt{(x+y)}}$ qui est la différentielle de $\frac{\sqrt{[x+y]}}{x^3y^3}$; on doit avoir

$$\frac{-6x^4y^3\sqrt{(x+y)}+(5x+6y)\left(3x^4y^2\sqrt{(x+y)}+\frac{x^4y^3}{2\sqrt{(x+y)}}\right)}{2x^6y^6\cdot(x+y)},$$

qui est le co-efficient de dy dans la différentielle de $\frac{-5x-6y}{2x^3y^3\sqrt{(x+y)}}$ égal à

$$\frac{-6x^3y^4\sqrt{(x+y)}+(5y+6x)\left(3x^2y^4\sqrt{(x+y)}+\frac{x^3y^4}{2\sqrt{(x+y)}}\right)}{2x^6y^8\cdot(x+y)},$$

qui est le co-efficient de dx dans la différentielle de $\frac{-5y-6x}{2x^3y^4\sqrt{(x+y)}}$, ce qui est facile à vérifier. La différentielle $\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$ est exacte, elle est celle de $\mathcal{A}$ tang. $\frac{x}{y}$; on doit donc avoir le co-efficient de dy dans la différentielle de $\frac{y}{x^2+y^2}$ égal au co-efficient de dx dans la différentielle de $\frac{-x}{x^2+y^2}$, ou $\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-1}{x^2+y^2}+\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Prenons les deux termes $\frac{c^u y\,du}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, & $\frac{-c^u xy\,dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ de la différentielle de $\frac{c^u y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$; & on verra aisément que le co-efficient de dx dans la différentielle de $\frac{c^u y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, est identiquement la même chose que le co-efficient de du dans la différentielle de $\frac{-c^u xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(228). Nous pourrons représenter ces équations de condition d'une manière plus commode, en faisant usage de la notation de Fontaine. Soient $M\,dy+N\,dx$ deux termes de la différentielle de z ; il est clair qu'on trouve M en différentiant z par rapport à y, & divisant par dy ; qu'on trouve N en différentiant la même fonction par rapport à x, & divisant par dx. Fontaine écrit $\frac{dz}{dy}$

au lieu de M & $\frac{dz}{dx}$ au lieu de N ; en sorte que par $\frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dx}dx$, il entend toujours deux termes de la différentielle de z. Nous adopterons cette notation; & lorsque nous en ferons usage, pour qu'on ne puisse pas confondre ce co-efficient $\frac{dz}{dy}$, par exemple, avec le rapport entre les différentielles dz & dy, nous écrirons ce rapport comme il suit $dz : dy$. On trouve le co-efficient de dy dans la différentielle de $\frac{dz}{dy}$ ou de M, en différentiant z deux fois, par rapport à y, & divisant par dy^2. Fontaine représente ce co-efficient par $\frac{d^2z}{dy^2}$; celui de dx dans la même différentielle par $\frac{d^2z}{dydx}$; celui de dy dans la différentielle de $\frac{dz}{dx}$ par $\frac{d^2z}{dxdy}$, &c. comme on va le voir dans la table suivante, où l'on suppose z fonction de deux variables seulement.

$$dz = \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dx}dx, \quad d\frac{d^3z}{dy^3} = \frac{d^4z}{dy^4}dy + \frac{d^4z}{dy^3dx}dx,$$

$$d\frac{dz}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2}dy + \frac{d^2z}{dydx}dx, \quad d\frac{d^3z}{dy^2dx} = \frac{d^4z}{dy^2dxdy}dy + \frac{d^4z}{dy^2dx^2}dx,$$

$$d\frac{dz}{dx} = \frac{d^2z}{dxdy}dy + \frac{d^2z}{dx^2}dx, \quad d\frac{d^3z}{dydxdy} = \frac{d^4z}{dydxdy^2}dy + \frac{d^4z}{dydxdydx}dx,$$

$$d\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^3z}{dy^3}dy + \frac{d^3z}{dy^2dx}dx, \quad d\frac{d^3z}{dydx^2} = \frac{d^4z}{dydx^2dy}dy + \frac{d^4}{dydx^3}dx;$$

$$d\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^3z}{dydxdy}dy + \frac{d^3z}{dydx^2}dx, \quad d\frac{d^3z}{dxdy^2} = \frac{d^4z}{dxdy^3}dy + \frac{d^4z}{dxdy^2dx}dx,$$

$$d\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^3z}{dxdy^2}dy + \frac{d^3z}{dxdydx}dx, \quad d\frac{d^3z}{dxdydx} = \frac{d^4z}{dxdydxdy}dy + \frac{d^4z}{dxdydx^2}dx,$$

$$d\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^3z}{dx^2dy}dy + \frac{d^3z}{dx^3}dx, \quad d\frac{d^3z}{dx^2dy} = \frac{d^4z}{dx^2dy^2}dy + \frac{d^4z}{dx^2dydx}dx,$$

$$d\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^4z}{dx^3dy}dy + \frac{d^4z}{dx^4}dx,$$

&c.

(229). Au moyen de la notation précédente, il nous sera facile d'exprimer d'une manière commode les conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une différentielle proposée soit exacte; pour exprimer que $Mdy + Ndx$ sont deux termes d'une différentielle exacte, nous écrirons $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$. Nommons z la fonction qui a pour la différentielle celle dont il s'agit; les deux termes $Mdy + Ndx$ pourront être représentés par $\frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dx}dx$, & on aura $\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy}$.

On

On verra très-aisément aussi que $\frac{d^2 z}{dy^2} dy + \frac{d^2 z}{dy\,dx} dx$ étant deux termes d'une différentielle exacte, il est nécessaire que le co-efficient de dx dans la différentielle de $\frac{d^2 z}{dy^2}$, ou $\frac{d^3 z}{dy^2\,dx}$, soit identiquement la même chose que le co-efficient de dy dans la différentielle de $\frac{d^2 z}{dy\,dx}$, ou que $\frac{d^3 z}{dy\,dx\,dy}$; & pour les mêmes raisons que les co-efficiens compris dans chaque colonne verticale de la table suivante sont identiquement les mêmes.

$\frac{d^2 z}{dy\,dx}$	$\frac{d^3 z}{dy^2\,dx}$	$\frac{d^3 z}{dy\,dx^2}$	$\frac{d^4 z}{dy^3\,dx}$	$\frac{d^4 z}{dy^2\,dx^2}$	$\frac{d^4 z}{dy\,dx^3}$	&c.
$\frac{d^2 z}{dx\,dy}$	$\frac{d^3 z}{dy\,dx\,dy}$	$\frac{d^3 z}{dx\,dy\,dx}$	$\frac{d^4 z}{dy^2\,dx\,dy}$	$\frac{d^4 z}{dy\,dx\,dy\,dx}$	$\frac{d^4 z}{dx\,dy\,dx^2}$	
	$\frac{d^3 z}{dx\,dy^2}$	$\frac{d^3 z}{dx^2\,dy}$	$\frac{d^4 z}{dy\,dx\,dy^2}$	$\frac{d^4 z}{dy\,dx^2\,dy}$	$\frac{d^4 z}{dx^2\,dy\,dx}$	
			$\frac{d^4 z}{dx\,dy^3}$	$\frac{d^4 z}{dx\,dy^2\,dx}$	$\frac{d^4 z}{dx^3\,dy}$	
				$\frac{d^4 z}{dx\,dy\,dx\,dy}$		
				$\frac{d^4 z}{dx^2\,dy^2}$		

On a donné à ces co-efficiens le nom de différences partielles; $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ sont des différences partielles du premier ordre; celles-ci $\frac{d^2 z}{dy^2}$, $\frac{d^2 z}{dy\,dx}$, &c. sont du second ordre; les suivantes $\frac{d^3 z}{dy^3}$, &c. sont du troisième ordre; & ainsi des autres. En continuant la table précédente, il sera facile de s'assurer que deux différences partielles du même ordre sont identiquement les mêmes, lorsque leurs dénominateurs sont composés chacun d'un même nombre de facteurs pareils, qu'il y a, par exemple, autant de dy & de dx dans l'un que dans l'autre, de quelque manière que ces facteurs soient combinés entr'eux. Mais l'on demande si lorsque la fonction est homogène, il n'y auroit point d'autres conditions entre ses différences partielles?

(230). Nous avons dit qu'une fonction homogène étoit celle dans laquelle la somme des dimensions des quantités variables est la même dans tous les termes. La fonction entière $x^3 + ax^2y + bxy^2$ est homogène, & le nombre des dimensions de chaque terme est 3; celle-ci $\frac{x^3 + ax^2y + by^2\sqrt{(x^2+y^2)}}{\sqrt{(xy+y^2)}}$ est aussi homogène, & le

nombre des dimensions est 2, qu'on trouve en ôtant du nombre des dimensions du numérateur le nombre des dimensions du dénominateur. Lorsque le nombre des dimensions du numérateur est égal au nombre des dimensions du dénominateur, la fonction est dite être de dimension nulle; telle est celle-ci $\frac{gx^2+hxy}{xy+by^2}$.

Si le nombre des dimensions du numérateur est moindre que le nombre des dimensions du dénominateur, le nombre des dimensions de la fonction est négatif; $\frac{\sqrt{(x+y)}}{x^3y^3}$ est une fonction homogène dont le nombre des dimensions est $\frac{-11}{2}$.

Nous avons aussi remarqué une propriété qui n'a besoin que d'être énoncée pour être comprise; c'est que si dans une fonction homogène de deux variables y & x, de dimension quelconque n, on fait $\frac{y}{x}=q$, on la changera en une fonction de cette forme Qx^n, Q étant une fonction de q & des constantes qui entrent dans la proposée. Par cette substitution, les quatre fonctions homogènes, que nous venons de prendre pour exemple, deviennent $(1+aq+bq^2)x^3$, $\frac{1+aq+bq^2\sqrt{(1+q^2)}}{\sqrt{(q+q^2)}}x^2$, $\frac{g+hq}{q+bq^2}$, $\frac{\sqrt{(1+q)}}{q^3}x^{-\frac{11}{2}}$.

(231). La différentielle $Mdy+Ndx$ étant celle d'une fonction homogène z des deux variables y & x, dont la dimension est n, concevons que la substitution de qx pour y change M & N en M' & N'; à cause de $dy=qdx+xdq$, & que par la même substitution z devient de cette forme Qx^n, on aura $M'(qdx+xdq)+N'dx=d(Qx^n)$. Il est bien clair que $M'qdx+N'dx$ est la différentielle de Qx^n par rapport à x seul, & que par conséquent $M'q+N'=nQx^{n-1}$. Dans cette équation je mets pour q sa valeur $\frac{y}{x}$, & il vient $My+Nx=nz$. Cette propriété des fonctions homogènes est générale; car supposons que z renferme y, x, u, &c. & que le nombre des dimensions soit toujours $=n$, en faisant $\frac{y}{x}=q$, $\frac{u}{x}=r$, &c. z deviendra de cette forme Vx^n, par V j'entends une fonction de q, r, &c. Il suit delà que si nous nommons M', N', P', &c. ce que deviennent $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{du}$, &c. par les mêmes substitutions, on aura $M'(qdx+xdq)+N'dx+P'(rdx+xdr)+$ &c. $=d(Vx^n)$, & $M'q+N'+P'r+$ &c. $=nVx^{n-1}$. Je mets dans cette équation pour q, r, &c. leurs valeurs, & il vient $y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+u\frac{dz}{du}+$ &c. $=nz$; si z eût été de dimension nulle, on auroit eu $y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+u\frac{dz}{du}+$ &c. $=0$.

La fonction homogène $\frac{\sqrt{(x+y)}}{x^2y^3}$, dont la dimension est $-\frac{11}{2}$, a pour différentielle $\frac{-(5xy+6y^2)dx-(5xy+6x^2)dy}{2x^4y^4\sqrt{(x+y)}}$, on doit donc avoir

$$\frac{-(5xy+6y^2)x-(5xy+6x^2)y}{2x^4y^4\sqrt{(x+y)}}=\frac{-11}{2}\cdot\frac{\sqrt{(x+y)}}{x^3y^3},$$

& réduisant $11x^2y+11xy^2=11xy\cdot(x+y)$. Cette autre fonction homogène $\frac{gx^2+hxy}{xy+by^2}$, qui est de dimension nulle, a pour différentielle

$$\frac{(gx^2y+2bgxy^2+bhy^3)\,dx-(gx^3+2bgx^2y+bhxy^2)\,dy}{(xy+by^2)^2},$$

aussi a-t-on

$$(gx^2y+2bgxy^2+bhy^3)x-(gx^3+2bgx^2y+bhxy^2)y=0.$$

(232). Je reprends l'équation $n(Mdy+Ndx)(=ndz)=d(My+Nx)$; de laquelle on tire $(n-1)\cdot M=y\frac{dM}{dy}+x\frac{dN}{dy}$, $(n-1)\cdot N=y\frac{dM}{dx}+x\frac{dN}{dx}$; &, à cause de $\frac{dM}{dx}=\frac{dN}{dy}$, $(n-1)\cdot M=y\frac{dM}{dy}+x\frac{dM}{dx}$, $(n-1)\cdot N=y\frac{dN}{dy}+x\frac{dN}{dx}$. Donc N, M, & en général les différences partielles d'une fonction homogène, sont des fonctions homogènes dont le nombre des dimensions est moindre d'une unité. L'inverse de cette proposition, c'est que M & N étant des fonctions homogènes de dimension $n-1$, si $Mdy+Ndx$ est une différentielle exacte, on doit avoir $n(Mdy+Ndx)=d(My+Nx)$. En effet, l'homogénéité des fonctions M & N donne, à cause de $\frac{dM}{dx}=\frac{dN}{dy}$, $(n-1)\cdot M=y\frac{dM}{dy}+x\frac{dN}{dy}$, & $(n-1)\cdot N=y\frac{dM}{dx}+x\frac{dN}{dx}$; donc $n(Mdy+Ndx)=Mdy+y\cdot\left[\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dx}dx\right]+Ndx+x\cdot\left[\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dx}dx\right]=Mdy+ydM+Ndx+xdN$. Partons maintenant de cette proposition que z étant une fonction homogène, ses différences partielles doivent être des fonctions homogènes, & nous aurons les trois équations $nz=My+Nx$, $(n-1)\cdot M=y\frac{dM}{dy}+x\frac{dM}{dx}$, $(n-1)\cdot N=y\frac{dN}{dy}+x\frac{dN}{dx}$. On tire de la première $(n-1)\cdot M=y\frac{dM}{dy}+x\frac{dN}{dy}$, $(n-1)\cdot N=y\frac{dM}{dx}+x\frac{dN}{dx}$; comparant ces valeurs de M, N, avec

celles que donne l'hypothèse, il vient $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$. Les théorèmes démontrés dans cet article sont dus à Euler, qui les a donnés pour la première fois dans les Mémoires de l'académie de Péter-bourg pour les années 1734 & 1735. Je passe à la différentiation d s f nctions qui renferment des différentielles, & qu'on nomme pour cela fonctions *différentielles*.

(233). Pour différentier une fonction des variables y, x & du rapport $\frac{dy}{dx}$, on fera $\frac{dy}{dx} = p$, & on aura une fonction des trois variables y, x, p. Après l'avoir différentiée, on mettra pour $\frac{dp}{dx}$ (nos. 158, 159 & 160), ou $\frac{d^2y}{dx^2}$, si c'est la différence de x qu'on doit regarder comme constante; ou $-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, si c'est la différence de y; ou $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, si aucune différence ne doit être regardée comme constante. On propose de différentier la fonction $a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} + b\sqrt{(x^2+y^2)} = z$, en ne regardant aucune différence comme constante? Je fais $\frac{dy}{dx} = p$ & la propofée devient $a^2p^2 + xyp + b\sqrt{(x^2+y^2)}$, qui étant différentiée, donne

$$\frac{dz}{dx} = 2a^2p\frac{dp}{dx} + xy\frac{dp}{dx} + py + px\frac{dy}{dx} + \frac{b\left[x+y\frac{dy}{dx}\right]}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

& faisant les substitutions nécessaires, $\frac{dz}{dx} = \left(2a^2\frac{dy}{dx} + xy\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right) + y\frac{dy}{dx} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{b\left[x+y\frac{dy}{dx}\right]}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Pour différentier la fonction $\frac{dz}{dx}$ en continuant de ne regarder aucune différence comme constante, on fera $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2} = q$, & de cette manière on la changera en celle-ci: $(u) \ldots 2a^2pq + xyq + yp + xp^2 + \frac{b(x+yp)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$. En différentiant, il vient $\frac{du}{dx} = (2a^2p + xy)\frac{dq}{dx} + 2a^2q\frac{dp}{dx} + yq + xq\frac{dy}{dx} + y\frac{dp}{dx} + p\frac{dy}{dx} + p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{b\left[1+p\frac{dy}{dx}+y\frac{dp}{dx}\right]}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{b[x+yp]\left[x+y\frac{dy}{dx}\right]}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

mettant

mettant pour p, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx}$ leurs valeurs, on a $\frac{du}{dx} =$

$$\left(2a^2\frac{dy}{dx} + xy\right)\left[\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3} - 3\frac{d^2x}{dx^2}\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2\right]$$
$$+ 2a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2 + \left(2y + 3x\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right) +$$
$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{b\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)\right]}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{b\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(234). Dans l'analyse des infiniment petits, on regarde les différences infiniment petites du premier ordre dx, dy comme de nouvelles variables qui ont pour différences infiniment petites d^2y, d^2x; celles-ci du second ordre, ont pour différences infiniment petites d^3y, d^3x, qui sont du troisième ordre, & ainsi de suite: en différentiant les fonctions précédentes de cette autre manière, on parviendroit aux mêmes résultats. Mais quoiqu'on ne puisse pas regarder comme des quantités les termes dy, dx; d^2y, dx^2, &c. des rapports $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, &c.; nous nous servirons cependant, pour abréger, des mots variables & constans en parlant d'une différentielle. Nous dirons que $\frac{d^2y}{dx}$ est la différentielle de $\frac{dy}{dx}$, en regardant dx comme constant; que $\frac{d^2y}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx}$ est la différentielle de la même quantité $\frac{dy}{dx}$, en faisant tout varier; que si dans les expressions $\frac{dz}{dx}$ & $\frac{du}{dx}$, trouvées plus haut, on fait $d^2y = 0$, $d^3y = 0$, on aura ce qu'on eût trouvé en regardant dy comme constant; que si dans les mêmes expressions on fait $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, on aura ce qu'on eût trouvé en regardant dx comme constant. Nous dirons d'une fonction différentielle, en la considérant séparément de l'équation à laquelle elle appartient, qu'elle est de telle dimension en dx, dy, d^2x, d^2y, &c.; en comptant chaque différentielle du premier ordre pour une dimension, chaque différentielle du second ordre pour deux dimensions, chaque différentielle du troisième ordre pour trois dimensions, & ainsi de suite: les fonctions différentielles $\frac{axd^2y + y^2dx^2}{dy^2}$, & $\frac{ax^pd^ny + y^qdx^n}{dy^m}$ sont, l'une de dimension nulle, l'autre de dimension $n - m$.

Si on eût proposé l'équation $a^2dy^2 + xydydx + bdx^2\sqrt{(x^2+y^2)} = 0$, nous lui aurions donné cette forme $a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} + b\sqrt{(x^2+y^2)} = 0$, & si on eût demandé de la différentier en ne regardant aucune différence comme constante, nous aurions trouvé $(2a^2dy + xydx)(dxd^2y - dyd^2x) + ydx^3dy + xdx^2dy^2 + \frac{b(xdx^4 + ydx^3dy)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0$. En regardant dy, dx

comme de nouvelles variables qui ont pour différentielles $d^2 y$, $d^2 x$; on trouve pour la différentielle de la même équation $(2a^2 dy + xydx)\, d^2 y + [xydy + 2bdx \sqrt{(x^2 + y^2)}]\, d^2 x + ydx^2 dy + xdxdy^2 + \frac{b(xdx^3 + ydx^2 dy)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = 0$; ou $(2a^2 dy + xydx)\left(d^2 y - \frac{dy}{dx} d^2 x\right) + [2a^2 dy^2 + 2xydxdy + 2bdx^2 \sqrt{(x^2+y^2)}]\,\frac{d^2 x}{dx} + ydx^2 dy + xdxdy^2 + \frac{b(xdx^3 + ydx^2 dy)}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = 0$, qui n'est effectivement que celle que nous avons trouvée de l'autre manière, puisque $a^2 dy^2 + xydxdy + bdx^2 \sqrt{(x^2+y^2)} = 0$ est l'équation proposée. Une équation du second ordre $Qd^2y + Pd^2x + M = 0$, (Q, P, M renferment y, x, dy, dx) ne signifie rien absolument, si elle n'est la même que celle-ci $Q\left(d^2 y - \frac{dy}{dx} d^2 x\right) + M = 0$, ou que celle-ci $P\left(d^2 x - \frac{dy}{dx} d^2 y\right) + M = 0$. Ainsi pour que l'équation du second ordre $Qd^2 y + Pd^2 x + M = 0$, ne soit point absurde, il faut que $Pdx + Qdy = 0$, ce qui peut arriver de deux manières ; ou parce que P est effectivement égal à $-Q\frac{dy}{dx}$, ce qui rend l'équation $Pdx + Qdy = 0$ identique ; ou parce que cette équation $Pdx + Qdy = 0$ est celle qui par la différentiation a donné la proposée. En général, on reconnoîtra qu'une équation quelconque du second ordre, où aucune différence n'est supposée constante, n'est point absurde, lorsque faisant $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2 x}{dx^2} = q$, on pourra la réduire à ne renfermer que y, x, p, q.

(235). Soient $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, $\frac{dr}{dx} = s$, &c. ; on aura, en ne regardant aucune différence comme constante,

$q = \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2 x}{dx^2}$, $r = \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}\frac{d^3 x}{dx^3} - 3\frac{d^2 x}{dx^2}\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2 x}{dx^2}\right)^2$; $s = \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{dy}{dx}\frac{d^4 x}{dx^4} - 6\frac{d^2 x}{dx^2}\frac{d^3 y}{dx^3} + 10\frac{dy}{dx}\frac{d^2 x}{dx^2}\frac{d^3 x}{dx^3} - 4\frac{d^3 x}{dx^3}\frac{d^2 y}{dx^2} + 15\left(\frac{d^2 x}{dx^2}\right)^2\frac{d^2 y}{dx^2} - 15\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2 x}{dx^2}\right)^3$, &c. En regardant dy comme constant, on aura $q = -\frac{dy}{dx}\frac{d^2 x}{dx^2}$, $r = -\frac{dy}{dx}\frac{d^3 x}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2 x}{dx^2}\right)^2$, $s = -\frac{dy}{dx}\frac{d^4 x}{dx^4} + 10\frac{dy}{dx}\frac{d^2 x}{dx^2}\frac{d^3 x}{dx^3} - 15\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2 x}{dx^2}\right)^3$, &c. En regardant dx comme constant, on aura $q = \frac{d^2 y}{dx^2}$, $r = \frac{d^3 y}{dx^3}$, $s = \frac{d^4 y}{dx^4}$, &c.

(236). On pourroit prendre pour constante toute autre différentielle; $y\,dx$, par exemple, qui est celle de l'espace APM (*fig. XLVI*). En faisant $y\,dx = dz$ ou $y = \frac{dz}{dx}$, on a $\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, car dz est constant, & $\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{-1}{y}\frac{dy}{dx}$. On tire de l'équation $\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, dz étant toujours constant, $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{dz}{dx}\frac{d^3x}{dx^3} + 3\frac{dz}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$, & $\frac{d^3x}{dx^3} = \frac{-1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. Substituant ces valeurs de $\frac{d^2x}{dx^2}$, $\frac{d^3x}{dx^3}$, &c. dans ce qu'on a trouvé pour q, r, &c. en ne regardant aucune différence comme constante; on aura, lorsque $y\,dx$ est constant,

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,\quad r = \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{4}{y}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3, \text{ \&c.}$$

Je prends pour constante la différentielle de l'arc AM, ou $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; en supposant $\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]} = \frac{dz}{dx}$, & différentiant en regardant dz comme constant, il vient $\dfrac{\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}} = -\frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$; on tire de cette équation $\frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}$. La même équation différentiée, en continuant de regarder dz comme constant, donne

$$\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{dy}{dx}\left[\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3} - 3\frac{d^2x}{dx^2}\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2\right]}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}} = -\frac{dz}{dx}\frac{d^3x}{dx^3} + 3\frac{dz}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2,$$

ou $\dfrac{\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = -\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3x}{dx^3} + 3\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$; donc $\frac{d^3x}{dx^3} = -\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$. Il faut substituer ces valeurs de $\frac{d^2x}{dx^2}$, $\frac{d^3x}{dx^3}$, &c. dans ce qu'on a trouvé pour q, r, &c. en ne regardant aucune différence

comme conſtante, & on aura, lorſque $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ eſt conſtant;

$$q = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]\frac{d^2y}{dx^2},\ r = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left[\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right], \text{\&c.}$$

Si on eût éliminé $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c. on auroit trouvé $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dx}{dy}\frac{d^2x}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dx^3} - \frac{dx}{dy}\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$, &c. & ſubſtituant ces valeurs, on auroit eu lorſque $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ eſt conſtant,

$$q = -\frac{dx^2 + dy^2}{dx\,dy}\frac{d^2x}{dx^2},\ r = -\frac{dx^2 + dy^2}{dx\,dy}\left[\frac{d^3x}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2\right] - \frac{dx}{dy}\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2, \text{\&c.}$$

(237). Une fonction d'un ordre quelconque, pour n'être point abſurde, doit être telle que par une ſubſtitution convenable, on puiſſe la transformer en une fonction de y, x, p, q, r, s, &c. ſi elle eſt de dimenſion nulle, ou en une fonction des mêmes lettres multipliée par dx^n, ſi ſa dimenſion eſt n; il n'eſt queſtion ici que de la dimenſion en dy, dx, d^2y, &c. De quelque manière qu'on différentie, ſi on regarde une des différentielles comme conſtante, la fonction qui proviendra de la différentiation ſera de celles que nous diſons n'être point abſurdes; il n'en ſera pas de même ſi, différentiant comme on le fait dans l'analyſe des infiniment petits, on ne regarde aucune différentielle comme conſtante. Je différentie la fonction du premier ordre $y\,dx + x\,dy = dz$, en regardant dy & dx comme de nouvelles variables qui ont pour différentielles d^2y & d^2x, & il me vient $y\,d^2x + x\,d^2y + 2\,dx\,dy = d^2z$, ou $\frac{y\,d^2x + x\,d^2y}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dx\,dy} - 2$; la fonction du ſecond ordre $\frac{y\,d^2x + x\,d^2y}{dx\,dy}$, où aucune différentielle n'eſt ſuppoſée conſtante, eſt de celles que je dis être abſurdes, puiſqu'en faiſant $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2} = q$, on ne peut la transformer en une fonction de y, x, p, q. Une fonction où aucune différentielle n'eſt regardée comme conſtante, & qu'on peut transformer en une fonction de y, x, p, q, r, &c. a la propriété de conſerver toujours la même valeur, quelle différentielle qu'on prenne pour conſtante; il n'en eſt pas ainſi de la fonction $\frac{y\,d^2x + x\,d^2y}{dx\,dy}$. Pour le faire voir bien clairement, j'imagine entre y & x une certaine relation $y = x^n$, par exemple, & on a $dy = nx^{n-1}dx$. Cela poſé, lorſque dy eſt conſtant, $d^2y = nx^{n-1}d^2x + n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}dx^2 = 0$, d'où l'on tire $d^2x = -\frac{n-1}{x}dx^2$; & ſubſtituant pour y, dy, d^2x leurs valeurs dans $\frac{y\,d^2x}{dx\,dy}$, qui eſt ce que devient la formule

mule lorsque dy est supposé constant, on a $-\frac{n-1}{n}$. Lorsque c'est dx qui est supposé constant, on a $d^2y = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}\, dx^2$ & $\frac{x\, d^2 y}{dx\, dy} = n - 1$; autre valeur de la formule fort différente de la précédente. On en trouveroit qui différeroient encore de celles-là en prenant pour constante toute autre différentielle : ainsi tant qu'aucune différentielle ne sera regardée comme constante, la formule $\frac{y\, d^2 x + x\, d^2 y}{dx\, dy}$, & toute autre fonction de y, x & de leurs différentielles de tous les ordres qui ne pourra pas se ramener à une fonction de y, x, p, q, r, s, &c. (je fais abstraction de la puissance de dx qui peut multiplier cette fonction lorsqu'elle n'est pas de dimension nulle) ne présentera rien que de vague, & par conséquent il ne peut jamais être question d'une semblable fonction.

(238). Étant proposée une fonction d'un ordre quelconque, dans laquelle une certaine différentielle est regardée comme constante, on demande de la transformer en une autre dans laquelle on prendra pour constante toute autre différentielle, ou dans laquelle aucune différentielle ne sera regardée comme constante ? Ce problème est bien simple ; car par des substitutions convenables, on pourra toujours changer la fonction proposée en une fonction de y, x, p, q, r, s, &c. ; on mettra ensuite pour p, q, r, s, &c. les valeurs qui conviennent à l'hypothèse actuelle. Par exemple, la fonction $\frac{dx\, d^3 y}{x\, d^2 y}$ a été trouvée en regardant dx constant, & il est question de la transformer en une autre dans laquelle aucune différentielle ne soit regardée comme constante. En faisant $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = r$, on changera la fonction $\frac{dx\, d^3 y}{x\, d^2 y}$ en celle-ci $\frac{r\, dx^2}{q\, x}$; dans laquelle si l'on met pour q & r les valeurs qu'ont ces lettres lorsqu'aucune différentielle n'est regardée comme constante, on aura

$$\frac{dx^2\, d^3 y - dy\, dx\, d^3 x - 3\, dx\, d^2 x\, d^2 y + 3\, dy\, d^2 x^2}{x\, dx\, d^2 y - x\, dy\, d^2 x} = \frac{dx(dx\, d^3 y - dy\, d^3 x)}{x(dx\, d^2 y - dy\, d^2 x)} - \frac{3\, d^2 x}{x}.$$

Si l'on demandoit de transformer la même formule $\frac{dx\, d^3 y}{x\, d^2 y}$ en une autre dans laquelle $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ seroit regardée comme constante ; on lui donneroit d'abord la forme suivante $\frac{r\, dx^2}{q\, x}$; puis mettant pour q & r les valeurs qui conviennent à l'hypothèse actuelle, on auroit $\frac{dx^2\, d^3 y + 4\, dy\, d^2 y^2}{x\, dx\, d^2 y}$.

(239). Lorsqu'une différentielle exacte est du premier ordre, on peut aisément en distinguer tous les termes ; il n'en est pas de même lorsqu'elle est d'un ordre supérieur. La fonction du second ordre $\frac{y\, dy^2 + 2\, y\, dy\, dx + y\, x\, dx^2}{(dy + dx)^2}\, d^2 y +$

$\frac{dy^3 + x\,dy^2\,dx + y\,dy\,dx^2}{dy + dx}$ eſt la différentielle de $\frac{y\,dy^2 + y\,x\,dy\,dx}{dy + dx}$; comment diſtinguer dans $\frac{dy^3 + x\,dy^2\,dx + y\,dy\,dx^2}{dy + dx}$ les deux termes de la différentielle exacte qui y ſont renfermés? Cependant pour trouver par la méthode du n°. 226 les conditions qui doivent avoir lieu pour que $N\,d^2 y + M$, ou plus ſimplement pour que $n\,dp + m\,dx$ (n & m ſont des fonctions de y, x, p ſoit la différentielle d'une fonction quelconque du premier ordre que je nomme z, il eſt néceſſaire de ſéparer dans $m\,dx$ les deux termes $\frac{dz}{dx}\,dx$ & $\frac{dz}{dy}\,dy$. Je ſuppoſe $\frac{dz}{dx} = m - \pi$, π eſt une fonction inconnue que nous ne tarderons pas à déterminer ; alors $\frac{dz}{dy}$ ſera égal à $\frac{\pi}{p}$, & on aura $n\,dp + m\,dx = n\,dp + (m - \pi)\,dx + \frac{\pi}{p}\,dy$. Cette différentielle exacte a trois termes, on a donc les trois équations $\frac{dn}{dx} = \frac{dm}{dp} - \frac{d\pi}{dp}$, $\frac{dn}{dy} = \frac{1}{p}\,\frac{d\pi}{dp} - \frac{\pi}{p^2}$, $\frac{dm}{dy} - \frac{d\pi}{dy} = \frac{1}{p}\,\frac{d\pi}{dx}$.
Je mets dans la ſeconde équation pour $\frac{d\pi}{dp}$ ſa valeur tirée de la première, & il vient $\pi = p\,\frac{dm}{dp} - p\,\frac{dn}{dx} - p^2\,\frac{dn}{dy}$; donc $\frac{d\pi}{dx} = p\,\frac{d^2 m}{dp\,dx} - p\,\frac{d^2 n}{dx^2} - p^2\,\frac{d^2 n}{dx\,dy}$, $\frac{d\pi}{dy} = p\,\frac{d^2 m}{dp\,dy} - p\,\frac{d^2 n}{dx\,dy} - p^2\,\frac{d^2 n}{dy^2}$, $\frac{d\pi}{dp} = \frac{dm}{dp} + p\,\frac{d^2 m}{dp^2} - \frac{dn}{dx} - p\,\frac{d^2 n}{dp\,dx} - 2p\,\frac{dn}{dy} - p^2\,\frac{d^2 n}{dy\,dp}$.
Si l'on met pour $\frac{d\pi}{dp}$ ſa valeur dans la première équation, ou pour π & $\frac{d\pi}{dp}$ leurs valeurs dans la ſeconde, car de l'une & de l'autre manière on doit trouver la même choſe, & enſuite pour $\frac{d\pi}{dy}$, $\frac{d\pi}{dx}$ leurs valeurs dans la troiſième, on aura les deux équations identiques

$$(a) \cdots\cdots 2\,\frac{dn}{dy} - \frac{d^2 m}{dp^2} + \frac{d^2 n}{dp\,dx} + p\,\frac{d^2 n}{dp\,dy} = 0;$$

$$(b) \cdots\cdots \frac{dm}{dy} - \frac{d^2 m}{dp\,dx} - p\,\frac{d^2 m}{dp\,dy} + \frac{d^2 n}{dx^2} + 2p\,\frac{d^2 n}{dx\,dy} + p^2\,\frac{d^2 n}{dy^2} = 0;$$

& ces équations renferment les conditions demandées. Mais généraliſons le problême, & propoſons-nous de trouver les conditions qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction d'un ordre quelconque, comprenant un nombre quelconque de variables, ſoit une différentielle exacte.

(240). Ces variables sont y, x, u, &c., & je suppose

$$\frac{dy}{dx}=p, \frac{dp}{dx}=q \ldots\ldots \frac{ds}{dx}=t; \frac{du}{dx}=p', \frac{dp'}{dx}=q' \ldots\ldots \frac{ds'}{dx}=t', \text{\&c.}$$

Cela posé, soit ζ une fonction de y, x, u, &c. p, q...... t, p', q'....... t', &c.; & supposons que ζdx soit la différentielle d'une fonction z de l'ordre immédiatement inférieur. On aura $\zeta dx = dz$; & parce que z ne doit pas renfermer t, t', &c. on aura

$$\begin{aligned}\zeta = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}p + \frac{dz}{dp}q + \ldots\ldots\ldots + \frac{dz}{ds}t,\\ + \frac{dz}{du}p' + \frac{dz}{dp'}q' + \ldots\ldots\ldots + \frac{dz}{ds'}t'\\ \text{\&c.}\end{aligned}$$

Je fais

$$\begin{aligned}d\zeta = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \ldots\ldots + T\,dt;\\ + N'du + P'dp' + Q'dq' + \ldots\ldots + T'dt'\\ \text{\&c.}\end{aligned}$$

& il est clair que

$$\begin{aligned}N = \frac{d^2z}{dy\,dx} + \frac{d^2z}{dy^2}p + \frac{d^2z}{dy\,dp}q + \ldots\ldots + \frac{d^2z}{dy\,ds}t = \frac{1}{dx}d\frac{dz}{dy};\\ + \frac{d^2z}{dy\,du}p' + \frac{d^2z}{dy\,dp'}q' + \ldots\ldots + \frac{d^2z}{dy\,ds'}t'\\ \text{\&c.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P = \frac{dz}{dy} + \frac{d^2z}{dp\,dx} + \frac{d^2z}{dp\,dy}p + \frac{d^2z}{dp^2}q + \ldots\ldots + \frac{d^2z}{dp\,ds}t = \frac{dz}{dy} + \frac{1}{dx}d\frac{dz}{dp};\\ + \frac{d^2z}{dp\,du}p' + \frac{d^2z}{dp\,dp'}q' + \ldots\ldots + \frac{d^2z}{dp\,ds'}t'\\ \text{\&c.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q = \frac{dz}{dp} + \frac{d^2z}{dq\,dx} + \frac{d^2z}{dq\,dy}p + \frac{d^2z}{dq\,dp}q + \ldots\ldots + \frac{d^2z}{dq\,ds}t = \frac{dz}{dp} + \frac{1}{dx}d\frac{dz}{dq};\\ + \frac{d^2z}{dq\,du}p' + \frac{d^2z}{dq\,dp'}q' + \ldots\ldots + \frac{d^2z}{dq\,ds'}t'\\ \text{\&c.}\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad T = \frac{dz}{ds}.$$

On trouvera de la même manière $N' = \frac{1}{dx}d\frac{dz}{du}$, $P' = \frac{dz}{du} + \frac{1}{dx}d\frac{dz}{dp'}$;

$Q' = \frac{dz}{dp'} + \frac{1}{dx}d\frac{dz}{dq'}$ .... $T' = \frac{dz}{ds'}$, &c.

Si ζ n'est fonction que de y, x, p; p n'entrera pas dans z; &, à cause

de $N = \frac{1}{dx} d \frac{dz}{dy}$, $\frac{1}{dx} dP = \frac{1}{dx} d \frac{dz}{dy}$; on aura $N - \frac{1}{dx} dP = 0$. Je suppose ζ fonction de y, x, p, q; q n'entrera pas dans z; &, à cause de

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{1}{dx} d \frac{dz}{dy}, \\ \frac{1}{dx} dP &= \frac{1}{dx} d \frac{dz}{dy} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dz}{dp}, \\ \frac{1}{dx^2} d^2 Q &= \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dz}{dp}, \end{aligned}\right\} \text{on aura } N - \frac{1}{dx} dP + \frac{1}{dx^2} d^2 Q = 0.$$

En général, ζ étant une fonction d'un ordre quelconque, & comprenant un nombre quelconque de variables, comme nous l'avons supposé d'abord, on aura

$$N - \frac{1}{dx} dP + \frac{1}{dx^2} d^2 Q - \frac{1}{dx^3} d^3 R + \frac{1}{dx^4} d^4 S - \&c. = 0,$$

$$N' - \frac{1}{dx} dP' + \frac{1}{dx^2} d^2 Q' - \frac{1}{dx^3} d^3 R' + \frac{1}{dx^4} d^4 S' - \&c. = 0,$$

&c.; & il y aura autant de ces équations de condition que de variables moins une, qui est celle dont la différentielle première sert de dénominateur aux rapports p, q, &c. p', q', &c. &c. différentielle qu'ici pour simplifier nous avons fait constante. Ce beau théorême est de Euler; il a été démontré pour la première fois d'une manière directe par Condorcet dans son Calcul intégral, & il en a tiré les conséquences suivantes.

(241). Si ζdx^2 est la différentielle d'une fonction z' d'un ordre inférieur de deux unités; à cause de $z dx = dz'$, on aura

$$\frac{dz}{dy} - \frac{1}{dx} d \frac{dz}{dp} + \frac{1}{dx^2} d^2 \frac{dz}{dq} - \&c. = 0.$$

Mais on verra aisément que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy} &= P - \frac{1}{dx} dQ + \frac{1}{dx^2} d^2 R - \frac{1}{dx^3} d^3 S + \&c., \\ \frac{dz}{dp} &= Q - \frac{1}{dx} dR + \frac{1}{dx^2} d^2 S - \&c., \\ \frac{dz}{dq} &= R - \frac{1}{dx} dS + \&c., \end{aligned}$$

&c.; substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on en tire

$$P - \frac{2}{dx} dQ + \frac{3}{dx^2} d^2 R - \frac{4}{dx^3} d^3 S + \&c. = 0.$$

Si ζdx^3 est la différentielle d'une fonction d'un ordre inférieur de trois unités, $z dx^2$ est la différentielle d'une fonction d'un ordre inférieur de deux unités; & on a $\frac{dz}{dp} - \frac{2}{dx} d \frac{dz}{dq} + \frac{3}{dx^2} d^2 \frac{dz}{dr} - \&c. = 0$;

substituant,

fubftituant pour $\frac{dz}{dp}$, $\frac{dz}{dq}$, &c. leurs valeurs, il vient pour équation de condition

$$Q - \frac{3}{dx}dR + \frac{6}{dx^2}d^2S - \text{\&c.} = 0.$$

En continuant ainfi, on trouvera que fi Cdx^n eft la différentielle d'une fonction d'un ordre inférieur d'un nombre n d'unités, on aura pour la variable y (il en eft de même des autres variables, en en exceptant celle dont la différentielle première eft le dénominateur des rapports dont j'ai parlé ci-deffus) ce nombre n d'équations de condition :

$$(A) \ldots\ N - \frac{1}{dx}dP + \frac{1}{dx^2}d^2Q - \frac{1}{dx^3}d^3R + \frac{1}{dx^4}d^4S - \text{\&c.} = 0,$$

$$(B) \ldots \left\{ \begin{array}{r} P - \frac{2}{dx}dQ + \frac{3}{dx^2}d^2R - \frac{4}{dx^3}d^3S + \text{\&c.} = 0; \\ Q - \frac{3}{dx}dR + \frac{6}{dx^2}d^2S - \text{\&c.} = 0; \\ R - \frac{4}{dx}dS + \text{\&c.} = 0, \\ \text{\&c.}; \end{array} \right.$$

les co-efficiens des équations B font, dans la première, les nombres naturels; dans la feconde, les nombres triangulaires; dans la troifième, les nombres pyramidaux; & ainfi de fuite. Il ne fera pas inutile d'éclaircir cela par quelques exemples.

Soit d'abord la fonction du premier ordre $ndy + mdx$; on a $C = np + m$, & par conféquent $N = \frac{dn}{dy}p + \frac{dm}{dy}$, $P = n$. Subftituant ces valeurs dans $N - \frac{1}{dx}dP = 0$, il vient $\frac{dn}{dy}p + \frac{dm}{dy} - \frac{dn}{dx} - \frac{dn}{dy}p = 0$, ou $\frac{dm}{dy} = \frac{dn}{dx}$.

Je prends pour fecond exemple la fonction du fecond ordre $(nq + m)dx$. On a $N = \frac{dn}{dy}q + \frac{dm}{dy}$, $P = \frac{dn}{dp}q + \frac{dm}{dp}$, $Q = n$; & fubftituant ces valeurs dans l'équation $N - \frac{1}{dx}dP + \frac{1}{dx^2}d^2Q = 0$, il vient $\frac{dn}{dy}q + \frac{dm}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{dn}{dp}dq - \frac{1}{dx}q\,d\frac{dn}{dp} - \frac{1}{dx}d\frac{dm}{dp} + \frac{1}{dx^2}d^2n = 0$. En achevant les différentiations indiquées, & réduifant, on en tire

$$q\left(2\frac{dn}{dy} - \frac{d^2m}{dp^2} + \frac{d^2n}{dp\,dx} + p\frac{d^2n}{dp\,dy}\right) + \frac{dm}{dy} - \frac{d^2m}{dp\,dx} - p\frac{d^2m}{dp\,dy} + \frac{d^2n}{dx^2} + 2p\frac{d^2n}{dx\,dy} + p^2\frac{d^2n}{dy^2} = 0.$$

Mais les fonctions m & n ne devant pas renfermer q, cette équation ne peut être identique à moins que ce qui multiplie q ne foit égal à zéro; cette équation doit doit donc néceffairement fe partager en deux autres qu'on voit évidemment être

celles que nous avons nommées plus haut a & b. Si la fonction du second ordre est la différentielle d'une fonction de y, x ; à cause de $P - \frac{2}{dx} d Q = 0$, on aura de plus (c) $\frac{dm}{dp} - q \frac{dn}{dp} - 2 \frac{dn}{dx} - 2p \frac{dn}{dy} = 0$.

On a donné aux équations telles que a, b, c le nom d'équations aux différences partielles. Dans le problême dont il est question, ces équations sont identiques. Mais si l'on proposoit de trouver deux fonctions m & n avec cette condition que $n dp + m dx$ fût la différentielle d'une fonction du premier ordre, on auroit m & n au moyen des équations a & b ; & comme il y a une infinité de fonctions du second ordre qui ont les conditions requises, il est clair qu'il doit y avoir une infinité de valeurs de m & de n qui satisferont aux équations a & b.

CHAPITRE II.

DES PRINCIPAUX USAGES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

(242). NOUS nommerons (*fig. VII*)

AP, x, PM, y, UA, H, UM, z, AUM, ς, AM, s ;

& nous aurons $y = z \text{ sin. } \varsigma$, $x = H - z \cos. \varsigma$, $PT = \frac{y\,dx}{dy}$, $PR = \frac{y\,dy}{dx}$, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dz^2 + z^2 d\varsigma^2}$, $MT = \frac{y\,ds}{dy}$, $MR = \frac{y\,ds}{dx}$, $\text{sin. } PTM = \frac{dy}{ds}$, $\cos. PTM = \frac{dx}{ds}$ & le rayon de courbure $r = \mp \frac{ds^3}{dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, le signe $-$ étant pour la courbe concave vers l'axe, & le signe $+$ pour la courbe convexe.

Pour déterminer la perpendiculaire UO sur la tangente, on remarquera que $\text{sin. } MUO = \text{sin. }(\varsigma + T) = \frac{dx}{ds} \text{ sin. } \varsigma + \frac{dy}{ds} \cos. \varsigma$; on fera ensuite cette proportion

$1 : z :: \text{sin. } UMO : UO = \frac{dx}{ds} z \text{ sin. } \varsigma + \frac{dy}{ds} z \cos. \varsigma = \frac{z^2 d\varsigma}{ds} = \frac{y\,dx - x\,dy + H\,dy}{ds}$.

De plus, à cause de $TMU = TMP + PMU$, on trouvera

$\text{sin. } TMU = \frac{dx}{ds} \text{ sin. } \varsigma + \frac{dy}{ds} \cos. \varsigma = \frac{z\,d\varsigma}{ds} = \frac{y\,dx - x\,dy + H\,dy}{z\,ds}$,

$\cos. TMU = \frac{dy}{ds} \text{ sin. } \varsigma - \frac{dx}{ds} \cos. \varsigma = \frac{dz}{ds} = \frac{y\,dy + x\,dx - H\,dx}{z\,ds}$.

243. En combinant ces formules, on peut en augmenter le nombre; mais, faute d'attention, on pourroit ne pas arriver au résultat le plus simple. Si, par exemple, on demandoit la relation entre r, z & T; à cause de d tang. $T = \frac{dT}{\cos. T^2}$ & de cos. $T = \frac{dx}{ds}$, on auroit $d\frac{dy}{dx} = \frac{dT\,ds^2}{dx^2}$ & $r = \mp \frac{ds}{dT}$. On trouveroit aussi

$z\,dz\,(= y\,dy + x\,dx - H\,dx) = \mp r\,dT\,(y \text{ fin. } T - \cos. T \sqrt{z^2 - y^2})$,

d'où l'on tireroit $y = \mp \frac{z\,dz}{r\,dT}$ fin. $T \pm \frac{z \cos. T}{r\,dT} \sqrt{r^2\,dT^2 - dz^2}$.

Après avoir différentié cette équation, on y mettra pour dy sa valeur ds fin. $T = \mp r\,dT$ fin. T, & on aura (A)........ $(r\,dT - d \cdot \frac{z\,dz}{r\,dT} - \frac{z}{r} \sqrt{r^2\,dT^2 - dz^2})$ fin. $T = \left(\frac{z\,dz}{r} - d \cdot \frac{z\sqrt{r^2\,dT^2 - dz^2}}{r\,dT}\right)$ cos. T, formule très-compliquée.

Nommons h la perpendiculaire sur la tangente, & n l'angle que cette tangente fait avec le rayon vecteur; à cause de $z\,dz = y\,dy - (H - x)\,dx$, tang. $n = \frac{y\,dx - x\,dy + H\,dy}{z\,dz}$, on a $d\zeta = \frac{y\,dx - x\,dy + H\,dy}{z^2} = \frac{dz \text{ tang. } n}{z}$. Mais $h = z$ fin. n, $dh = (dz$ tang. $n + z\,dn)$ cos. $n = (d\zeta + dn)\,z$ cos. $n = -\,dT\sqrt{z^2 - h^2}$, puisque z cos. $n = \sqrt{z^2 - h^2}$. De plus $MO = OT - MT = \frac{(H - x)\,dx - y\,dy}{ds} = \frac{-z\,dz}{ds}$; on a aussi $MO = \sqrt{z^2 - h^2}$; d'où l'on tire $-\frac{z\,dz}{ds} = \sqrt{z^2 - h^2}$, & $h = \frac{z\sqrt{ds^2 - dz^2}}{ds}$. Ainsi $ds - h\,dT = \frac{-z\,dz + h\,dh}{\sqrt{z^2 - h^2}} = -\,d\sqrt{z^2 - h^2} = d\,\frac{z\,dz}{ds}$; d'où l'on tire, à cause de $ds = \mp r\,dT$, (B).... $r\,dT - d \cdot \frac{z\,dz}{r\,dT} - \frac{z}{r}\sqrt{r^2 dT^2 - dz^2} = 0$.

En comparant cette dernière équation à l'équation A, on aura aussi

(C).... $\frac{z\,dz}{r} - d \cdot \frac{z\sqrt{r^2\,dT^2 - dz^2}}{r\,dT} = 0$, que nous démontrerons directement de la manière suivante.

Nous avons trouvé $dh = -\,dT\sqrt{z^2 - h^2} = \frac{z\,dz\,dT}{ds} = \mp \frac{z\,dz}{r}$: or, des équations $dh = \mp \frac{z\,dz}{r}$, $ds = \mp r\,dT$, $h\,ds = z\sqrt{ds^2 - dz^2}$, on tire

facilement $\mp \frac{z\,dz}{r} = d \cdot \frac{z\sqrt{r^2\,dT^2 - dz^2}}{\mp r\,dT}$; donc, &c. D'ailleurs il eſt facile de s'aſſurer que les équations B & C ſont identiquement la même choſe.

En effet, ſi nous ſuppoſons $\frac{z\,dz}{r} = dq$, nous aurons $q = \frac{z\sqrt{r^2\,dT^2 - dz^2}}{r\,dT}$, d'où nous tirerons $r\,dT = \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 - q^2}}$. En ſubſtituant cette valeur dans la première, nous la changerons en celle-ci $\frac{z\,dz - \frac{q}{r}\,z\,dz}{\sqrt{z^2 - q^2}} - d\sqrt{z^2 - q^2} = 0$, qui eſt évidemment identique. Ce ſeul exemple ſuffit pour faire voir comment il faudra s'y prendre pour déduire les unes des autres les propriétés communes à toutes les courbes. Ces propriétés communes ſont compriſes dans des équations entre trois co-ordonnées, dont on combinera chacune avec une équation de la courbe propoſée pour en tirer les propriétés qui lui conviennent.

(224). Lorſqu'on aura l'équation d'une courbe entre deux co-ordonnées y & x, tout ſe réduira à en tirer le rapport entre les différentielles de ces co-ordonnées. Si ce rapport ſe préſente ſous la forme de $\frac{0}{0}$, on différentiera une ſeconde fois en regardant dy & dx comme conſtans, & le rapport demandé ſera renfermé dans une équation du ſecond degré; ſi cette ſeconde différentiation ne ſuffit pas, on différentiera une troiſième fois, une quatrième fois & toujours ainſi, juſqu'à ce que l'on ſoit parvenu à une équation qui puiſſe donner le rapport demandé. L'expoſant du degré de cette équation ſera égal au nombre de fois que l'on aura différentié (nº. 166).

Nous prendrons pour exemple la courbe qui a pour équation $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$, à laquelle on demande de mener une tangente au point où $x = 0$ & $y = 0$. Une première différentiation, donnant $4y^3dy - 2axy\,dy - ay^2\,dx + 3bx^2\,dx = 0$, ne ſuffit pas. Je paſſe à une ſeconde, en regardant dy & dx comme conſtans; celle-ci donne $6y^2dy^2 - ax\,dy^2 - 2ay\,dx\,dy + 3bx\,dx^2 = 0$, qui ne ſuffit pas davantage; il eſt donc néceſſaire de paſſer à une troiſième, de laquelle on tire $b\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 - a\frac{dx}{dy} = 0$. Les trois racines $\frac{dx}{dy} = 0$, $\frac{dx}{dy} = +\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{dx}{dy} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ de cette équation indiquent trois branches de la courbe qui paſſent par le point où $x = 0$ & $y = 0$. Ces branches s'y coupent de manière que l'une d'elles à ſa tangente au même point parallèle aux ordonnées (nº. 139).

On a une fonction de y & x qui devient $\frac{0}{0}$ dans certains cas particuliers, & l'on demande quelle eſt alors la valeur de cette fonction? On peut toujours regarder une fonction quelconque de deux variables, comme exprimant un rapport entre les différentielles de ces variables; ainſi ce problême ſe réſout comme le

le précédent, ce dont nous avons donné plusieurs exemples dans le n°. 167. Nous allons faire usage de cette même méthode pour résoudre en fractions simples toute fraction rationnelle proposée.

(245). Soit, comme dans le n°. 85 & les suivans, toute fraction rationnelle représentée par $\frac{P}{Q}$. Puisque (n°. 87) $S = \frac{Q}{m + nx}$, on aura A égal à ce que devient $\frac{P(m+nx)}{Q}$, lorsqu'on fait $m + nx = 0$. Mais dans cette hypothèse, le numérateur $P(m+nx)$, & le dénominateur Q, qui a pour facteur $m+nx$, sont zéro l'un & l'autre; j'ai donc recours à la méthode précédente, & je trouve que A est égal à ce que devient $\frac{(m+nx)dP + nPdx}{dQ}$, ou, à cause de $m + nx = 0$, à ce que devient $\frac{nPdx}{dQ}$, lorsqu'on fait $x = \frac{-m}{n}$. Cette méthode ne donneroit rien si $\frac{dQ}{dx}$ renfermoit encore le facteur $m + nx$.

En prenant pour exemple $\frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}{x(1-x)^2(1+x^3)}$, on a $n = 1$, $n' = 1$, & $\frac{Pdx}{dQ} = \frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}{(1-x)^2(1+x^3) - 2x(1-x)(1+x^3) + 3x^3(1-x)^2}$; je fais $x = 0$, & il me vient $A = 1$; je fais ensuite $x = -1$, & il me vient $B = \frac{1}{6}$.

Nous avons vu (n°. 88) que $P - S[A' + B'.(p+qx) + \ldots + H'.(p+qx)^{\mu-1}]$ doit être exactement divisible par $(p+qx)^{\mu}$. Or comme $p+qx$ n'est point un des facteurs de S, nécessairement $\frac{P}{S} - A' - B'.(p+qx) - \ldots$ $\ldots - H'.(p+qx)^{\mu-1}$ sera exactement divisible par $(p+qx)^{\mu}$. Donc cette même quantité, & ses différentielles successives, jusqu'à celle de l'ordre $\mu - 1$ inclusivement, seront nulles dans l'hypothèse de $p + qx = 0$. Je nomme K ce que devient $\frac{P}{S}$, lorsqu'on fait $x = \frac{-p}{q}$; K' ce que devient $\frac{1}{dx} d\left(\frac{P}{S}\right)$, K'' ce que devient $\frac{1}{dx^2} d^2\left(\frac{P}{S}\right)$, &c. dans la même hypothèse. On aura cette suite d'équations $K - A' = 0$, $K' - qB' = 0$, $K'' - 2q^2C' = 0$, $K''' - 2.3q^3D' = 0$, &c.; d'où l'on tire $A' = K$, $B' = \frac{K'}{q}$, $C' = \frac{K''}{2q^2}$, $D' = \frac{K'''}{2 \cdot 3 \cdot q^3}$, &c.

Dans l'exemple $\frac{P}{S} = \frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}{x(1+x^3)}$, & $q = -1$;

de plus, $\frac{1}{dx} d\left(\frac{P}{S}\right) = \frac{-1 + 2x^2 + 4x^3 - \ldots x^4 \ldots - 4x^6}{x^2(1+x^3)^2}$; faisant donc $x = 1$, il vient $K' = \frac{-5}{2}$, & $B' = \frac{1}{2}$.

Je passe à la fraction trinome $\frac{E + Fx}{r^2 + 2rtx \cos. \zeta + t^2 x^2}$, dont il s'agit de déterminer les co-efficiens (n°. 89). Puisque $S = \frac{Q}{r^2 + 2rtx \cos. \zeta + t^2 x^2}$, & que la supposition de $r^2 + 2rtx \cos. \zeta + t^2 x^2 = 0$ rend nuls le numérateur & le dénominateur de cette fraction; il est clair qu'on trouvera S dans cette hypothèse, en mettant $-\frac{r}{t}(\cos. \zeta \pm \sqrt{-1} \sin. \zeta)$ pour x dans la formule $\frac{dQ}{2(rt \cos. \zeta + t^2 x)dx}$. Je nomme $K \pm K'\sqrt{-1}$, ce que devient $\frac{dQ}{dx}$ par cette substitution, alors S sera égal à $\frac{K \pm K'\sqrt{-1}}{\mp 2rt\sqrt{-1} \sin. \zeta}$. Mais (n°. 89) nous avons trouvé pour S dans la même hypothèse $\Sigma \pm \sigma\sqrt{-1}$; on aura donc les deux équations,

$$-2rt\sqrt{-1} \sin. \zeta(\Sigma + \sigma\sqrt{-1}) = K + K'\sqrt{-1};$$
$$2rt\sqrt{-1} \sin. \zeta(\Sigma - \sigma\sqrt{-1}) = K - K'\sqrt{-1};$$

d'où l'on tire aisément $\Sigma = \frac{-K'}{2rt \sin. \zeta}$, $\sigma = \frac{K}{2rt \sin. \zeta}$; & mettant ces valeurs dans ce que nous avons trouvé pour E & F, il vient

$$E = \frac{2rt \sin. \zeta(K\pi - K'\Pi) + 2rt \cos. \zeta(K\Pi + K'\pi)}{K^2 + K'^2}, \quad F = \frac{2t^2(K\Pi + K'\pi)}{K^2 + K'^2}.$$

Lorsque c'est la fraction $\frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}{x(1-x)^2(1+x^3)}$ qui est proposée, on a $\frac{dQ}{dx} = 1 - 4x + 3x^2 + 4x^3 - 10x^4 + 6x^5$. En faisant les substitutions nécessaires, on trouve $K = \frac{1}{2}$, $K' = \frac{3}{2}\sqrt{3}$; puis $E = -\frac{11}{3}$, $F = \frac{4}{3}$.

(246). De cette manière il n'est pas nécessaire de connoître S, ce qui ne peut se faire souvent que par une opération longue & pénible. Par exemple, il sera bien plus court de se servir de ces dernières formules pour trouver les fractions partielles trinomes de la fraction rationnelle $\frac{x^m}{x^n(a^\lambda \pm x^\lambda)}$. On a $P = x^m$, $Q = a^\lambda x^n \pm x^{\lambda+n}$, $\frac{dQ}{dx} = na^\lambda x^{n-1} \pm (\lambda + n) \cdot x^{\lambda+n-1}$.

Soit $\frac{E + Fx}{a^2 - 2ax \cos. \frac{ic}{\lambda} + x^2}$ une de ces fractions trinomes;

l'équation $a^2 - 2ax \cos. \frac{ic}{\lambda} + x^2 = 0$, donne $x = a\left(\cos. \frac{ic}{\lambda} \pm \sqrt{-1} \sin. \frac{ic}{\lambda}\right)$; faisant donc les substitutions convenables, il vient $\Pi = a^m \cos. \frac{mic}{\lambda}$, $\pi = a^m \sin. \frac{mic}{\lambda}$, $K = a^{\lambda + n - 1}\left(n \cos. \frac{(n-1) \cdot ic}{\lambda} \pm (\lambda + n) . \cos. \frac{(\lambda + n - 1) \cdot ic}{\lambda}\right)$, $K' = a^{\lambda + n - 1}\left[n \sin. \frac{(n-1) \cdot ic}{\lambda} \pm (\lambda + n) . \sin. \frac{(\lambda + n - 1) \cdot ic}{\lambda}\right)$, &c.

On propose de résoudre en fractions simples la fraction rationnelle $\frac{1}{a^4 + x^4}$?

On a $m = 0$, $n = 0$, $\lambda = 4$, $\Pi = 1$, $\pi = 0$. Les facteurs de $a^4 + x^4$ sont $a^2 - 2ax \cos. \frac{c}{4} + x^2 = a^2 - ax\sqrt{2} + x^2$, & $a^2 - 2ax \cos. \frac{3c}{4} + x^2 = a^2 + ax\sqrt{2} + x^2$; donc lorsque $i = 1$, $K = 4a^3 \cos. \frac{3c}{4} = -2a^3\sqrt{2}$; $K' = 4a^3 \sin. \frac{3c}{4} = 2a^3\sqrt{2}$, $E = \frac{1}{2a^2}$, $F = \frac{-1}{2a^3\sqrt{2}}$; lorsque $i = 3$; $K = 4a^3 \cos. \frac{9c}{4} = 2a^3\sqrt{2}$, $K' = 4a^3 \sin. \frac{9c}{4} = 2a^3\sqrt{2}$, $E = \frac{1}{2a^2}$; $F = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}$. Ainsi $\frac{1}{a^4 + x^4} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\left(\frac{a\sqrt{2} - x}{a^2 - ax\sqrt{2} + x^2} + \frac{a\sqrt{2} + x}{a^2 + ax\sqrt{2} + x^2}\right)$:

(247). Enfin pour déterminer E', F', &c. (n°. 90) je remarque que S ne doit pas renfermer le facteur $s^2 + 2sux \cos. \omega + u^2x^2$, & que par conséquent $\frac{P}{S} - E' - F'x - (G' + H'x)(s^2 + 2sux \cos. \omega + u^2x^2) - \ldots - (M' + N'x)(s^2 + 2sux \cos. \omega + u^2x^2)^{\nu - 1}$ doit être exactement divisible par $(s^2 + 2sux \cos. \omega + u^2x^2)^\nu$. Donc cette même quantité, & ses différentielles successives, jusqu'à celles de l'ordre $\nu - 1$ inclusivement, seront nulles dans l'hypothèse de $s^2 + 2sux \cos. \omega + u^2x^2 = 0$. Je nomme $K \pm K'\sqrt{-1}$, ce que devient $\frac{P}{S}$, lorsqu'on fait $x = \frac{-s}{u}(\cos. \omega \pm \sqrt{-1} \sin. \omega)$; $K'' + K'''\sqrt{-1}$ ce que devient $\frac{1}{dx} d\left(\frac{P}{S}\right)$, &c. dans la même hypothèse. On aura, pour déterminer E', F', &c. cette suite d'équations,

$$K \pm K'\sqrt{-1} - E' + \frac{F's}{u}(\cos. \omega \pm \sqrt{-1} \sin. \omega) = 0,$$

$$K'' \pm K'''\sqrt{-1} - F' \pm 2su\sqrt{-1} \sin. \omega \left[G' - \frac{H's}{u} \cdot (\cos. \omega \pm \sqrt{-1} \sin. \omega)\right] = 0, \text{ \&c.}$$

Je prendrai pour exemple la fraction rationnelle $\frac{1}{(a^4+x^4)^2}$. Les facteurs de a^4+x^4 sont $a^2+ax\sqrt{2}+x^2$ & $a^2-ax\sqrt{2}+x^2$. Or, 1°. soit $S=(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)^2$; à cause de $\frac{P}{S}=\frac{1}{(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)^2}$ & de $\frac{1}{dx}d\left(\frac{P}{S}\right)=\frac{-2(a\sqrt{2}+2x)}{(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)^3}$, on a, en faisant $x=\frac{a}{\sqrt{2}}(1\pm\sqrt{-1})$; $K\pm K'\sqrt{-1}=\frac{\mp\sqrt{-1}}{8a^4}$ & $K''\pm K'''\sqrt{-1}=\frac{2\pm\sqrt{-1}}{4a^3\sqrt{2}(1\mp\sqrt{-1})}=\frac{1}{8a^3\sqrt{2}}\pm\frac{3\sqrt{-1}}{8a^3\sqrt{2}}$, & par conséquent $K=0$, $K'=\frac{-1}{8a^4}$, $K''=\frac{1}{8a^3\sqrt{2}}$, $K'''=\frac{3}{8a^3\sqrt{2}}$. On a donc les quatre équations

$$\frac{-\sqrt{-1}}{8a^4}-E'-\frac{aF'}{\sqrt{2}}-\frac{aF'\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=0,$$
$$\frac{\sqrt{-1}}{8a^4}-E'-\frac{aF'}{\sqrt{2}}+\frac{aF'\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=0,$$
$$\frac{3}{8a^3\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{-1}}{8a^3\sqrt{2}}-aG'\sqrt{2}\sqrt{-1}-a^2H'\sqrt{-1}+a^2H'=0;$$
$$\frac{3}{8a^3\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{-1}}{8a^3\sqrt{2}}+aG'\sqrt{2}\sqrt{-1}-a^2H'\sqrt{-1}+a^2H'=0.$$

Les deux premières donnent $E'=\frac{1}{8a^4}$, $F'=\frac{-1}{4a^3\sqrt{2}}$; on tire des deux autres $G'=\frac{3}{8a^6}$, $H'=\frac{-3}{8a^3\sqrt{2}}$. 2°. $S=(a^2-ax\sqrt{2}+x^2)^2$; mettant $\frac{-a}{\sqrt{2}}(1\mp\sqrt{-1})$ pour x dans $\frac{P}{S}=\frac{1}{(a^2-ax\sqrt{2}+x^2)^2}$, & dans $\frac{1}{dx}d\left(\frac{P}{S}\right)=\frac{-2(-a\sqrt{2}+2x)}{(a^2-ax\sqrt{2}+x^2)^3}$, on trouve $K\pm K'\sqrt{-1}=\frac{\pm\sqrt{-1}}{8a^4}$, $K''\pm K'''\sqrt{-1}=\frac{2\mp\sqrt{-1}}{-4a^3\sqrt{2}(1\pm\sqrt{-1})}=\frac{-1}{8a^3\sqrt{2}}\pm\frac{3\sqrt{-1}}{8a^3\sqrt{2}}$, donc $K=0$, $K'=\frac{1}{8a^4}$, $K''=\frac{-1}{8a^3\sqrt{2}}$, $K'''=\frac{3}{8a^3\sqrt{2}}$. En substituant, il vient quatre équations,

$$\frac{\sqrt{-1}}{8a^4}-E'+\frac{aF'}{\sqrt{2}}-\frac{aF'\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=0,$$
$$\frac{-\sqrt{-1}}{8a^4}-E'+\frac{aF'}{\sqrt{2}}+\frac{aF'\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=0,$$
$$\frac{-3}{8a^3\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{-1}}{8a^3\sqrt{2}}-aG'\sqrt{2}\sqrt{-1}+a^2H'\sqrt{-1}+a^2H'=0;$$
$$\frac{-3}{8a^3\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{-1}}{8a^3\sqrt{2}}+aG'\sqrt{2}\sqrt{-1}-a^2H'\sqrt{-1}+a^2H'=0.$$

Ces

Ces équations donnent $E' = \frac{1}{8a^4}$, $F' = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}}$, $G' = \frac{3}{8a^5}$, $H' = \frac{3}{8a^7\sqrt{2}}$.

On trouve donc que la fraction rationnelle $\frac{1}{(a^4+x^4)^2} = \frac{a-x\sqrt{2}}{8a^3(a^2-ax\sqrt{2}+x^2)^2} +$
$\frac{3\cdot(2a-x\sqrt{2})}{16a^7(a^2-ax\sqrt{2}+x^2)} + \frac{a+x\sqrt{2}}{8a^3(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)^2} + \frac{3\cdot(2a+x\sqrt{2})}{16a^7(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)}$.

Ce petit nombre de problêmes suffit pour faire voir qu'on peut se servir avantageusement du calcul différentiel pour simplifier les calculs algébriques.

(248). Lorsqu'une courbe est toute dans un même plan, comme nous l'avons supposé au commencement de ce chapitre, il ne faut, pour en déterminer la nature que deux co-ordonnées; il n'en est pas de même des courbes décrites sur des surfaces courbes, & que Clairaut a nommé courbes à double courbure. Soit *Z* (*fig. LVIII*) un point quelconque d'une courbe à double courbure; de ce point *Z* j'abaisse une perpendiculaire *ZM* sur un plan fixe, que je suppose être celui de la planche, & dans lequel j'imagine un axe *AP* donné de position; je tire ensuite *MP* perpendiculaire à cet axe. La nature de la courbe à double courbure sera définie par la relation entre les trois co-ordonnées *AP* (x), *PM* (y), *MZ* (z). En abaissant sur le plan *CAP*, qui est celui de la planche, d'autres perpendiculaires comme *ZM*, je tracerai la courbe *DM* qui sera la projection de la courbe à double courbure. Or il est clair que si par les points *Z* & *M* on mène des tangentes aux deux courbes, ces tangentes doivent se rencontrer en un point *T*; & que, nommant *DM*, s, on doit avoir $dz : ds :: z : MT = \frac{z\,ds}{dz}$. Quant à la sous-normale *MK*, il est visible que le triangle *TZK* rectangle en *Z* donne

$TM : MZ :: MZ : ZK = \frac{z\,dz}{ds}$, &c.

J'élève perpendiculairement au plan *CAPM* un autre plan *CAB*; j'abaisse des perpendiculaires telles que *ZN* qui traceront sur ce plan une projection *EN* de la courbe à double courbure; j'abaisse aussi du point *N* une perpendiculaire *NQ* sur *AC*; *NQ* est égal à *ZM*, & *AQ* à *PM*. Si de quelque manière que ce soit on parvenoit à connoître la nature des deux courbes de projection *DM* & *EN*, on auroit deux équations, la première entre y & x, & l'autre entre y & z; avec ces deux équations on trouveroit les valeurs de y & z en x, & les valeurs *MT*, *MK*, &c. en fonction de la même variable. Soit la courbe *DM* une parabole qui a pour équation $y^2 = ax$, & la courbe *EN* un arc de cercle qui a pour équation $y^2 + z^2 = a^2$. On tire de la première

$dy = \frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}$, $ds = \frac{dx\sqrt{(4x+a)}}{2\sqrt{x}}$; & de l'autre $dz = \frac{-y\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, d'où
$dz = \frac{-a\,dx}{2\sqrt{(a^2-ax)}}$. Donc $MT = -\frac{a-x}{\sqrt{x}}\sqrt{(4x+a)}$, $MK = \frac{-a\sqrt{x}}{\sqrt{(4x+a)}}$, &c.

Mais il vaut beaucoup mieux considérer avec Euler les surfaces courbes elles-mêmes; c'est ce que nous nous proposons de faire le plus clairement qu'il nous

fera possible, sans cependant entrer dans des détails qui pourroient être très-intéressans, mais que la nature de cet ouvrage ne comporte pas.

(249). Il faut d'abord remarquer que Z (*fig. LIX*) étant un point d'une surface courbe, on peut supposer que l'ordonnée z est fonction de y & x, quel que soit d'ailleurs le rapport entre ces variables; ce que nous exprimerons ainsi, $dz = m\,dy + n\,dx$. Cela posé, si on coupe la surface courbe par un plan, il en résultera une section qui aura une certaine courbure; on demande de déterminer cette courbure pour une section quelconque? Je suppose qu'elle passe par le point Z, & que BE soit la commune section du plan secant & du plan GAC. Du point M j'abaisse MN perpendiculaire sur BE, & je tire ZN qui sera aussi perpendiculaire sur BE; je fais $AB = a$, l'angle $CBE = \epsilon$, & l'angle MNZ, qui est l'inclinaison du plan ZBE sur le plan GAC, $= \varpi$.

Les triangles rectangles BPO, MNO donnent $1 : \text{tang.}\,\epsilon :: x - a : PO = (x - a)\,\text{tang.}\,\epsilon$, donc $MO = y - (x - a)\,\text{tang.}\,\epsilon$; $\cos.\,\epsilon : x - a :: 1 : BO = \frac{x - a}{\cos.\,\epsilon}$; $1 : MO :: \cos.\,\epsilon : MN = y\cos.\,\epsilon - (x - a)\,\text{fin.}\,\epsilon :: \text{fin.}\,\epsilon : ON = y\,\text{fin.}\,\epsilon - (x - a)\,\text{fin.}\,\epsilon\,\text{tang.}\,\epsilon$, donc $BN = y\,\text{fin.}\,\epsilon + (x - a)\cos.\,\epsilon$. A cause du triangle rectangle ZMN, on a $\cos.\,\varpi : MN :: 1 : ZN = \frac{y\cos.\,\epsilon - (x - a)\,\text{fin.}\,\epsilon}{\cos.\,\varpi}$, $1 : \text{tang.}\,\varpi :: MN : MZ = [y\cos.\,\epsilon - (x - a)\,\text{fin.}\,\epsilon]\,\text{tang.}\,\varpi$. Nous avons fait $dz = m\,dy + n\,dx$; donc $m\,dy + n\,dx = (dy\cos.\,\epsilon - dx\,\text{fin.}\,\epsilon)\,\text{tang.}\,\varpi$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{fin.}\,\epsilon\,\text{tang.}\,\varpi + n}{\cos.\,\epsilon\,\text{tang.}\,\varpi - m}$.

Si nous nommons t & u les co-ordonnées BN & NZ de la section, & ρ son rayon de courbure, nous aurons $\rho = \frac{dt\left[1 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-d\left(\frac{du}{dt}\right)}$, en supposant la concavité tournée vers BE. Mais $t = y\,\text{fin.}\,\epsilon + (x - a)\cos.\,\epsilon$, $u = \frac{y\cos.\,\epsilon - (x - a)\,\text{fin.}\,\epsilon}{\cos.\,\varpi}$, $dt = dy\,\text{fin.}\,\epsilon + dx\cos.\,\epsilon$, $du = \frac{dy\cos.\,\epsilon - dx\,\text{fin.}\,\epsilon}{\cos.\,\varpi}$; donc $\frac{du}{dt} = \frac{\frac{dy}{dx}\cos.\,\epsilon - \text{fin.}\,\epsilon}{\cos.\,\varpi\left(\frac{dy}{dx}\,\text{fin.}\,\epsilon + \cos.\,\epsilon\right)}$; & mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur, $\frac{du}{dt} = \frac{n\cos.\,\epsilon + m\,\text{fin.}\,\epsilon}{\text{fin.}\,\varpi + \cos.\,\varpi \cdot (n\,\text{fin.}\,\epsilon - m\cos.\,\epsilon)}$. Donc

$$\frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dt} = \frac{\text{fin.}\,\varpi\,(dm\,\text{fin.}\,\epsilon + dn\cos.\,\epsilon) + \cos.\,\varpi\,(n\,dm - m\,dn)}{dt\,[\text{fin.}\,\varpi + \cos.\,\varpi \cdot (n\,\text{fin.}\,\epsilon - m\cos.\,\epsilon)]^2}.$$

Je suppose $dm = p\,dy + q\,dx$ & $dn = q\,dy + r\,dx$; on doit se rappeller que $m\,dy + n\,dx$ étant une différentielle exacte, le co-efficient de dx dans la

différentielle de m eſt égal au co-efficient de dy dans la différentielle de n. On aura $\frac{dm}{dt} = \frac{p\frac{dy}{dx} + q}{\frac{dy}{dx}\,\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{cos.}\,\varepsilon} = \frac{p\,(\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u + n) + q\,(\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u - m)}{\text{tang.}\,u + n\,\text{ſin.}\,\varepsilon - m\,\text{cos.}\,\varepsilon}$,

$$\frac{dn}{dt} = \frac{q\,(\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u + n) + r\,(\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u - m)}{\text{tang.}\,u + n\,\text{ſin.}\,\varepsilon - m\,\text{cos.}\,\varepsilon}; \;\&\; \frac{d\left(\frac{du}{dt}\right)}{dt} =$$

$$\frac{[\text{ſin.}\,u\;\text{ſin.}\,\varepsilon + n\,\text{cos.}\,u]\,[(\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u + n)\cdot p + (\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u - m)\cdot q] + [\text{ſin.}\,u\;\text{cos.}\,\varepsilon - m\,\text{cos.}\,u]\,[(\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u + n)\cdot q + (\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u - m)\cdot r]}{\text{cos.}\,u^2\,(\text{tang.}\,u + n\,\text{ſin.}\,\varepsilon - m\,\text{cos.}\,\varepsilon)^3}.$$

$$\text{Donc}\;\rho = \frac{-[\text{cos.}\,u^2\cdot(\text{tang.}\,u + n\,\text{ſin.}\,\varepsilon - m\,\text{cos.}\,\varepsilon)^2 + (n\,\text{cos.}\,\varepsilon + m\,\text{ſin.}\,\varepsilon)^2]^{\frac{3}{2}} : \text{cos.}\,u}{[\text{ſin.}\,u\,\text{ſin.}\,\varepsilon + n\,\text{cos.}\,u]\,[(\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u + n)\cdot p + (\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u - m)\cdot q] + [\text{ſin.}\,u\,\text{cos.}\,\varepsilon - m\,\text{cos.}\,u]\,[(\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u + n)\cdot q + (\text{cos.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,u - m)\cdot r]};$$

c'eſt le rayon de courbure pour une ſection quelconque.

(250). J'imagine que la ſurface eſt coupée par deux plans perpendiculaires (*fig. LX*) au plan GAC, & qui paſſent par le point Z; que la commune ſection MO de l'un des plans avec le plan GAC eſt parallèle à AP, & que la commune ſection de l'autre plan avec le plan GAC eſt la ligne MP. Ces deux ſections MZO, MZT ſont très-remarquables. Si on fait varier MZ (z), ſans que cette ordonnée ceſſe d'être dans le plan de la ſection ZMO; comme OM eſt parallèle à AP, y ne variera pas, & la différentielle de z, qui eſt fonction de y & de x, ne ſera priſe de cette manière que par rapport à x ſeul; c'eſt-à-dire, que la différentielle de z, conſidérée comme ordonnée de la ſection ZMO, eſt égale à ndx. Mais ſi on fait varier z ſans qu'il ceſſe d'être dans le plan de la ſection ZMT; alors x ne variera point, & la différentielle ne ſera priſe de cette manière que par rapport à y ſeul; c'eſt-à-dire, que la différentielle de z, conſidérée comme ordonnée de la ſection ZMT, eſt égale à mdy. Je mène aux courbures des deux ſections ZMO, ZMT les normales ZK, ZS; & il ſuit de ce qui précède, que la ſous-normale $MK \left(= \frac{z\,dz}{dx}\right)$ eſt égale à nz; que la ſous-normale $MS \left(= \frac{z\,dz}{dy}\right)$ eſt égale à $-mz$, je prends le ſigne $-$, parce que les y ſont poſitifs de P vers M, & que cette ſous-normale eſt ſuppoſée aller de M vers P. Dans le plan GAC, je mène les droites KV & SV parallèles aux droites MK & MS; ſi par le point V où ces deux droites ſe rencontrent, on tire ZV, cette droite ſera normale aux courbures des deux ſections, & par conſéquent normale à la ſurface propoſée. Je joins les points M & V par la droite MV, & à cauſe du triangle MKV rectangle en K, j'ai $MV = z\sqrt{(m^2 + n^2)}$; le triangle ZMV rectangle en M donne $ZV = z\sqrt{(1 + m^2 + n^2)}$.

Dans tous ces calculs, nous n'avons pas ſuppoſé que les y & les x euſſent entr'eux aucune relation; c'eſt-à-dire, que nous n'avons pas ſuppoſé que les

courbes qui terminent les y dans le plan GAC fussent assujetties à la loi de continuité; on peut concevoir qu'elles ont été tracées librement, & sans aucune régularité. Mais il n'est pas encore temps de nous occuper de ces fonctions que les géomètres ont nommées irrégulières & discontinues; que Euler a le premier introduites dans l'analyse, & sans lesquelles on n'auroit pas pu résoudre un très-grand nombre de questions importantes.

(251). Toutes les sections perpendiculaires à la surface au point Z, auront pour normale la droite ZV. Si la section, dont nous avons trouvé plus haut le rayon de courbure, est une des sections perpendiculaires à la surface au point Z; la commune section BE de son plan avec le plan GAC passera par le point V; & tirant Su & Ss perpendiculaires à MN & à BV, on aura les triangles rectangles SsV, SuM qui donneront $1 : SV\ (= MK = nz) ::$ sin. $\beta : Ss = Nu = nz$ sin. β, $1 : MS\ (= -mz) ::$ cos. $\beta : Mu = -mz$ cos. β. Donc $MN = nz$ sin. $\beta - mz$ cos. β, & tang. $\upsilon \left(= \frac{z}{MN}\right) = 1 : (n \text{ sin. } \beta - m \text{ cos. } \beta)$;

donc sin. $\upsilon = 1 : \sqrt{[1 + (n \text{ sin. } \beta - m \text{ cos. } \beta)^2]}$, cos. $\upsilon = (n \text{ sin. } b - m \text{ cos. } \beta) : \sqrt{[1 + (n \text{ sin. } \beta - m \text{ cos. } \beta)^2]}$. En substituant ces valeurs dans l'expression du rayon de courbure ci-dessus mentionnée, on aura

$$\rho = \frac{-[1 + (n \text{ sin. } \beta - m \text{ cos. } \beta)^2](1 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{array}{l}[(1+n^2) \text{ sin. } \beta - mn \text{ cos. } \beta]([(1+n^2) \text{ sin. } \beta - mn \text{ cos. } \beta] \cdot p + [(1+m^2) \text{ cos. } \beta - mn \text{ sin. } \beta] \cdot q) \\ + [(1+m^2) \cdot \text{cos. } \beta - mn \text{ sin. } \beta]([(1+n^2) \cdot \text{sin. } \beta - mn \text{ cos. } \beta] \cdot q + [(1+m^2) \text{ cos. } \beta - mn \text{ sin. } \beta]\, r)\end{array}},$$

c'est le rayon de courbure de toute section perpendiculaire à la surface au point Z.

Pour trouver le rayon de courbure de la section MVZ, on supposera que BE passe par le point M, ou que $MN = 0$. Mais $MN = nz$ sin. $\beta - mz$ cos. β, donc $\frac{\text{sin. } \beta}{\text{cos. } \beta} = \frac{m}{n}$; d'où l'on tire

sin. $\beta = \frac{m}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$, cos. $\beta = \frac{n}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$. En substituant ces valeurs dans la formule précédente, il vient $\rho = \frac{-(m^2 + n^2)(1 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}{m^2 p + 2mnq + n^2 r}$.

Si on fait $NV = 0$, ce qui donne MV perpendiculaire à la commune section BE, on aura la section perpendiculaire à la surface au point Z, qui fait avec la section MVZ un angle droit. Il faut chercher l'expression de NV. Les triangles rectangles SsV, SuM donnent $SV = nz$ cos. β, $Su = -mz$ sin. β; & par conséquent $NV = nz$ cos. $\beta + mz$ sin. β. On tire de l'équation

n cos. $\beta + m$ sin. $\beta = 0$, sin. $\beta = \frac{n}{\sqrt{[m^2 + n^2]}}$, cos. $\beta = \frac{-m}{\sqrt{[m^2 + n^2]}}$;

& substituant ces valeurs dans la même formule générale, on trouvera pour le rayon de courbure de la présente section $\rho = \frac{-(m^2 + n^2)\sqrt{(1 + m^2 + n^2)}}{n^2 p - 2mnq + m^2 r}$.

(252).

(252). Nous regarderons la section ZMV comme la principale de toutes les sections perpendiculaires à la surface au point Z; & nous demanderons de déterminer le rayon de courbure d'une des autres, en supposant connu l'angle qu'elle fait avec celle-là. Sur le plan ZMV (*fig. LXI*) j'élève une perpendiculaire MO, & du point M j'abaisse sur ZV une perpendiculaire ML; je tire OL qui sera aussi perpendiculaire sur ZV, & l'angle MLO, que je nomme μ, est celui que le plan BVZ de la section, dont nous cherchons le rayon de courbure, fait avec le plan de la section principale. Je fais ponr abréger $\sqrt{(m^2+n^2)} = t$, $\sqrt{(1+m^2+n^2)} = u$; cela posé, les triangles rectangles ZMV, MLV donnent $\text{sin.}\, MVZ = \frac{1}{u}$, & $ML = \frac{t\zeta}{u}$. Ainsi dans le triangle rectangle LMO, on a $MO = \frac{t\zeta}{u}\,\text{tang.}\,\mu$, d'où $VO = \frac{t\zeta}{u}\sqrt{(u^2+\text{tang.}\,\mu^2)}$. Les triangles rectangles VSM, VMO donnent $\text{sin.}\, SVM = \frac{-m}{t}$, $\text{cos.}\, SVM = \frac{n}{t}$, $\text{sin.}\, OVM = \frac{\text{tang.}\,\mu}{\sqrt{(u^2+\text{tang.}\,\mu^2)}}$; $\text{cos.}\, OVM = \frac{u}{\sqrt{(u^2+\text{tang.}\,\mu^2)}}$. Mais $OVS\ (=\zeta) = OVM - SVM$; donc $\text{sin.}\,\zeta = \frac{mu+n\,\text{tang.}\,\mu}{t\sqrt{(u^2+\text{tang.}\,\mu^2)}}$, $\text{cos.}\,\zeta = \frac{nu-m\,\text{tang.}\,\mu}{t\sqrt{(u^2+\text{tang.}\,\mu^2)}}$.
Il faut substituer ces valeurs dans la formule donnée plus haut pour trouver le rayon de courbure de toute section perpendiculaire à la surface, & il vient pour le rayon de courbure de celle de ces sections qui fait avec la principale, un angle μ, $\rho = -t^2u^3(1+\text{tang.}\,\mu^2) : [(m+nu\,\text{tang.}\,\mu)^2 p + 2(m+nu\,\text{tang.}\,\mu)(n - mu\,\text{tang.}\,\mu)\,q + (n - mu\,\text{tang.}\,\mu)^2 r]$, ou
$\rho = -t^2u^3 : [(m\,\text{cos.}\,\mu + nu\,\text{sin.}\,\mu)^2 p + 2(m\,\text{cos.}\,\mu + nu\,\text{sin.}\,\mu)(n\,\text{cos.}\,\mu - nu\,\text{sin.}\,\mu)\,q + (n\,\text{cos.}\,\mu - mu\,\text{sin.}\,\mu)^2 r]$.
Je transformerai cette formule en mettant pour $\text{sin.}\,\mu^2$, $\text{cos.}\,\mu^2$, $\text{sin.}\,\mu\,.\,\text{cos.}\,\mu$ leurs valeurs $\frac{1-\text{cos.}\,2\mu}{2}$, $\frac{1+\text{cos.}\,2\mu}{2}$, $\frac{\text{sin.}\,2\mu}{2}$; & après avoir fait pour abréger

$$[(m^2+n^2u^2).p + 2mn.(1-u^2).q + (n^2+m^2u^2).r] : -2t^2u^3 = P,$$
$$[(m^2-n^2u^2).p + 2mn.(1+u^2).q + (n^2-m^2u^2).r] : -2t^2u^3 = Q,$$
$$[mn(p-r) + (n^2-m^2).q] : -t^2u^2 = R,$$

j'aurai $\frac{1}{\rho} = P + Q\,\text{cos.}\,2\mu + R\,\text{sin.}\,2\mu$.

(253). La forme que nous venons de donner au rayon de courbure, nous fera faire quelques réflexions qui pourront paroître intéressantes. Premiérement, soient f, f', f'' les rayons de courbure de trois sections perpendiculaires à la surface qui font avec la principale les angles μ, μ', μ''; on aura les trois équations $\frac{1}{\rho} = P + Q\,\text{cos.}\,2\mu + R\,\text{sin.}\,2\mu$, $\frac{1}{f'} = P + Q\,\text{cos.}\,2\mu' + R\,\text{sin.}\,2\mu'$; $\frac{1}{f''} = P + Q\,\text{cos.}\,2\mu'' + R\,\text{sin.}\,2\mu''$ au moyen desquelles on pourra toujours

connoître P, Q & R; & si on demandoit ensuite le rayon de courbure d'une autre section perpendiculaire à la surface qui fit avec la principale un angle z, on le trouveroit en mettant pour P, Q & R leurs valeurs dans la formule $\frac{1}{\rho} = P + Q \cos. 2z + R \sin. 2z$. D'où l'on peut conclure qu'étant donnés, les rayons de courbure de trois des sections perpendiculaires à un point de la surface, on pourra toujours trouver les rayons de courbure de toutes les autres. Secondement, il est clair que le *plus grand* & *le moindre* de ces rayons de courbure se trouvent en égalant à zéro la différentielle de $P + Q \cos. 2\mu + R \sin. 2\mu$ prise en faisant varier l'angle μ; d'où l'on tire l'équation $-Q \sin. 2\mu + R \cos. 2\mu = 0$, & ensuite tang. $2\mu = \frac{R}{Q}$. La tangente d'un angle est encore celle de cet angle augmenté de la demi-circonférence; si donc nous nommons g l'angle qui a pour tangente $\frac{R}{Q}$, l'équation du *maximum* ou *minimum* donnera $\mu = \frac{g}{2}$, & $\mu = \frac{g}{2} + 90°$. D'où l'on voit que les deux sections dont l'une a la plus grande & l'autre la plus petite courbure sont nécessairement perpendiculaires entr'elles. Troisiémement, si le rayon de courbure $\frac{1}{P+Q}$ de la section que nous avons nommée la principale est *un plus grand* ou *un moindre*, le rayon de courbure de la section qui lui est inclinée de l'angle μ, aura pour expression $\frac{1}{P + Q \cos. 2\mu}$; autrement le rayon de courbure $\frac{1}{P-Q}$ de la section qui fait avec elle un angle de 90° ne seroit point *un moindre* ou *un plus grand*.

Nommons f & g les rayons de courbure de la section principale & de celle qui lui est perpendiculaire; on aura les deux équations $\frac{1}{f} = P + Q$ & $\frac{1}{g} = P - Q$, d'où l'on tire $P = \frac{g+f}{2fg}$, $Q = \frac{g-f}{2fg}$; & lorsque f & g sont l'un *un plus grand*, l'autre *un moindre*, pour le rayon de courbure de toute section perpendiculaire à la surface inclinée à la principale de l'angle μ, $\frac{2fg}{f+g-(f-g)\cos. 2\mu}$, formule qu'il nous sera bien aisé de construire; car ayant pris sur une droite $AB = f + g$ (*fig. LXII*) une partie $BF = f$, si sur l'axe AB on décrit une ellipse AMB qui ait un de ses foyers en F & le point C pour centre, & que l'on tire FM qui fasse avec AB l'angle $BFM = 2\mu$, on aura en prenant $BD = FM$, $CB : CF :: CP : CD$; & parce que $CP = CF + FM \cos. 2\mu$, on aura $\frac{f+g}{2} : \frac{g-f}{2} :: \frac{g-f}{2} + FM \cos. 2\mu : \frac{f+g}{2} - FM$, d'où l'on tire $FM = \frac{2fg}{f+g-(f-g)\cos. 2\mu}$.

(254). Aux courbures des deux sections MZO & MZT (*fig. LXI*), je

même les tangentes $Z\iota$ & $Z\theta$; & il est clair que le plan $\iota Z\theta$ doit toucher la surface au point Z. Les tangentes $Z\iota$ & $Z\theta$ font avec la ligne des x & celle des y des angles MiZ, $M\theta Z$, qui (n°. 168) ont pour tangentes, l'un $\frac{dz}{dx} = n$, l'autre $\frac{dz}{dy} = m$. Ces deux angles sont nuls, lorsque le plan $\iota Z\theta$ est parallèle au plan GAC; ainsi pour déterminer le point où le plan qui touche la surface est parallèle au plan GAC, on a les deux équations $n = 0$ & $m = 0$. Toutes les fois que la fonction z est un plus grand ou un moindre, ces deux équations ont lieu; mais il ne s'ensuit pas de ce que ces deux équations ont lieu, que la fonction soit un plus grand ou un moindre, comme il nous sera facile de le démontrer, après avoir mis le théorème du n°. 156 sous une forme plus générale.

Soit z une fonction d'un nombre quelconque de variables y, x, &c.; & désignons par $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, $\ddddot{z}$, &c. les différentielles successives de z, prises en ne faisant pas varier dy, dx, &c., & dans lesquelles on auroit substitué pour dy, dx, &c. & leurs puissances, les différences Δy, Δx, &c. & leurs puissances : on aura, en nommant Z ce que devient la fonction z lorsqu'au lieu de y, x, &c. on met $y \pm \Delta y$, $x \pm \Delta x$, &c. $Z = z \pm \dot{z} + \frac{\ddot{z}}{1\cdot 2} \pm \frac{\dddot{z}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\ddddot{z}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \pm$ &c. Mais pour abréger, ne supposons z fonction que de deux variables seulement, & servons-nous du signe de Fontaine (n°. 228), pour désigner les différences partielles de cette fonction, nous aurons

$$\dot{z} = \frac{dz}{dy}\Delta y + \frac{dz}{dx}\Delta x,$$

$$\ddot{z} = \frac{d^2 z}{dy^2}\Delta y^2 + 2\frac{d^2 z}{dy\,dx}\Delta y\,\Delta x + \frac{d^2 z}{dx^2}\Delta x^2,$$

$$\dddot{z} = \frac{d^3 z}{dy^3}\Delta y^3 + 3\frac{d^3 z}{dy^2\,dx}\Delta y^2\,\Delta x + 3\frac{d^3 z}{dy\,dx^2}\Delta y\,\Delta x^2 + \frac{d^3 z}{dx^3}\Delta x^3,$$

$$\ddddot{z} = \frac{d^4 z}{dy^4}\Delta y^4 + 4\frac{d^4 z}{dy^3\,dx}\Delta y^3\,\Delta x + 6\frac{d^4 z}{dy^2\,dx^2}\Delta y^2\,\Delta x^2 +$$

$$4\frac{d^4 z}{dy\,dx^3}\Delta y\,\Delta x^3 + \frac{d^4 z}{dy^4}\Delta x^4,$$

&c.

Pour faire usage de ce théorème, supposons que les équations $m = 0$, $n = 0$ donnent $y = f$ & $x = g$, & qu'en substituant ces valeurs, la fonction z devienne $= F$, & $\frac{d^2 z}{dy^2} = A$, $\frac{d^2 z}{dy\,dx} = B$, $\frac{d^2 z}{dx^2} = C$, $\frac{d^3 z}{dy^3} = A'$, $\frac{d^3 z}{dy^2\,dx} = B'$, &c.

En supposant que $F + \frac{\ddot{F}}{1\cdot 2} \pm \frac{\dddot{F}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\ddddot{F}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \pm$ &c. soit ce que devient F,

lorſque f & g deviennent l'un $f \pm q$, l'autre $g \pm r$, on aura

$$\ddot{F} = A q^2 + 2 B q r + C r^2,$$

$$\dddot{F} = A' q^3 + 3 B' q^2 r + 3 C' q r^2 + D' r^3;$$

$$\ddddot{F} = A'' q^4 + 4 B'' q^3 r + 6 C'' q^2 r^2 + 4 D'' q r^3 + E'' r^4, \text{ \&c.}$$

Je mettrai les fonctions $\ddot{F}$, $\ddddot{F}$, &c. ſous la forme que voici,

$$\ddot{F} = A \left(q + \frac{B r}{A} \right)^2 + r^2 \left(C - \frac{B^2}{A} \right),$$

$$\ddddot{F} = A'' \left(q^2 + \frac{2 B'' q r}{A''} \right)^2 + E'' \left(r^2 + \frac{2 D'' q r}{E''} \right)^2 + 2 q^2 r^2 \left(3 C'' - \frac{2 B''^2}{A''} - \frac{2 D''^2}{E''} \right), \text{ \&c.}$$

qui ſera beaucoup plus commode relativement à l'uſage que nous en allons faire ; nous ſuppoſerons auſſi que q & r ſont des quantités très-petites.

(255). Cela poſé, ſi nous conſidérons d'abord chacune des ſections ZMO ; ZMT ; à cauſe du ſigne $\pm$ dont les différences partielles impaires ſont affectées dans les formules $z \pm \Delta x \frac{dz}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 z}{dx^2} \pm$ &c., & $z \pm \Delta y \frac{dz}{dy} + \frac{\Delta y^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 z}{dy^2} \pm$ &c. dont l'une eſt ce que devient z lorſque x devient $x \pm \Delta x$, & l'autre ce que devient la même fonction lorſque y devient $y \pm \Delta y$, nous concIurons du nº. 168, que pour que z ſoit un plus grand ou un moindre, relativement à chacune de ces ſections, il faut que la dernière différence partielle, que fait diſparoître la ſuppoſition de $n = 0$, ou de $m = 0$, ſoit impaire ; & que z eſt un plus grand ou un moindre, ſelon que la différence partielle paire qui ſuit immédiatement devient poſitive ou négative. Mais ſi z eſt la plus grande ordonnée de la ſurface courbe, cette ordonnée doit être un plus grand pour toutes les ſections qui paſſent par le point Z ; & au contraire ſi cette ordonnée eſt la plus petite, elle doit être un moindre pour les mêmes ſections. Euler ſe contente d'examiner la fonction z par rapport aux deux ſections ZMO, ZMT. Voici comme s'exprime ce grand Géomètre dans ſon calcul différentiel. Si les valeurs de y & de x tirées des équations $m = 0$, $n = 0$ ne rendent pas nulles $\frac{d^2 z}{dy^2}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, il y aura certainement *maximum* ou *minimum* ; *maximum* ſi A & C ſont des quantités négatives, *minimum* ſi elles ſont poſitives. Que ſi les mêmes ſuppoſitions font diſparoître $\frac{d^2 z}{dy^2}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, ſans faire diſparoître $\frac{d^3 z}{dy^3}$, $\frac{d^3 z}{dy^3}$; il ne pourra y avoir ni *maximum* ni *minimum*. Que ſi ces différences partielles impaires diſparoiſſant, $\frac{d^4 z}{dy^4}$, $\frac{d^4 z}{dx^4}$ ne diſparoiſſent pas ; il y aura *maximum* ou *minimum* ſelon que A'' & E'' ſeront en même temps négatives ; ou en même temps poſitives, &c. Mais cet examen

examen ne suffit pas, comme Lagrange l'a remarqué dans le premier volume des Mémoires de Turin. En effet, la fonction F ne pourra être un *minimum* que lorsque $\ddot{F}=A\left(q+\frac{Br}{A}\right)^2+r^2\left(C-\frac{B^2}{A}\right)$ sera une quantité positive; or les quarrés $\left(q+\frac{Br}{A}\right)^2$, & r^2 étant nécessairement positif, $\ddot{F}$ ne le sera nécessairement aussi que lorsque A, C & $C-\frac{B^2}{A}$ le seront; ou bien lorsque A & C étant positifs, on aura aussi $AC>B^2$. La fonction F ne pourra être un *maximum* que lorsque $\ddot{F}$ sera une quantité négative; & elle le sera nécessairement si A, C & $C-\frac{B^2}{A}$ le sont; ou bien si A & C étant négatifs, on a $AC>B^2$. Aux conditions requises par Euler, il faut ajouter, tant pour le *maximum* que pour le *minimum*, que AC doit être plus grand que B^2; d'où l'on tire que si A ou C, ou tous deux sont zéro, B ne l'étant point, il ne pourra y avoir ni *maximum* ni *minimum*. Les substitutions des valeurs de y & de x, tirées des équations $m=0$, $n=0$, rendent nulles les différences partielles du second ordre, sans que celles du troisième le deviennent; il n'y a dans ce cas ni *maximum* ni *minimum*. Mais $\ddot{F}$, $\dddot{F}$ étant nulles, si $\ddddot{F}$ est une quantité positive, la fonction F est un *maximum*; elle est un *minimum* si $\ddddot{F}$ est une quantité négative. Or $\ddddot{F}$ sera nécessairement positive, si A'', E'' & $3\,C''-\frac{2B''^2}{A''}-\frac{2D''^2}{E''}$ le sont; elle sera nécessairement négative, si les mêmes quantités sont négatives, &c.

(256). Je suppose z fonction des trois variables y, x, u, on fera $\frac{dz}{dy}=0$; $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{du}=0$, & avec ces équations, on trouvera les valeurs de y, x, u; qui étant substituées dans z, la rendront un *maximum* ou un *minimum*. Si ces substitutions ne rendent pas nulles les différences partielles $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dy\,dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy\,du}$, $\frac{d^2z}{dx\,du}$, $\frac{d^2z}{du^2}$; & qu'au contraire elles soient changées par-là en A, B, C, D, E, F: tout se réduit à examiner si $Aq^2+2Bqr+Cr^2+2Dqs+2Ers+Fs^2$ est une quantité positive ou négative; q, r, s sont de très-petites quantités dont on suppose que les variables y, x, u, peuvent augmenter ou diminuer, sans que ce que devient z par-là soit plus grand que cette fonction, si elle est un *maximum*, ou plus petit si elle est un *minimum*. Je donne à la quantité qu'il s'agit d'examiner la forme suivante

$$A\left(q+\frac{Br}{A}+\frac{Ds}{A}\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{A}\right)r^2+2\left(E-\frac{BD}{A}\right)rs+\left(F-\frac{D^2}{A}\right)s^2;$$

& comme en faisant $C - \frac{B^2}{A} = H$, $E - \frac{BD}{A} = I$, $F - \frac{D^2}{A} = K$, les trois derniers termes font $Hr^2 + 2Irs + Ks^2 = H\left(r + \frac{Is}{H}\right)^2 + \left(K - \frac{I^2}{H}\right)s^2$; on pourra donner à toute la quantité la forme que voici

$$A\left(q + \frac{Br}{A} + \frac{Ds}{A}\right)^2 + H\left(r + \frac{Is}{H}\right)^2 + \left(K - \frac{I^2}{H}\right)s^2.$$

Maintenant il est clair que cette quantité sera nécessairement positive, si A, H & $K - \frac{I^2}{H}$ sont positifs; & qu'elle sera négative s'ils sont négatifs. Dans le premier cas, il faut que, A étant positif, on ait $AC > B^2$ & $(AC - B^2)(AF - D^2) > (AE - BD)^2$; d'où il résulte encore que C & F doivent être des quantités positives, & $AF > D^2$. Dans le second cas, il faut que, A étant négatif, on ait $AC > B^2$, $(AC - B^2)(AF - D^2) > (AE - BD)^2$; & par conséquent C négatif, F négatif & $AF > D^2$. Il seroit inutile de pousser plus loin ces calculs, & nous terminerons ici les applications du calcul différentiel.

CHAPITRE III.

Du Calcul intégral en général.

(257). LA méthode inverse du calcul différentiel est appellée le calcul intégral. Pour désigner l'intégrale d'une différentielle proposée, on est convenu de mettre devant cette différentielle le signe $\int$; de manière que $\int dZ$ désigne l'intégrale de dZ; $\int (a+x)^n dx$, l'intégrale de $(a+x)^n dx$; $\int x^m dx \int (a+x)^n dx$, l'intégrale de $x^m dx \int (a+x)^n dx$; & ainsi des autres. En faisant usage de ce signe, les formules données précédemment pour trouver la quadrature & la rectification des lignes courbes, la mesure des surfaces & des solidités des solides de révolution, &c. pourront être mises sous la forme que voici:

$$E = \int y\,dx + C;\ s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C;\ S = \int \pi y\,ds + C;$$
$$\Sigma = \int \frac{\pi}{2} y^2 dx + C;\ \&c.:$$

C est la constante arbitraire qu'on doit ajouter en intégrant.

Je suppose que de l'équation de la courbe on puisse tirer la valeur de y en une fonction de x & de constantes, tous les problèmes précédens se réduiront visiblement à intégrer une différentielle de cette forme $X dx$, par X j'entends une fonction de x & de constantes: réciproquement, on pourra toujours faire dépendre l'intégrale d'une formule différentielle telle que $X dx$, de la quadrature ou de la rectification de quelque courbe; & c'est dans ce sens que nous dirons qu'un problême est ramené aux quadratures, lorsqu'il ne s'agira plus pour le résoudre que d'intégrer une semblable différentielle.

* L'intégrale de $X\,dx$ peut être algébrique, & peut ne renfermer d'autres quantités tranſcendantes que des logarithmes & des arcs de cercle; je joins ici une table des formules les plus ſimples de ce genre.

Différentielles.	*Intégrales complètes.*
$(a+x)^n\,dx$	$\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1}+C.$
$\frac{dx}{a+x}$	$\text{log.}\,(a+x)+c.$
$\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$	$\text{log.}\,[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]+c.$
$\frac{dx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}}$	$\frac{1}{2a}\,\text{log.}\,\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}-a}{\sqrt{(a^2+x^2)}+a}+c.$
$\frac{dx}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}$	$\frac{1}{2a}\,\text{log.}\,\frac{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}+c.$
$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$	$A\,\text{ſin.}\,\frac{x}{a}+c$, ou $-A\,\text{cos.}\,\frac{x}{a}+c.$
$\frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\,A\,\text{tang.}\,\frac{x}{a}+c$, ou $\frac{-1}{a}\,A\,\text{cot.}\,\frac{x}{a}+c.$
$\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}$	$\frac{1}{a}\,A\,\text{ſéc.}\,\frac{x}{a}+c$, ou $\frac{-1}{a}\,A\,\text{coſé.}\,\frac{x}{a}+c.$
$e^x\,dx$	$e^x+c.$
$\frac{dx}{x\,\text{log.}\,x}$	$\text{log. log.}\,x+c.$
$\frac{dx}{x\,\text{log.}\,x\,\text{log. log.}\,x}$	$\text{log. log. log.}\,x+c.$
&c.	&c.
$\frac{dx}{x}\,(\text{log.}\,x)^n$	$\frac{(\text{log.}\,x)^{n+1}}{n+1}+c.$
$\frac{dx}{x\,\text{log.}\,x}\,(\text{log. log.}\,x)^n$	$\frac{(\text{log. log.}\,x)^{n+1}}{n+1}+c.$
&c.	&c.
$dx\,\text{cos.}\,x$	$\text{ſin.}\,x+c.$
$dx\,\text{ſin.}\,x$	$-\text{cos.}\,x+c.$
$\frac{dx}{\text{cos.}\,x^2}$	$\text{tang.}\,x+c.$
$\frac{dx}{\text{ſin.}\,x^2}$	$-\text{cot.}\,x+c.$
$\frac{dx\,\text{ſin.}\,x}{\text{cos}\,x^2}$	$\text{ſéc.}\,x+c.$
$\frac{dx\,\text{cos.}\,x}{\text{ſin.}\,x^2}$	$-\text{coſé.}\,x+c.$

(258). Il y a des différentielles dont les intégrales, quoique réelles, peuvent se présenter sous une forme qui contient des imaginaires; telles sont celles-ci,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \left(= A \text{ sin. } x\right) = \frac{\text{log. } [x\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1-x^2)}]}{\sqrt{(-1)}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} \left[= \text{log. } (x + \sqrt{[1+x^2]})\right] = \frac{A \text{ sin. } x\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(-1)}}.$$

En général les différentielles qu'on intègre par les arcs de cercle, peuvent aussi s'intégrer par les logarithmes, mais alors l'intégrale se présente sous une forme qui contient des imaginaires; réciproquement les différentielles qu'on intègre par les logarithmes, peuvent aussi s'intégrer par des arcs de cercle sous une forme qui contient des imaginaires: & pour pouvoir transformer commodément celles de ces quantités qui contiennent des imaginaires en d'autres qui soient réelles, nous déduirons de la première des deux formules précédentes ce qui suit.

Je nomme s l'arc dont x est le sinus, & à cause de $s\sqrt{(-1)} = \text{log. } [x\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1-x^2)}]$, $e^{s\sqrt{(-1)}} = x\sqrt{(-1)} + \sqrt{(1-x^2)}$, $e^{2s\sqrt{(-1)}} - 2x\sqrt{(-1)}\, e^{s\sqrt{(-1)}} = 1$, on a

$$\text{sin. } s = \frac{e^{s\sqrt{(-1)}} - e^{-s\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}, \text{ cos. } s = \frac{e^{s\sqrt{(-1)}} + e^{-s\sqrt{(-1)}}}{2},$$

$$\text{tang. } s = \frac{e^{2s\sqrt{(-1)}} - 1}{\sqrt{(-1)}\,(e^{2s\sqrt{(-1)}} + 1)};$$

& si l'arc s est une quantité imaginaire $t\sqrt{(-1)}$, $2\sqrt{(-1)}$ sin. $t\sqrt{(-1)} = e^{-t} - e^{t}$, 2 cos. $t\sqrt{(-1)} = e^{-t} + e^{t}$, $\sqrt{(-1)}$ tang. $t\sqrt{(-1)} = \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}$: on a aussi

$e^{s\sqrt{-1}} = \text{cos. } s + \sqrt{(-1)} \text{ sin. } s$, $e^{-s\sqrt{(-1)}} = \text{cos. } s - \sqrt{(-1)} \text{ sin. } s$, &c.

Si la différentielle Xdx n'est point intégrale algébriquement, ni par les tables des sinus & des logarithmes, il faudra avoir recours à la méthode des séries.

(259). Nous avons vu que l'intégrale complète d'une différentielle du premier ordre, devoit nécessairement renfermer une constante arbitraire. Je passe aux différentielles des ordres supérieurs, & je suppose dx constant. En différentiant deux fois $Z + ax + b$, où a & b sont des quantités constantes, on trouve d'abord $dZ + adx$, & ensuite d^2Z. Donc l'intégrale complète de l'ordre immédiatement inférieur, ou l'intégrale première complète, d'une différentielle du second ordre, doit renfermer une constante arbitraire; l'intégrale seconde complète, qui est ici la dernière, & que nous nommerons intégrale finie complète pour nous conformer à l'usage, doit renfermer deux constantes arbitraires, tellement disposées entr'elles qu'on ne puisse les faire disparoître que par deux différentiations. En différentiant trois fois $Z + ax^2 + bx + c$, on a 1°. $dZ + 2axdx + bdx$, 2°. $d^2Z + 2adx^2$, 3°. d^3Z.

D'où il suit que l'intégrale première complète d'une différentielle du troisième ordre,

ordre, doit renfermer une constante arbitraire; que l'intégrale seconde complète en doit renfermer deux, & l'intégrale finie complète trois. En général l'intégrale n complète d'une différentielle quelconque doit renfermer n constantes arbitraires, tellement disposées entr'elles qu'on ne puisse les faire disparoître que par un nombre n de différentiations.

Cela posé, on propose de trouver les intégrales complètes successives de $d^n Z$. On a pour la première $d^{n-1} Z + a dx^{n-1}$ (il est clair que la constante arbitraire $a dx^{n-1}$ doit être du même ordre que $d^{n-1} Z$); pour la seconde $d^{n-2} Z + a x dx^{n-2} + b dx^{n-2}$; pour la troisième $d^{n-3} Z + \frac{a x^2}{2} dx^{n-3} + b x dx^{n-3} + c dx^{n-3}$; enfin pour l'intégrale finie complète

$$Z + i + hx + \frac{g x^2}{1 \cdot 2} + \frac{f x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{a x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n-1},$$

ou plus simplement $Z + i + hx + gx^2 + fx^3 + \dots + a x^{n-1}$; puisque les constantes $i, h, g \dots a$ sont arbitraires. Si on demandoit les intégrales successives de l'équation $d^n Z = 0$, on les trouveroit en égalant à zéro chacune des intégrales précédentes. Mais ne perdons jamais de vue que les constantes arbitraires doivent être ajoutées en intégrant, & qu'on ne doit se permettre aucune opération sur chaque équation intégrale, avant que d'avoir ajouté la constante arbitraire qui lui convient.

(260). Si dans une intégrale quelconque complète on fait une ou plusieurs des constantes arbitraires égales à zéro, ou à l'infini, ou à des nombres déterminés, on aura ce qu'on appelle une intégrale particulière de la différentielle proposée. On tire delà qu'ayant une des intégrales complètes d'une différentielle proposée, soit la première, ou la seconde, ou la troisième, &c. on en pourra trouver une infinité de particulières du même ordre; qu'une équation différentielle étant proposée, on pourra trouver entre les mêmes variables de certaines relations qui satisfassent à cette équation, sans être comprises dans quelques-unes de ses intégrales complètes, & sans en être par conséquent des intégrales particulières. Par exemple, on satisfait à l'équation $dy = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 - m^2)}}$, en faisant $x^2 + y^2 = m^2$; cependant $x^2 + y^2 = m^2$ n'est pas une intégrale particulière de l'équation différentielle proposée, puisque d'aucune manière elle ne peut être comprise dans son intégrale complète $y = a + \sqrt{(x^2 + y^2 - m^2)}$: cette remarque de Euler est de la dernière importance.

(261). Il est souvent facile de satisfaire à une équation différentielle; mais comment s'assurer que l'équation qui satisfait en est une intégrale particulière? Et dans le cas où elle seroit une intégrale particulière, comment en conclure l'intégrale complète de la proposée? Soit l'équation différentielle $m^2 dy + y^2 dx = m^2 dx + x y dx$, on verra aisément que $y = x$ satisfait à cette équation; pour m'assurer qu'elle en est une intégrale particulière, je cherche l'intégrale complète de la manière suivante. Je suppose $y = x + z$, z étant une variable indéterminée,

& les substitutions faites, l'équation différentielle proposée devient $m^2 dz + xz\,dx + z^2 dx = 0$, d'où l'on tire $\frac{dz}{z^2} + \frac{x\,dx}{m^2 z} = \frac{-dx}{m^2}$. Je remarque que la différentielle de $\frac{-1}{z} e^{-\frac{x^2}{2m^2}}$ est égale à $\frac{dz}{z^2} e^{-\frac{x^2}{2m^2}} + \frac{x\,dx}{m^2 z} e^{-\frac{x^2}{2m^2}}$; il ne manque donc au premier membre de l'équation précédente, pour être une différentielle exacte, que d'être multiplié par $e^{-\frac{x^2}{2m^2}}$. Ainsi je changerai cette équation en celle-ci, $\frac{dz}{z^2} e^{-\frac{x^2}{2m^2}} + \frac{x\,dx}{m^2 z} e^{-\frac{x^2}{2m^2}} = -\frac{dx}{m^2} e^{-\frac{x^2}{2m^2}}$, qui a pour intégrale complète $\frac{-1}{z} e^{-\frac{x^2}{2m^2}} = a - \frac{1}{m^2}\int dx\, e^{-\frac{x^2}{2m^2}}$, ou $\frac{1}{z} = e^{\frac{x^2}{2m^2}}\left(\frac{1}{m^2}\int dx\, e^{-\frac{x^2}{2m^2}} - a\right)$. Si je fais la constante arbitraire $a = \frac{1}{0}$, j'aurai aussi $\frac{1}{z}$ infini, & $z = 0$; d'où l'on tire $y = x$, & que cette équation est une intégrale particulière de la proposée. Dans cet exemple, les problêmes en question ne nous ont présenté aucune difficulté.

(262). J'ai entre y & x & la constante indéterminée a l'équation finie $V = 0$; je différentie, & il me vient $V' = 0$; avec les deux équations $V = 0$, $V' = 0$, j'élimine a, & il résulte l'équation différentielle $(V) = 0$, qui a pour intégrale complète $V = 0$. En différentiant l'équation $a^2 + ax + y^2 = 0$, par exemple, il vient $a\,dx + 2y\,dy = 0$; & éliminant a, l'équation différentielle $4y^2dy^2 - 2xy\,dx\,dy + y^2dx^2 = 0$, qui a pour intégrale complète $a^2 + ax + y^2 = 0$. Cette équation $a^2 + ax + y^2 = 0$, qui ne renferme d'autre constante que celle qui se trouve dans l'équation différentielle $a\,dx + 2y\,dy = 0$, n'en peut être l'intégrale complète; mais elle en est une intégrale particulière, puisqu'elle est comprise dans l'intégrale complète $ax + y^2 = b^2$.

Maintenant soit entre les mêmes variables & les deux constantes indéterminées a & b l'équation finie $V = 0$, qui étant différentiée deux fois, donne d'abord $V' = 0$ équation différentielle du premier ordre, & ensuite $V'' = 0$ équation différentielle du second ordre. Avec $V = 0$ & $V' = 0$, j'élimine a, & il me vient $V'\,1 = 0$, avec les mêmes équation j'élimine b, & il me vient $V'\,2 = 0$; avec les trois équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$, j'élimine a & b, & il me vient $(V) = 0$. Il est clair que l'équation différentielle du second ordre $(V) = 0$ a deux intégrales complètes de l'ordre immédiatement inférieur, savoir $V'\,1 = 0$ & $V'\,2 = 0$; que son intégrale finie complète est $V = 0$; qu'ayant les deux intégrales complètes du premier ordre $V'\,1 = 0$ & $V'\,2 = 0$, si l'on peut tirer

de l'une la valeur de $\frac{dy}{dx}$, pour ensuite la substituer dans l'autre, on aura de cette manière l'intégrale finie complète $V = 0$.

L'équation $a^2 + ax + by + y^2 = 0$ différentiée deux fois donne $a dx + (b + 2y) dy = 0$, $(b + 2y)\ d^2y + 2 dy^2 = 0$. On tire de la première $a = -\frac{dy}{dx}(b + 2y)$; & en substituant dans la proposée, $(b + 2y)^2 dy^2 - (b + 2y) x dx dy + (by + y^2) dx^2 = 0$. On tire de la même équation différentielle $b = -a \frac{dx}{dy} - 2y$; & en substituant dans la proposée, $(a^2 + ax - y^2) dy - ay dx = 0$. On tire de l'une & de l'autre $b = -2\frac{dy^2}{d^2y} - 2y$, $a = \frac{2dy^3}{dx d^2y}$; & en substituant ces valeurs dans la proposée, l'équation différentielle du second ordre

$$y^2 dx^2 d^2y^2 + (2ydx - 2xdy) dx dy^2 d^2y - 4dy^6 = 0,$$

qui a pour intégrales complètes de l'ordre immédiatement inférieur

$$(b + 2y)^2 dy^2 - (b + 2y) x dx dy + (by + y^2) dx^2 = 0,$$
$$(a^2 + ax - y^2) dy - ay dx = 0;$$

& pour intégrale finie complète $a^2 + ax + by + y^2 = 0$. L'une des intégrales premières donne $\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{a^2 + ax - y^2}$, & substituant dans l'autre, il vient

$$y^5 + by^4 - abxy^2 + a^2bx + a^4y + a^4b - a^2x^2y + 2a^2y^3 + 2a^2by^2 + a^2b^2y = 0.$$

Cette équation n'est autre que

$$(y^3 + a^2y - axy + a^2b)(y^2 + by + ax + a^2) = 0;$$

d'où l'on tire ou $y^3 + a^2y - axy + a^2b = 0$, ou $y^2 + by + ax + a^2 = 0$; c'est la seconde équation qui est l'intégrale demandée.

Soit encore entre les mêmes variables & les trois constantes indéterminées a, b & c, l'équation $V = 0$, qui étant différentiée trois fois, donne $V' = 0$, $V'' = 0$, $V''' = 0$. Avec les trois équations $V = 0$, $V' = 0$ & $V'' = 0$, j'élimine successivement a & b, a & c, b & c; & il me vient trois équations différentielles du second ordre, $V''1 = 0$, $V''2 = 0$, $V''3 = 0$, dont chacune renferme une des constantes indéterminées. Je suppose qu'en éliminant a, b & c, au moyen des quatre équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$, $V''' = 0$, on ait $(V) = 0$; il est clair que cette équation du troisième ordre $(V) = 0$ a les trois intégrales premières complètes $V''1 = 0$, $V''2 = 0$, $V''3 = 0$; qu'elle a pour intégrale finie complète $V = 0$; & qu'ayant les trois intégrales premières complètes, on pourra dans beaucoup de cas éliminer $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$, & trouver de cette manière l'intégrale finie complète.

En général, toute équation différentielle d'un ordre quelconque, de l'ordre n,

par exemple, à un nombre n d'intégrales complètes de l'ordre immédiatement inférieur, ou de l'ordre $n - 1$, au moyen desquelles il sera quelquefois possible de trouver l'intégrale finie complète, qui est unique, quoiqu'elle puisse se présenter sous une infinité de formes différentes. Fontaine a le premier fait cette remarque importante.

(263). J'imagine entre les variables y, x & les rapports $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$, &c., une équation qui renferme des fonctions transcendantes de ces rapports. On pourra toujours par des différentiations successives faire disparoître ces fonctions transcendantes; & on parviendra de cette manière à une équation différentielle d'un ordre plus élevé, mais dont l'exposant ne pourra surpasser l'exposant de l'ordre de la proposée que d'un nombre d'unités égal à celui des transcendantes. Soit, par exemple, l'équation du premier ordre $V \log. p + V' p = 0$, V & V' sont des fonctions quelconques des variables y, x. Après avoir divisé tous les termes par V, je différentie, & il vient l'équation du second ordre $\frac{dp}{p} + \frac{V'}{V} dp + p d\left(\frac{V'}{V}\right) = 0$, qui ne renferme pas de fonctions transcendantes de p. Soit cette autre équation du premier ordre

$$A \text{ tang. } p + V \log. p + V' p = 0;$$

une première différentiation ne fait disparoître qu'une des transcendantes, & il vient $\frac{dp}{1+p^2} + V \frac{dp}{p} + \log. p dV + d(V' p) = 0$; pour faire disparoître l'autre, il faudra différentier une seconde fois, après avoir divisé tous les termes par dV, & l'équation résultante sera du troisième ordre. Si on eût proposé l'équation A tang. $p + \log. p + V' p = 0$, une seule différentiation auroit fait disparoître les deux transcendantes. Ainsi nous pourrons toujours n'avoir que des équations dans lesquelles il ne se trouvera point de fonctions transcendantes du rapport entre les différentielles de l'ordre le plus élevé, & nous pourrons par conséquent supposer que, ce rapport ayant été séparé par les méthodes de l'algèbre, toute équation différentielle de l'ordre n, entre les variables y & x, où dx est supposé constant, est de la forme $\frac{d^n y}{dx^n} + m = 0$; par m on entend une fonction quelconque de y, x, p, q, &c.

(264). Soit d'abord l'équation du premier ordre $\frac{dy}{dx} + m = 0$, m n'est fonction que des variables y, x & de constantes. Si cette équation est homogène avant de la mettre sous la forme précédente, m est une fonction homogène de dimension nulle des variables x, y; & telle par conséquent que si l'on fait $y = ux$, on aura m égal à une fonction de u & de constantes que je nomme U. Dans ce cas-ci, notre équation devient $x du + u dx + U dx = 0$, d'où

d'où l'on tire $\frac{dx}{x} = \frac{-du}{u+U}$, & log. $x = a - \int \frac{du}{u+U}$; tout est donc réduit à intégrer une formule différentielle du premier ordre à une seule variable. Toutes les fois qu'il sera possible de séparer les variables dans une équation différentielle du premier ordre, elle deviendra de cette forme $U\,du = X\,dx$, dont les deux membres sont intégrables séparément par la méthode des quadratures.

(265). Soit encore l'équation du premier ordre $dy + Py\,dx = Q\,dx$, dans laquelle P & Q sont des fonctions quelconques de x & de constantes. Je suppose qu'il soit possib e de séparer les variables dans cette équation en faisant $y = uX$, où X est une fonction de x & de constantes, & u une variable indéterminée quelconque. A cause de $dy = u\,dX + X\,du$, on aura la transformée $X\,du + u\,dX + uPX\,dx = Q\,dx$, dans laquelle si nous faisons, comme nous en sommes les maîtres, $dX + PX\,dx = 0$, & par conséquent $X\,du = Q\,dx$, le problême sera résolu ; car on tire de la première équation $\frac{dX}{X} = -P\,dx$, log. $X = -\int P\,dx$, $X = e^{-\int P\,dx}$; & substituant pour X sa valeur dans l'équation $du = \frac{Q\,dx}{X}$, $du = e^{\int P\,dx}\,Q\,dx$. Donc $u = a + \int e^{\int P\,dx}\,Q\,dx$, & $y\,(= uX) = e^{-\int P\,dx}\,(a + \int e^{\int P\,dx}\,Q\,dx)$. Si on eût intégré complétement chacune des équations précédentes, on eût trouvé d'abord log. X + log. $a = -\int P\,dx$, ou $X = \frac{1}{a}\,e^{-\int P\,dx}$; & ensuite $y = e^{-\int P\,dx}\left(\frac{b}{a} + \int e^{\int P\,dx}\,Q\,dx\right)$, intégrale qui ne renferme réellement qu'une seule constante arbitraire, comme cela doit être, puisque la proposée n'est que du premier ordre.

Je prendrai pour exemple l'équation $dy + \frac{hy\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = i\,dx$, dans laquelle h & i sont des constantes. On a $\int P\,dx = \int \frac{h\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = h$ log. $[x + \sqrt{(1+x^2)}]$, $e^{\int P\,dx} = [x + \sqrt{(1+x^2)}]^h$, $-\int P\,dx = \int \frac{-h\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = h$ log. $[-x + \sqrt{(1+x^2)}]$, $e^{-\int P\,dx} = [-x + \sqrt{(1+x^2)}]^h$. On a aussi $\int e^{\int P\,dx}\,Q\,dx = \int i\,dx\,[x + \sqrt{(1+x^2)}]^h$; je fais $x + \sqrt{(1+x^2)} = u$, d'où $x = \frac{u^2-1}{2u}$, $dx = \frac{1}{2}\left(du + \frac{du}{u^2}\right)$, & $\int i\,dx\,[x + \sqrt{(1+x^2)}]^h \left[= \frac{i}{2}\int(u^h\,du + u^{h-2}\,du) = \frac{i}{2}\left(\frac{u^{h+1}}{h+1} + \frac{u^{h-1}}{h-1}\right)\right] = \frac{i}{h^2-1}\,[x + \sqrt{(1+x^2)}]^{h-1}\,(h + (h-1)\cdot x \cdot [x + \sqrt{(1+x^2)}])$. Substituant ces valeurs dans la formule générale, il vient

$y = a[-x+\sqrt{(1+x^2)}]^h + \frac{i}{h^2-1}[-x+\sqrt{(1+x^2)}]^h$
$[x+\sqrt{(1+x^2)}]^{h-1}[h+(h-1)\cdot x\cdot(x+\sqrt{(1+x^2)})]$; ou parce que $[x+\sqrt{(1+x^2)}]^{-h} = [-x+\sqrt{(1+x^2)}]^h$,
$y = a[-x+\sqrt{(1+x^2)}]^h + \frac{hi\sqrt{(1+x^2)}}{h^2-1} - \frac{ix}{h^2-1}$.

(266). Si l'équation eſt du ſecond ordre, & repréſentée par $\frac{d^2y}{dx^2}+m=0$; où m eſt une fonction de y, x, p; à cauſe de $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, cette équation devient $dp+mdx=0$; ou mettant pour dx ſa valeur $\frac{dy}{p}$, elle devient $pdp+mdy=0$.

Soit m une fonction de p & de conſtantes que je nomme P. Dans cette hypothèſe l'équation $dp+mdx=0$ donne $dx=-\frac{dp}{P}$, & $x=a-\int^{'}\frac{dp}{P}$; celle-ci $pdp+mdy=0$ donne $dy=\frac{-pdp}{P}$, & $y=b-\int^{'}\frac{pdp}{P}$.
Avec ces deux intégrales premières on éliminera p s'il eſt poſſible, & on aura l'intégrale finie complète de la propoſée. Si l'équation eſt $hd^2y=dxdy$, h étant conſtant; on a $P=\frac{-p}{h}$, donc $x=a+h\log.p$, $y=b+hp$; & éliminant p, il vient $\frac{x-a}{h}=\log.\frac{y-b}{h}$.

(267). Soit m une fonction de x & de conſtantes que je nomme X. On a $dp+Xdx=0$, & p ou $\frac{dy}{dx}=a-\int Xdx$; donc $y=b+ax-\int dx\int Xdx$.
Mais $\int dx\int Xdx = x\int Xdx-\int Xxdx$; donc $y=b+ax-x\int Xdx+\int Xxdx$.
Je prends pour exemple $\frac{d^2y}{dx^2}=hx^\lambda$. On a $X=-hx^\lambda$, $\int Xdx=\frac{-hx^{\lambda+1}}{\lambda+1}$, $\int Xxdx=\frac{-hx^{\lambda+2}}{\lambda+2}$; donc, hors les cas de $\lambda=-1$ & de $\lambda=-2$; $y=b+ax+\frac{hx^{\lambda+2}}{(\lambda+1)\cdot(\lambda+2)}$. Lorſque $\lambda=-1$, $\int Xdx=-h\log.x$; $\int Xxdx=-hx$; & $y=b+(a-h)\cdot x+hx\log.x$: lorſque $\lambda=-2$, $\int Xdx=\frac{h}{x}$, $\int Xxdx=-h\log.x$; & $y=b-h+ax-h\log.x$.
A cauſe que a & b ſont arbitraires, on peut préſenter les deux dernières intégrales ſous une forme plus ſimple, & écrire dans le premier cas $y=b+ax+hx\log.x$; dans le ſecond cas $y=b+ax-h\log.x$.

Soit m une fonction de y & de conſtantes que je nomme Y. L'équation $pdp+Ydy=0$, donne $p^2=a-2\int Ydy$, & p ou $\frac{dy}{dx}=\sqrt{(a-2\int Ydy)}$;

d'où l'on tire $dx = \frac{dy}{\sqrt{(a - 2\int Y dy)}}$, & pour l'intégrale complète de la proposée $x = b + \int \frac{dy}{\sqrt{(a - 2\int Y dy)}}$. Je prends pour exemple l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = hy$. On a $\int Y dy = -\frac{hy^2}{2}$; donc $x = b + \int \frac{dy}{\sqrt{(a + hy^2)}} = b + \frac{1}{\sqrt{h}} \log. [y\sqrt{h} + \sqrt{(a + hy^2)}]$. Si h eſt un nombre négatif $-i$, l'intégrale ſous la forme logarithmique contient des imaginaires; mais on a dans ce cas $y = b + \frac{1}{\sqrt{i}} A$ ſin. $y \sqrt{\left[\frac{i}{a}\right]}$.

(268). Si m eſt une fonction de x, p ou de y, p, le problême ſe réduit à ſéparer les variables dans une équation du premier ordre qui eſt dans le premier cas $dp + m dx = 0$, & dans le ſecond cas $p dp + m dy = 0$. Ainſi l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} + h \frac{dy}{dx} + iy = 0$, dans laquelle h & i ſont des conſtantes, devient $p dp + hp dy + iy dy = 0$; & faiſant dans cette équation homogène $p = uy$, on en tire $u^2 dy + uy du + hu dy + i dy = 0$, & $\frac{dy}{y} = \frac{-u du}{u^2 + hu + i}$. Les deux facteurs du dénominateur du ſecond membre ſont $u + \frac{h}{2} + \sqrt{\left[\frac{h^2}{4} - i\right]}$ & $u + \frac{h}{2} - \sqrt{\left[\frac{h^2}{4} - i\right]}$; faiſons pour abréger $\sqrt{\left[\frac{h^2}{4} - i\right]} = h'$, on aura $\frac{dy}{y} = \frac{-u du}{(u + \frac{h}{2} + h')(u + \frac{h}{2} - h')}$,

$$dx \left(= \frac{dy}{p} = \frac{dy}{uy}\right) = \frac{-du}{(u + \frac{h}{2} + h')(u + \frac{h}{2} - h')};$$

donc $\frac{dy}{y} + \left(\frac{h}{2} + h'\right) dx = \frac{-du}{u + \frac{h}{2} - h'}$, & $\frac{dy}{y} + \left(\frac{h}{2} - h'\right) dx = \frac{-du}{u + \frac{h}{2} + h'}$. On tire de ces deux équations $\log. y + \left(\frac{h}{2} + h'\right) x = \log. a - \log. (u + \frac{h}{2} - h')$, & $\log. y + \left(\frac{h}{2} - h'\right) x = \log. b - \log. (u + \frac{h}{2} + h')$; ou $\frac{y(u + \frac{h}{2} - h')}{a} = e^{-(\frac{h}{2} + h')x}$ &

$$\frac{y(u + \frac{h}{2} + h')}{b} = e^{-(\frac{h}{2} - h')x}.$$

Avec ces deux intégrales premières on éliminera u, & on aura l'intégrale finie complète $2h'y = e^{-\frac{hx}{2}}(be^{h'x} - ae^{-h'x})$. Si les deux facteurs sont égaux, $h' = 0$, & $y = \frac{b-a}{0} e^{-\frac{hx}{2}} = fe^{-\frac{hx}{2}}$, dans ce cas, l'intégrale trouvée n'est pas complète, puisqu'elle ne renferme qu'une constante arbitraire. Pour trouver l'intégrale complète, je fais $y = z e^{-\frac{hx}{2}}$, & j'ai $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} e^{-\frac{hx}{2}} - \frac{hz}{2} e^{-\frac{hx}{2}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} e^{-\frac{hx}{2}} - h\frac{dz}{dx} e^{-\frac{hx}{2}} + \frac{h^2 z}{4} e^{-\frac{hx}{2}}$; en substituant ces valeurs dans $\frac{d^2y}{dx^2} + h\frac{dy}{dx} + iy = 0$, divisant ensuite tous les termes par $e^{-\frac{hx}{2}}$, il vient $\frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{h^2}{4} - i\right) z = 0$, ou $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$; d'où je tire premiérement $\frac{dz}{dx} = a$, puis $z = ax + b$; & pour l'intégrale finie complète de la proposée, lorsque $\frac{h^2}{4} - i = 0$, $y = (ax + b) e^{-\frac{hx}{2}}$. Si les deux facteurs sont imaginaires, alors h' est une quantité de cette forme $h''\sqrt{-1}$, & j'ai
$2h''y\sqrt{-1} = e^{-\frac{hx}{2}}\left(be^{h''x\sqrt{-1}} - ae^{-h''x\sqrt{-1}}\right)$. Mais
$e^{h''x\sqrt{-1}} = \cos. h''x + \sqrt{-1} \sin. h''x$, $e^{-h''x\sqrt{-1}} = \cos. h''x - \sqrt{-1} \sin. h''x$;
substituant ces valeurs, il vient
$y = e^{-\frac{hx}{2}}\left(\frac{b-a}{2h''\sqrt{-1}} \cos. h''x + \frac{b+a}{2h''} \sin. h''x\right)$, ou simplement
$y = e^{-\frac{hx}{2}}(b \cos. h''x + a \sin. h''x)$, c'est l'intégrale finie complète de la proposée lorsque $\frac{h^2}{4}$ est moindre que i.

(269). L'équation plus générale $\frac{d^2y}{dx^2} + h\frac{dy}{dx} + iy = X$ s'intègre en faisant $y = uz$, $dy = udz + zdu$, $d^2y = ud^2z + 2dzdu + zd^2u$; car ces substitutions faites, on a la transformée

$$u\left(\frac{d^2z}{dx^2} + h\frac{dz}{dx} + iz\right) + 2\frac{dudz}{dx^2} + z\frac{d^2u}{dx^2} + hz\frac{du}{dx} = X,$$

que nous pouvons, à cause des deux variables indéterminées u & z, partager comme nous le croirons convenable. Il faudra faire $\frac{d^2z}{dx^2} + h\frac{dz}{dx} + iz = 0$, & cette équation servira à déterminer z, car nous savons qu'elle est intégrable dans tous les cas possibles. L'autre équation sera $2\frac{dudz}{dx^2} + z\frac{d^2u}{dx^2} + hz\frac{du}{dx} = X$, dans laquelle,

laquelle, si l'on fait $\frac{du}{dx} = t$, $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dt}{dx}$; on aura, après avoir tout multiplié par dx, $z\,dt + 2t\,dz + htz\,dx = X\,dx$, ou $dt + t\left(h\,dx + \frac{2\,dz}{z}\right) = \frac{X\,dx}{z}$. N'oublions pas que z est une fonction de x que nous connoîtrons quand nous voudrons, & nous verrons aisément que l'équation précédente n'est qu'un cas particulier de celle-ci $dt + Pt\,dx = Q\,dx$ qui, comme nous l'avons démontré plus haut, a pour intégrale complète $t = e^{-\int P\,dx}(a + \int e^{\int P\,dx} Q\,dx)$. Ici $\int P\,dx = hx + \log. z^2$, $e^{\int P\,dx} = z^2 e^{hx}$, $Q = \frac{X}{z}$; donc t ou $\frac{du}{dx} = \frac{e^{-hx}}{z^2}(a + \int e^{hx} Xz\,dx)$, $u = b + \int \frac{e^{-hx}\,dx}{z^2}(a + \int e^{hx} Xz\,dx$; & par conséquent $y = bz + z(a\int \frac{e^{-hx}\,dx}{z^2} + \int \frac{e^{-hx}\,dx}{z^2} \int e^{hx} Xz\,dx)$.

Il suffira de prendre pour z une valeur, autre que zéro, qui satisfasse à l'équation $\frac{d^2z}{dx^2} + h\frac{dz}{dx} + iz = 0$; or il y a trois cas qu'il faut bien se garder de confondre. Le premier, c'est lorsque $\frac{h^2}{4}$ est plus grand que i. On prendra $z = e^{-(\frac{h}{2} - h')x}$ ou $z = e^{-(\frac{h}{2} + h')x}$, car des deux manières, on doit avoir le même résultat. En prenant la première valeur, on trouve $y = be^{-(\frac{h}{2} - h')x} + e^{-(\frac{h}{2} - h')x}(\int ae^{-2h'x}\,dx + \int e^{-2h'x}\,dx \int e^{(\frac{h}{2} + h')x} X\,dx)$; Mais $\int ae^{-2h'x}\,dx = -\frac{ae^{-2h'x}}{2h'}$, $\int e^{-2h'x}\,dx \int e^{(\frac{h}{2} + h')x} X\,dx = -\frac{e^{-2h'x}}{2h'} \int e^{(\frac{h}{2} + h')x} X\,dx + \frac{1}{2h'} \int e^{(\frac{h}{2} - h')x} X\,dx$; donc $y = be^{-(\frac{h}{2} - h')x} - \frac{a}{2h'} e^{-(\frac{h}{2} + h')x} - \frac{e^{-(\frac{h}{2} + h')x}}{2h'} \int e^{(\frac{h}{2} + h')x} X\,dx + \frac{e^{-(\frac{h}{2} - h')x}}{2h'} \int e^{(\frac{h}{2} - h')x} X\,dx$. Le second cas, c'est lorsque $\frac{h^2}{4} = i$, ou lorsque $h' = 0$. On prendra $z = e^{-\frac{hx}{2}}$ ou $z = xe^{-\frac{hx}{2}}$; la première valeur étant la plus simple, c'est celle que je choisis, & il vient $y = be^{-\frac{hx}{2}} + axe^{-\frac{hx}{2}} + e^{-\frac{hx}{2}} \int dx \int e^{\frac{hx}{2}} X\,dx = e^{-\frac{hx}{2}}(b + ax + x\int e^{\frac{hx}{2}} X\,dx - \int e^{\frac{hx}{2}} Xx\,dx)$. Le troisième cas, c'est lorsque h' est une quantité imaginaire telle que $h'' \sqrt{-1}$. On prendra $z = e^{-\frac{hx}{2}} \cos. h''x$ ou $z = e^{-\frac{hx}{2}} \sin. h''x$; en prenant la première valeur, on trouve

$$y = e^{-\frac{hx}{2}} \cos. h'' x \left(b + \int \frac{a\,dx}{(\cos. h'' x)^2} + \int \frac{dx}{(\cos. h'' x)^2} \int e^{\frac{hx}{2}} X\,dx \cos. h'' x\right)$$

$$= e^{-\frac{hx}{2}} \cos. h'' x \left(b + \frac{a}{h''} \text{tang. } h'' x + \frac{\text{tang. } h'' x}{h''} \int e^{\frac{hx}{2}} X\,dx \cos. h'' x\right.$$

$$\left. - \frac{1}{h''} \int e^{\frac{hx}{2}} X\,dx \text{ sin. } h'' x\right) = e^{-\frac{hx}{2}} \left(b \cos. h'' x + \frac{a}{h''} \text{sin. } h'' x + \right.$$

$$\left.\frac{\text{sin. } h'' x}{h''} \int e^{\frac{hx}{2}} X\,dx \cos. h'' x - \frac{\cos. h'' x}{h''} \int e^{\frac{hx}{2}} X\,dx \text{ sin. } h'' x\right).$$

(270). Reprenons l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} + m = 0$, & examinons d'abord le cas où m feroit fonction de x & de constantes, où l'on auroit par exemple $\frac{d^n y}{dx^n} = X$. A cause de $\frac{d^n y}{dx^{n-1}} = X\,dx$, on a $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = a + \int X\,dx$; donc $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-2}} = a\,dx + dx \int X\,dx$, & $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = b + ax + x \int X\,dx - \int X x\,dx$; donc $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-3}} = b\,dx + ax\,dx + x\,dx \int X\,dx - dx \int X x\,dx$, & $\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = c + bx + \frac{ax^2}{2} + \frac{x^2}{2} \int X\,dx - x \int X x\,dx + \frac{1}{2} \int X x^2\,dx$, car $\int x\,dx \int X\,dx = \frac{x^2}{2} \int X\,dx - \frac{1}{2} \int X x^2\,dx$, $\int dx \int X x\,dx = x \int X x\,dx - \int X x^2\,dx$; donc $\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-4}} = c\,dx + bx\,dx + \frac{ax^2\,dx}{2} + \frac{x^2\,dx}{2} \int X\,dx - x\,dx \int X x\,dx + \frac{dx}{2} \int X x^2\,dx$, & $\frac{d^{n-4} y}{dx^{n-4}} = e + cx + \frac{bx^2}{2} + \frac{ax^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} \int X\,dx - \frac{x^2}{2} \int X x\,dx + \frac{x}{2} \int X x^2\,dx - \frac{1}{2 \cdot 3} \int X x^3\,dx$; $\frac{d^{n-5} y}{dx^{n-5}} = f + ex + \frac{cx^2}{2} + \frac{bx^3}{2 \cdot 3} + \frac{ax^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \int X\,dx - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \int X x\,dx + \frac{x^2}{4} \int X x^2\,dx - \frac{x}{2 \cdot 3} \int X x^3\,dx + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \int X x^4\,dx$; en continuant ainsi, on parviendra à trouver y avec n constantes arbitraires, & par conséquent l'intégrale finie complète de la proposée.

Je fais $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = u$, $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = t$, $\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = s$, $\frac{d^{n-4} y}{dx^{n-4}} = r$, &c.; & je suppose que m soit fonction de la variable u & de constantes, ou que l'on ait $\frac{d^n y}{dx^n} = U$. A cause $\frac{du}{dx} = U$, on a $dx = \frac{du}{U}$, & $x = a + \int \frac{du}{U}$. On a aussi $dt \,(= u\,dx) = \frac{u\,du}{U}$, & $t = b + \int \frac{u\,du}{U}$; $ds \,(= t\,dx) = b\,dx +$

$\frac{du}{U}\int\frac{udu}{U}$, & $s = c + bx + \int\frac{du}{U}\int\frac{udu}{U}$; $dr (= sdx) = cdx + bxdx + \frac{du}{U}\int\frac{du}{U}\int\frac{udu}{U}$, & $r = e + cx + \frac{bx^2}{2} + \int\frac{du}{U}\int\frac{du}{U}\int\frac{udu}{U}$; en continuant ainſi, on trouvera y en fonction de u. Avec cette équation qui contiendra $n - 1$ conſtantes arbitraires & celle-ci $x = a + \int\frac{du}{U}$, on éliminera u s'il eſt poſſible, & on aura l'intégrale finie complète de la propoſée.

Je ſuppoſe que m ſoit fonction de t & de conſtantes, ou que l'on ait $\frac{d^n y}{dx^n} = T$. A cauſe de $\frac{du}{dx} = T$ & de $\frac{dt}{dx} = u$, on a $udu = Tdt$, & $u = \sqrt{(a - 2\int Tdt)}$ que je fais pour abréger $= \theta$. De plus $dx = \frac{dt}{\theta}$; donc $x = b + \int\frac{dt}{\theta}$. On a auſſi $ds (= tdx) = \frac{tdt}{\theta}$, & $s = c + \int\frac{tdt}{\theta}$; $dr (= sdx) = cdx + \frac{dt}{\theta}\int\frac{tdt}{\theta}$, & $r = e + cx + \int\frac{dt}{\theta}\int\frac{tdt}{\theta}$; en continuant ainſi, on trouvera y en fonction de t. Avec cette équation qui contiendra $n - 1$ conſtantes arbitraires, & celle-ci $x = b + \int\frac{dt}{\theta}$, on éliminera t s'il eſt poſſible, & on aura l'intégrale finie complète de la propoſée. Nous ne pouſſerons pas plus loin ces calculs, ne nous étant propoſés que d'examiner les cas les plus ſimplesoù il eſt poſſible de ſéparer les variables dans les équations différentielles.

(271). Si $Mdy + Ndx$ eſt la différentielle d'une fonction des deux variables y & x, Mdy eſt la différentielle de cette fonction, en regardant y ſeul comme variable, & Ndx la différentielle de la même fonction, en regardant x ſeul comme variable ; d'où il ſuit que l'intégrale de $Mdy + Ndx$ ne peut différer de l'intégrale de Mdy, priſe par rapport à y ſeulement, que d'une fonction de x & de conſtantes ; & de l'intégrale Ndx, priſe par rapport à x ſeulement, que d'une fonction de y & de conſtantes. On propoſe d'intégrer $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + y^2 dy$? J'intègre $\frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + \frac{ydx}{x^2 + y^2}$ en regardant x ſeul comme variable, & il me vient $\sqrt{(x^2 + y^2)} + A$ tang. $\frac{x}{y}$ qui ne peut différer de l'intégrale demandée que d'une fonction de y & de conſtantes que je nomme Y. Je différentie $\sqrt{(x^2 + y^2)} + A$ tang. $\frac{x}{y} + Y$ en faiſant varier y & x, & il vient $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + dY$, qui comparée à la différentielle propoſée, donne $dY = y^2 dy$ & $Y = \frac{y^3}{3} + a$. Donc la

différentielle proposée a pour intégrale complète

$$\sqrt{(x^2+y^2)} + A \text{ tang. } \frac{x}{y} + \frac{y^3}{3} + a.$$

Si j'eusse intégré $\frac{y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{x\,dy}{x^2+y^2} + y^2\,dy$ en regardant y seul comme variable, j'aurois trouvé $\sqrt{(x^2+y^2)} + A \text{ tang. } \frac{x}{y} + \frac{y^3}{3}$ qui ne peut différer de l'intégrale demandée, que d'une fonction de x & de constantes que je nomme X. Je différentie $\sqrt{(x^2+y^2)} + A \text{ tang.} \frac{x}{y} + \frac{y^3}{3} + X$, en faisant varier y & x, & il vient $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} + y^2\,dy + d\,X$, qui comparée à la différentielle proposée, donne $dX = 0$ & $X = a$. On verra aisément qu'on doit trouver $dX = 0$, lorsqu'aucun des termes de N n'est fonction de la seule variable x & de constantes, ou de constantes seulement ; & qu'on doit trouver $d\,Y = 0$, lorsqu'aucun des termes de M n'est fonction de la seule variable y & de constantes, ou de constantes seulement.

L'intégrale de la différentielle $M\,dy + N\,dx + P\,du$ d'une fonction des trois variables y, x, u, ne peut différer de l'intégrale de $M\,dy$, prise par rapport à y seulement, que d'une fonction de x, u & de constantes ; de l'intégrale de $N\,dx$, prise par rapport à x seulement, que d'une fonction de y, u & de constantes ; de l'intégrale de $P\,du$, prise par rapport à u seulement, que d'une fonction de y, x & de constantes. Ainsi nous pouvons supposer que l'intégrale de

$$\frac{y\,dy + x\,dx + u\,du}{\sqrt{(y^2+x^2+u^2)}} + \frac{u\,dx - x\,du}{x^2+u^2} + u\,du$$

est égale à l'intégrale de $\frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2+x^2+u^2)}}$, prise en ne faisant varier que y ; plus à une fonction de x, u & de constantes que je nomme K, ou à $\sqrt{(y^2+x^2+u^2)} + K$. En différentiant & comparant, on trouve $dK = \frac{u\,dx - x\,du}{x^2+u^2} + u\,du$; donc K est égale à l'intégrale de $\frac{u\,dx}{x^2+u^2}$, prise en ne faisant varier que x, plus à une fonction de u & de constantes que je nomme U, ou à $A \text{ tang. } \frac{x}{u} + U$. En différentiant & comparant, on trouve $dU = u\,du$, & $U = \frac{u^2}{2} + a$. Donc l'intégrale complète de la différentielle proposée est égale à $\sqrt{(y^2+x^2+u^2)} + A \text{ tang. } \frac{x}{u} + \frac{u^2}{2} + a$. &c.

(272). Si une équation différentielle du premier ordre, telle que $dy + m\,dx = 0$ a pour intégrale complète une équation entre y, x, & la constante arbitraire a, il y a toujours un facteur qui ne peut être qu'une fonction de y, x & de constantes, par lequel si on multiplie $dy + m\,dx$, on le rendra une différentielle exacte. En effet, supposons qu'ayant différentié l'équation entre y, x & a, après avoir

avoir séparé a, on ait $Mdy + Ndx = 0$, qui ne renferme pas la constante a, & dont le premier membre est nécessairement une différentielle exacte. En divisant par M les deux termes de $Mdy + Ndx = 0$, si ces deux quantités M & N ont un facteur commun, il disparoîtra, & on aura exactement $dy + mdx = 0$. Il existe donc toujours un facteur M, par lequel si on multiplie le premier membre $dy + mdx$, on le rendra une différentielle exacte. La question est de trouver ce facteur.

Il est toujours possible de séparer les variables dans l'équation $dy + mdx = 0$, lorsqu'elle est homogène; on pourra donc toujours, dans la même hypothèse, trouver un facteur propre à rendre $dy + mdx$ une différentielle exacte. Soit M ce facteur que nous supposerons être une fonction homogène, de dimension λ, des variables y, x; on trouvera que $Mdy + Mmdx$ est la différentielle d'une fonction homogène, de dimension $\lambda + 1$, des mêmes variables; & nommant z cette fonction, que, hors le cas de $\lambda + 1 = 0$, $My + Mmx = (\lambda + 1) \cdot z$. Cette équation, que nous avons démontrée précédemment, & celle-ci $Mdy + Mmdx = dz$, donnent $\frac{dy + mdx}{y + mx} = \frac{dz}{(\lambda + 1) \cdot z}$; donc $\frac{dy + mdx}{y + mx}$ est une différentielle exacte, & par conséquent $\frac{1}{y + mx}$ est le facteur demandé.

Lorsque $\lambda + 1 = 0$, $y + mx = 0$, & $m = \frac{-y}{x}$; dans ce cas, toute fonction de dimension nulle des variables y & x, égalée à une constante arbitraire, sera l'intégrale de l'équation différentielle proposée.

(273). L'équation $dt\,(e + ft + gu) = du\,(h + it + ku)$ n'est point homogène; mais si je fais $e + ft + gu = x$, $h + it + ku = y$, d'où l'on tire $t = \frac{kx - gy - ke + gh}{fk - gi}$, $u = \frac{fy - ix + ie - fh}{fk - gi}$, $dt = \frac{kdx - gdy}{fk - gi}$; $du = \frac{fdy - idx}{fk - gi}$, & que je substitue ces valeurs dans la proposée, j'aurai l'équation homogène $(fy + gx)\,dy - (kx + iy)\,dx = 0$, que je rendrai intégrable en la multipliant par $\frac{1}{fy^2 + lxy - kx^2}$, j'ai fait pour abréger $g - i = l$. Mais comme les deux termes du co-efficient de dx dans la différentielle exacte $\frac{(fy + gx)\,dy - (kx + iy)\,dx}{fy^2 + lxy - kx^2}$ renferment y, on aura l'intégrale demandée, en égalant à une constante arbitraire celle de $\frac{(fy + gx)\,dy}{fy^2 + lxy - kx^2}$ prise en ne faisant varier que y. Je cherche d'abord les deux facteurs de $fy^2 + lxy - kx^2$ que je trouve être $y\sqrt{f} + x \cdot \frac{l + \sqrt{(l^2 + 4kf)}}{2\sqrt{f}}$ & $y\sqrt{f} + x \cdot \frac{l - \sqrt{(l^2 + 4kf)}}{2\sqrt{f}}$, puis je distingue trois cas : le premier, lorsque les deux facteurs sont réels &

inégaux ; à cause de $\frac{l+\sqrt{(l^2+4kf)}}{2\sqrt{(kf)}} = \frac{-2\sqrt{(kf)}}{l-\sqrt{(l^2+4kf)}}$, si l'on fait $\frac{l+\sqrt{(l^2+4kf)}}{2\sqrt{f}} = \zeta$, ces deux facteurs seront $y\sqrt{f}+\zeta x$ & $y\sqrt{f}-\frac{kx}{\zeta}$; & on aura à intégrer

$$\frac{(fy+gx)\,dy}{(y\sqrt{f}+\zeta x)\left(y\sqrt{f}-\frac{kx}{\zeta}\right)} = \frac{-1}{(\zeta^2+k)\sqrt{f}}\left(\frac{(g-\zeta\sqrt{f})\zeta dy}{y+\frac{\zeta x}{\sqrt{f}}} - \frac{(\zeta g+k\sqrt{f})\,dy}{y-\frac{kx}{\zeta\sqrt{f}}}\right).$$

Ainsi lorsque les deux facteurs sont réels & inégaux, la proposée a pour intégrale complète

$$\frac{-1}{(\zeta^2+k)\sqrt{f}}\ \text{log.}\ \frac{\left(y+\frac{\zeta x}{\sqrt{f}}\right)^{\zeta g-\zeta^2\sqrt{f}}}{\left(y-\frac{kx}{\zeta\sqrt{f}}\right)^{\zeta g+k\sqrt{f}}} = \text{log. } a,$$ ou simplement

$$\left(y+\frac{\zeta x}{\sqrt{f}}\right)^{\zeta g-\zeta^2\sqrt{f}} = a\left(y-\frac{kx}{\zeta\sqrt{f}}\right)^{\zeta g+k\sqrt{f}}.$$

Lorsque les deux facteurs sont réels & égaux, il n'est question que d'intégrer $\frac{4f(fy+gx)\,dy}{(2fy+lx)^2} = \frac{(4fg-2fl)\,x\,dy}{(2fy+lx)^2} + \frac{2f\,dy}{2fy+lx}$, en ne faisant varier que y ; on a dans ce second cas, pour l'intégrale complète de la proposée, log. $(2fy+lx) - \frac{(2g-l)\,x}{2fy+lx} = a$. Le troisième cas est lorsque les deux facteurs sont imaginaires. Je fais alors $y\sqrt{f}+\frac{lx}{2\sqrt{f}} = z$, d'où $dy\sqrt{f} = dz$, $fy^2+lxy-kx^2 = z^2 - \frac{l^2+4kf}{4f}x^2$; après avoir substitué ces valeurs dans $\frac{(fy+gx)\,dy}{fy^2+lxy-kx^2}$, il vient $\frac{z\,dz+\frac{2g-l}{2\sqrt{f}}x\,dz}{z^2-\frac{l^2+4kf}{4f}x^2}$, dont l'intégrale, prise par rapport à z, égale log. $\left(z^2-\frac{l^2+4kf}{4f}x^2\right)+\frac{2g-l}{2\sqrt{f}}A$ tang. $\frac{2z\sqrt{f}}{x\sqrt{(-l^2-4kf)}}$. Ainsi lorsque l^2+4kf est une quantité négative, la proposée a pour intégrale complète log. $(fy^2+lxy-kx^2)+\frac{2g-l}{2\sqrt{f}}A$ tang. $\frac{2fy+lx}{x\sqrt{(-l^2-4kf)}} = a$. Il y a un autre cas qui paroît échapper, c'est celui où l'on auroit $fk-gi=0$; mais alors la proposée devient $efdt-hfdu+(ft+gu)(fdt-idu)=0$,

d'où l'on tire, en faisant $ft + gu = z$, $du = \frac{(e+z)\cdot dz}{eg+hf+(g+i)\cdot z}$ & $u = a + \frac{eg+hf+(g+i)\cdot z}{(g+i)^2} + \frac{ei-hf}{(g+i)^2}\log.\,[eg+hf+(g+i)\cdot z]$. Si $g+i=0$, à cause de $du = \frac{edz+zdz}{eg+hf}$, on aura $2u = a + \frac{2ez+z^2}{eg+hf}$.

(274). Soit proposée l'équation $dy + Pydx = Qdx$, que nous savons intégrer en en séparant les variables. Puisque Q ne renferme que x & des constantes, il y a certainement une fonction de x & de constantes par laquelle on pourra multiplier $dy + Pydx$ pour le rendre une différentielle exacte. Nommons X cette fonction inconnue, & $Xdy + XPydx$ sera une différentielle exacte. Ainsi la différentielle du co-efficient de dy, prise par rapport à x, & divisée par dx, doit être égale à la différentielle du co-efficient de dx, prise par rapport à y, & divisée par dy; ce qui donne $\frac{dX}{dx} = PX$. Mais parce que X est fonction de la seule variable x & de constantes, $\frac{dX}{dx}dx = dX$; donc $\frac{dX}{X} = Pdx$, d'où l'on tire log. $X = \int Pdx$ & $X = e^{\int Pdx}$. Or, en multipliant par $e^{\int Pdx}$ tous les termes de la proposée, on a $e^{\int Pdx}dy + e^{\int Pdx}Pydx = e^{\int Pdx}Qdx$, qui a pour intégrale complète $e^{\int Pdx}y = a + \int e^{\int Pdx}Qdx$; donc $y = e^{-\int Pdx}(a + \int e^{\int Pdx}Qdx)$.

(275). On appelle équations linéaires les équations dans lesquelles toutes les variables, excepté celle dont la différentielle première est constante, & leurs différentielles ne sont qu'à la première dimension : ainsi $A, B, C, \ldots\ldots, X$ étant des fonctions de x & de constantes, l'équation

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + U\frac{d^ny}{dx^n} = X,$$

peut représenter toutes les équations linéaires d'un ordre quelconque entre deux variables. Nous supposerons le facteur propre à rendre cette équation intégrable, de la forme de ϵdx, ϵ étant une fonction de x & de constantes.

Nous venons d'apprendre à trouver ce facteur lorsque l'équation est du premier ordre, telle que $Ay + B\frac{dy}{dx} = X$. On peut le trouver d'une manière plus simple encore ; car puisque le premier membre de l'équation $A\epsilon ydx + B\epsilon dy = X\epsilon dx$ est une différentielle exacte, son intégrale ne peut différer de $B\epsilon y$ que d'une fonction de x & de constantes que je nomme S'. Donc

$$A\epsilon ydx + B\epsilon dy = d(B\epsilon y + S') = B\epsilon dy + yd\cdot B\epsilon + dS';$$

& $dS' = \left(A\epsilon - \frac{d\cdot B\epsilon}{dx}\right)ydx$, expression qui seroit absurde, si $A\epsilon - \frac{d\cdot B\epsilon}{dx}$ n'étoit égale à zéro. On tire de cette équation $\frac{d\cdot B\epsilon}{B\epsilon} = \frac{Adx}{B}$,

log. $B\varrho = \int \frac{A\,dx}{B}$, & $B\varrho = e^{\int \frac{A\,dx}{B}}$. A cause de $dS' = 0$, ce qui donne S' = constante, on a pour l'intégrale finie complète de l'équation linéaire du premier ordre proposée $e^{\int \frac{A\,dx}{B}} y = a + \int e^{\int \frac{A\,dx}{B}} \frac{X}{B}\,dx$, ou

$$y = e^{-\int \frac{A\,dx}{B}} \left(a + \int e^{\int \frac{A\,dx}{B}} \frac{X}{B}\,dx \right).$$

(276). Je multiplie par $\varrho\,dx$ tous les termes de l'équation linéaire du second ordre $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} = X$, & il me vient

$$A\varrho y\,dx + B\varrho\,dy + C\varrho\,\frac{d^2y}{dx} = X\varrho\,dx,$$

dont le premier membre, par l'hypothèse, est une différentielle exacte. Il a donc pour intégrale $C\varrho\frac{dy}{dx}$ plus une fonction de y, x & de constantes que je nomme S', & par conséquent $A\varrho y\,dx + B\varrho\,dy + C\varrho\frac{d^2y}{dx} = d\left(C\varrho\frac{dy}{dx} + S'\right) = C\varrho\frac{d^2y}{dx} + \frac{d\cdot C\varrho}{dx}dy + dS'$, d'où l'on tire $dS' = \left(B\varrho - \frac{d\cdot C\varrho}{dx}\right)dy + A\varrho y\,dx$, & $S' = \left(B\varrho - \frac{d\cdot C\varrho}{dx}\right)y + R'$, R' ne devant renfermer que la seule variable x & des constantes. En différentiant il vient $dS' = \left(B\varrho - \frac{d\cdot C\varrho}{dx}\right)dy + \left(\frac{d\cdot B\varrho}{dx} - \frac{d^2\cdot C\varrho}{dx^2}\right)y\,dx + dR'$; & comparant les deux valeurs de dS', $dR' = \left(A\varrho - \frac{d\cdot B\varrho}{dx} + \frac{d^2\cdot C\varrho}{dx^2}\right)y\,dx$, expression qui ne peut être vraie, à moins que l'on ait (A)...... $A\varrho - \frac{d\cdot B\varrho}{dx} + \frac{d^2\cdot C\varrho}{dx^2} = 0$; d'où l'on tire $dR' = 0$, & R' = constante. Il suffira de trouver une valeur de ϱ qui satisfasse à l'équation A; car l'équation linéaire du premier ordre

$$\text{(B)}\ldots\ldots\ldots\ C\varrho\frac{dy}{dx} + \left(B\varrho - \frac{d\cdot C\varrho}{dx}\right)y = a + \int X\varrho\,dx$$

pourra être facilement intégrée, & on aura l'intégrale finie complète de la proposée. Si au lieu d'une valeur de ϱ, on en trouvoit deux, on auroit les deux intégrales premières complètes de la proposée; & éliminant $\frac{dy}{dx}$, son intégrale finie complète d'une manière plus simple encore.

Nommons $\varrho\,dx$ le facteur propre à rendre intégrable l'équation A, ou $\left(A - \frac{dB}{dx} + \frac{d^2C}{dx^2}\right)\varrho - \left(B - 2\frac{dC}{dx}\right)\frac{d\varrho}{dx} + C\frac{d^2\varrho}{dx^2} = 0$;

nous

nous trouverons, en opérant comme nous venons de faire sur la proposée, qu'elle a pour intégrale complète de l'ordre immédiatement inférieur

$$(C) \ldots\ldots\; C\psi\frac{d\sigma}{dx} - \left[\left(B - \frac{dC}{dx}\right)\cdot\psi + C\frac{d\psi}{dx}\right]\sigma = \text{constante},$$

ψ étant donné par l'équation (D) ...... $A\psi + B\frac{d\psi}{dx} + C\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$.

Il est à remarquer que l'équation (D) n'est autre que la proposée dans laquelle on auroit fait $X = 0$; d'où il suit qu'on aura l'intégrale finie complète de l'équation du second ordre $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} = X$, si on peut trouver une seule valeur de y qui satisfasse à cette équation dans le cas de $X = 0$.

Je fais $\psi = e^{\int \zeta dx}$, ζ étant une fonction de x & de constantes, d'où $\frac{d\psi}{dx} = \zeta e^{\int\zeta dx}$, $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(\zeta^2 + \frac{d\zeta}{dx}\right)e^{\int\zeta dx}$; & substituant ces valeurs dans l'équation D, on a pour déterminer ζ l'équation du premier ordre

$$(E) \ldots\ldots\; A + B\zeta + C\zeta^2 + C\frac{d\zeta}{dx} = 0.$$

Je mets dans l'équation C, après l'avoir divisée par $C\psi$, & avoir fait pour abréger $\frac{B - \frac{dC}{dx}}{C} = B_{,}$, pour ψ sa valeur $e^{\int\zeta dx}$, & je la change par-là en celle-ci $(C') \ldots\ldots\ldots\; \frac{d\sigma}{dx} - (B_{,} + \zeta)\sigma = \frac{\text{const.}}{C}e^{-\int\zeta dx}$; d'où l'on tire, après avoir fait la constante arbitraire $= 0$, car il ne faut que satisfaire à l'équation A, $\sigma = e^{\int(B_{,}+\zeta)dx}$. En substituant pour σ sa valeur dans l'équation B, dont on divisera d'abord tous les termes par $C\sigma$, on a

$$\frac{dy}{dx} - \zeta y = \frac{e^{-\int(B_{,}+\zeta)dx}}{C}\left(a + \int e^{\int(B_{,}+\zeta)dx}X\,dx\right).$$

Je multiplie cette équation linéaire du premier ordre par $e^{-\int\zeta dx}$, & intégrant ensuite, il vient pour l'intégrale finie complète de la proposée.

$$(I) \ldots\ldots\; y = e^{\int\zeta dx}\left[b + \int \frac{e^{-\int(B_{,}+2\zeta)dx}}{C}\left(adx + dx\int e^{\int(B_{,}+\zeta)dx}Xdx\right)\right].$$

On a dû prendre pour ζ une valeur qui satisfît à l'équation E; si on en eût trouvé deux, on auroit eu, en nommant l'une $\zeta 1$ & l'autre $\zeta 2$, les deux intégrales premières complètes

$$\frac{dy}{dx} - \zeta 1\, y = \frac{e^{-\int(B_{,}+\zeta 1)dx}}{C}\left(a + \int e^{\int(B_{,}+\zeta 1)dx}X\,dx\right),$$

$$\frac{dy}{dx} - \zeta 2\, y = \frac{e^{-\int(B_{,}+\zeta 2)dx}}{C}\left(b + \int e^{\int(B_{,}+\zeta 2)dx}X\,dx\right),$$

& éliminant $\frac{dy}{dx}$, (II) .... $y = \frac{1}{C\cdot(\zeta 2 - \zeta 1)} [e^{-\int (B_{,} + \zeta 1) dx}$ $(a + \int e^{\int (B_{,} + \zeta 1) dx} X dx) - e^{-\int (B_{,} + \zeta 2) dx} (b + \int e^{\int (B_{,} + \zeta 2) dx} X dx)]$.

L'équation C' a pour intégrale complète

$$\sigma = e^{\int (B_{,} + \zeta) dx} \left(a' + b' \int e^{-\int (B_{,} + 2\zeta) dx} \frac{dx}{C} \right),$$

a' & b' sont les deux constantes arbitraires. Je fais $b' = 0$ & $a' = 1$, puis $a' = 0$ & $b' = 1$, & j'ai les deux intégrales particulières $\sigma = e^{\int (B_{,} + \zeta) dx}$, $\sigma = e^{\int (B_{,} + \zeta) dx} \int e^{-\int (B_{,} + 2\zeta) dx} \frac{dx}{C}$. Ces deux valeurs de σ, que je nomme $\sigma 1$ & $\sigma 2$, étant substituées successivement dans l'equation B, on a les deux intégrales premières complètes de la proposée

$$\frac{dy}{dx} + \left(B_{,} - \frac{d\sigma 1}{\sigma 1 dx} \right) y = \frac{a + \int X \sigma 1 dx}{C \sigma 1},$$
$$\frac{dy}{dx} + \left(B_{,} - \frac{d\sigma 2}{\sigma 2 dx} \right) y = \frac{b + \int X \sigma 2 dx}{C \sigma 2};$$

& éliminant $\frac{dy}{dx}$, son intégrale finie complète

$$y = \frac{a\sigma 2 - b\sigma 1 + \sigma 2 \int X \sigma 1 dx - \sigma 1 \int X \sigma 2 dx}{C \left(\sigma 1 \frac{d\sigma 2}{dx} - \sigma 2 \frac{d\sigma 1}{dx} \right)}.$$ Mais $\frac{d\sigma 1}{dx} = (B_{,} + \zeta) \sigma 1$; $\frac{d\sigma 2}{dx} = (B_{,} + \zeta) \sigma 2 - \frac{1}{C} e^{-\int \zeta dx}$; donc $C \left(\sigma 1 \frac{d\sigma 2}{dx} - \sigma 2 \frac{d\sigma 1}{dx} \right) = \sigma 1 e^{-\int \zeta dx} = e^{\int B_{,} dx}$; & substituant, on a $y = e^{\int \zeta dx} [a \int e^{-\int (B_{,} + 2\zeta) dx} \frac{dx}{C} - b + \int e^{-\int (B_{,} + 2\zeta) dx} \frac{dx}{C} \cdot \int e^{\int (B_{,} + 2\zeta) dx} X dx - \int e^{\int (B_{,} + \zeta) dx} X dx \int e^{-\int (B_{,} + 2\zeta) dx} \frac{dx}{C}]$; formule qui est identiquement la même que celle marquée I, car $\int e^{-\int (B_{,} + 2\zeta) dx} \frac{dx}{C} \int e^{\int (B_{,} + \zeta) dx} X dx =$
$\int e^{-\int (B_{,} + 2\zeta) dx} \frac{dx}{C} \cdot \int e^{\int (B_{,} + \zeta) dx} X dx -$
$\int e^{\int (B_{,} + \zeta) dx} X dx \int e^{-\int (B_{,} + 2\zeta) dx} \frac{dx}{C}$.

(277.) Soit pris pour exemple l'équation $iy + h \frac{dy}{dx} + g \frac{d^2 y}{dx^2} = X$, g, h & i sont des constantes. On aura $B_{,} = \frac{h}{g}$, & pour déterminer ζ l'équation $i + h\zeta + g\zeta^2 + g \frac{d\zeta}{dx} = 0$, à laquelle on satisfait en prenant ζ égal à une

conſtante que je nomme f qui ſera donnée par l'équation du ſecond degré $gf^2 + hf + i = 0$. Mettant f pour C, & $\frac{h}{g}$ pour $B_{,}$ dans la formule I, il vient $y = e^{fx}\left[b + \int \frac{e^{-\frac{h+2fg}{g}x}}{g}\left(a\,dx + dx\int e^{\frac{h+gf}{g}x} X\,dx\right)\right]$.

1°. Si les deux racines de l'équation du ſecond degré ſont égales, ou ſi $f = -\frac{h}{2g}$; on a $y = e^{-\frac{hx}{2g}}\left[b + \frac{ax}{g} + \int \frac{dx}{g}\int e^{\frac{hx}{2g}} X\,dx\right] = e^{-\frac{hx}{2g}}\left[b + \frac{ax}{g} + \frac{x}{g}\int e^{\frac{hx}{2g}} X\,dx - \frac{1}{g}\int e^{\frac{hx}{2g}} Xx\,dx\right]$. 2°. Si l'équation du ſecond degré a ſes deux racines réelles & inégales; nommons alors l'une des deux valeurs de f, $f1$, l'autre ſera $-\left(f1 + \frac{h}{g}\right)$ que nous ferons $= f2$; & nous aurons $y = e^{f1x}\left[b + \int \frac{e^{(f2-f1)x}}{g}\left(a\,dx + dx\int e^{-f2x} X\,dx\right)\right]$ $= e^{f1x}\left(b + \frac{ae^{(f2-f1)x}}{g(f2-f1)} + \frac{e^{(f2-f1)x}}{g(f2-f1)}\int e^{-f2x} X\,dx - \frac{1}{g(f2-f1)}\int e^{-f1x} X\,dx\right) = be^{f1x} + ae^{f2x} + \frac{e^{f2x}}{g(f2-f1)}\int e^{-f2x} X\,dx - \frac{e^{f1x}}{g(f2-f1)}\int e^{-f1x} X\,dx$, en mettant a pour $\frac{a}{g\cdot(f2-f1)}$. On auroit trouvé le même réſultat, en ſubſtituant dans la formule II pour $B_{,} + C1$ & $B_{,} + C2$ leurs valeurs $f2$ & $f1$. 3°. Si les deux racines de l'équation du ſecond degré ſont imaginaires; en repréſentant par $-\frac{h}{2g} - h'\sqrt{-1}$ & $-\frac{h}{2g} + h'\sqrt{-1}$ les deux valeurs de f dans cette hypothèſe, on a $y = e^{-\frac{hx}{2g}}\left(be^{-h'x\sqrt{-1}} + \frac{ae^{h'x\sqrt{-1}}}{2gh'\sqrt{-1}} + \frac{e^{h'x\sqrt{-1}}}{2gh'\sqrt{-1}}\int e^{\left(\frac{h}{2g} - h'\sqrt{-1}\right)x} X\,dx - \frac{e^{-h'x\sqrt{-1}}}{2gh'\sqrt{-1}}\int e^{\left(\frac{h}{2g} + h'\sqrt{-1}\right)x} X\,dx\right)$. Mais $e^{h'x\sqrt{-1}} = \cos. h'x + \sqrt{-1}\,\sin. h'x$, $e^{-h'x\sqrt{-1}} = \cos. h'x - \sqrt{-1}\,\sin. h'x$; donc, mettant a pour $\frac{a}{2gh'\sqrt{-1}} + b$ & b pour $\frac{a}{2gh'} - b\sqrt{-1}$, ce qui eſt permis, puiſque a & b ſont arbitraires, on a $y = e^{-\frac{hx}{2g}}\left(a\cos. h'x + b\sin. h'x + \frac{\sin. h'x}{gh'}\int e^{\frac{hx}{2g}}\cos. h'x \cdot X\,dx - \frac{\cos. h'x}{gh'}\int e^{\frac{hx}{2g}}\sin. h'x \cdot X\,dx\right)$.

(278). Soit encore proposée d'intégrer l'équation

$iy + h(k+lx)\frac{dy}{dx} + g(k+lx)^2\frac{d^2y}{dx^2} = X$. L'équation E devient

$i + h(k+lx)\varsigma + g(k+lx)^2\left(\varsigma^2 + \frac{d\varsigma}{dx}\right) = 0$, à laquelle on satisfait en faisant $\varsigma = \frac{f}{k+lx}$, & f sera donné par l'équation du second degré $gf^2 + (h - gl)\cdot f + i = 0$. On a donc $e^{\int \varsigma dx} = (k+lx)^{\frac{f}{l}}$; &, à cause de $B_{,} = \frac{h-2gl}{g\cdot(k+lx)}$, on a

$e^{\int(B_{,}+\varsigma)dx} = (k+lx)^{\frac{h+gf-2gl}{gl}}$, $e^{\int(B_{,}+2\varsigma)dx} = (k+lx)^{\frac{h+2gf-2gl}{gl}}$.

En substituant ces valeurs dans l'équation I, il vient $y =$

$$(k+lx)^{\frac{f}{l}}\left[b + \int \frac{(k+lx)^{-\frac{h+2gf-2gl}{gl}}}{g}\left(adx + dx\int(k+lx)^{\frac{h+gf-2gl}{gl}}Xdx\right)\right].$$

1°. Si les deux racines de l'équation du second degré sont égales, ou si $f = -\frac{h-gl}{2g}$, on a $y = (k+lx)^{-\frac{h-gl}{2gl}}\left[b + \frac{a}{gl}\log.(k+lx) + \int\left(\frac{dx}{g\cdot(k+lx)}\int(k+lx)^{\frac{h-3gl}{2gl}}Xdx\right)\right] = (k+lx)^{-\frac{h-gl}{2gl}}$

$\left(b + \frac{a}{gl}\log.(k+lx) + \frac{1}{gl}\log.(k+lx)\int(k+lx)^{\frac{h-3gl}{2gl}}Xdx - \frac{1}{gl}\int(k+lx)^{\frac{h-3gl}{2gl}}\log.(k+lx)\cdot Xdx\right)$.

2°. Si l'équation du second degré a ses deux racines réelles & inégales ; en nommant $f1$ l'une des valeurs de f, l'autre sera $-\left(f1 + \frac{h-gl}{g}\right)$ que nous ferons $= f2$; & nous aurons $y = (k+lx)^{\frac{f1}{l}}\left[b + \int\frac{(k+lx)^{\frac{f2-f1}{l}-1}}{g}\left(adx + dx\int(k+lx)^{-\frac{f2}{l}+1}Xdx\right)\right] = b(k+lx)^{\frac{f1}{l}} +$

$\frac{a}{g\cdot(f2-f1)}(k+lx)^{\frac{f2}{l}} + \frac{(k+lx)^{\frac{f2}{l}}}{g\cdot(f2-f1)}\int(k+lx)^{-\frac{f2}{l}+1}Xdx - \frac{(k+lx)^{\frac{f1}{l}}}{g\cdot(f2-f1)}\int(k+lx)^{-\frac{f1}{l}+1}Xdx$. On auroit trouvé le même résultat en substituant dans l'équation II pour $\varsigma 1$ & $\varsigma 2$ leurs valeurs $\frac{f1}{k+lx}$ & $\frac{f2}{k+lx}$.

3°. Si les deux racines de l'équation du second degré sont imaginaires ; en représentan

représentant par $h' - h'' \sqrt{-1}$ & $h' + h'' \sqrt{-1}$ les deux valeurs de f dans cette hypothèse, on a

$$y = (k + lx)^{\frac{h'}{l}} \Big[b(k + lx)^{-\frac{h'' \sqrt{-1}}{l}} + \frac{a(k + lx)^{\frac{h''\sqrt{-1}}{l}}}{2gh''\sqrt{-1}} + \frac{(k + lx)^{\frac{h''\sqrt{-1}}{l}}}{2gh''\sqrt{-1}} \int (k + lx)^{1 - \frac{h' + h''\sqrt{-1}}{l}} X dx - \frac{(k + lx)^{-\frac{h''\sqrt{-1}}{l}}}{2gh''\sqrt{-1}} \int (k + lx)^{1 - \frac{h' - h''\sqrt{-1}}{l}} X dx \Big].$$

Je fais $(k + lx)^{\pm \frac{h''\sqrt{-1}}{l}} = e^{\pm s\sqrt{-1}}$, &, prenant les logarithmes de part & d'autre, il vient $\frac{h'}{l} \log. (k + lx) = s$; donc

$$(k + lx)^{\pm \frac{h''\sqrt{-1}}{l}} = \cos. \left(\frac{h''}{l} \log. [k + lx]\right) \pm \sqrt{-1} \sin. \left(\frac{h''}{l} \log. [k + lx]\right).$$

Ainsi lorsque les deux valeurs de f sont imaginaires, on a, en mettant a pour $\frac{a}{2gh''\sqrt{-1}} + b$, b pour $\frac{a}{2gh''} - b\sqrt{-1}$,

$$y = (k + lx)^{\frac{h'}{l}} \Big[a \cos. \left(\frac{h''}{l} \log. [k + lx]\right) + b \sin. \left(\frac{h''}{l} \log. [k + lx]\right) + \frac{\sin. \left(\frac{h''}{l} \log. [k + lx]\right)}{gh''} \int (k + lx)^{1 - \frac{h'}{l}} \cos. \left(\frac{h''}{l} \log. [k + lx]\right) X dx - \frac{\cos. \left(\frac{h''}{l} \log. [k + lx]\right)}{gh''} \int (k + lx)^{1 - \frac{h'}{l}} \sin. \left(\frac{h''}{l} \log. [k + lx]\right) X dx.$$

On auroit pu tout d'un coup faire usage de l'équation A, qui devient dans ce cas particulier $i\sigma - h \frac{d \cdot \sigma (k + lx)}{dx} + g \frac{d^2 \cdot \sigma (k + lx)^2}{dx^2} = 0$, & à laquelle on satisfait en prenant $\sigma = (k + lx)^{\lambda}$, λ étant donné par l'équation du second degré $i - hl \cdot (\lambda + 1) + gl^2 \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 2) = 0$. Soient alors $\lambda 1$ & $\lambda 2$ les deux valeurs de λ; en substituant dans l'équation B pour σ successivement $(k + lx)^{\lambda 1}$ & $(k + lx)^{\lambda 2}$, on aura les deux intégrales premières de la proposée. Je divise la première par $(k + lx)^{\lambda 1 + 1}$ & l'autre par $(k + lx)^{\lambda 2 + 1}$, & je les change par-là en celles-ci,

$$g(k + lx) \frac{dy}{dx} + [h - gl \cdot (\lambda 1 + 2)] y = (k + lx)^{-\lambda 1 - 1} [a + \int (k + lx)^{\lambda 1} X dx] = \Pi 1,$$

$$g(k + lx) \frac{dy}{dx} + [h - gl \cdot (\lambda 2 + 2)] y = (k + lx)^{-\lambda 2 - 1} [b + \int (k + lx)^{\lambda 2} X dx] = \Pi 2;$$

d'où l'on tire, en éliminant $\frac{dv}{dx}$, $y = \frac{\Pi 1 - \Pi 2}{gl \cdot (\lambda 2 - \lambda 1)}$, résultat qui n'est pas différent de celui que nous venons de trouver, car $f 2 = -l(\lambda 2 + 1)$ & $f 1 = -l(\lambda 1 + 1)$, &c. Cet exemple-ci renferme le précédent, & il sera facile de passer de l'un à l'autre, si l'on veut faire attention que lorsque $k = 1$ & $l = 0$, on a $\frac{\log.(k + lx)}{l} = x$, &, c étant un nombre quelconque, $(k + lx)^{\frac{c}{l}} = e^{cx}$. En effet, lorsque $k = 1$, $\frac{\log.(k + lx)}{l} = x - \frac{lx^2}{2} + \&c.$, dont le second membre, lorsque $l = 0$, se réduit à x; donc, dans la même hypothèse $(k + lx)^{\frac{c}{l}} = e^{cx}$.

(279). Je multiplie par σdx tous les termes de l'équation linéaire du troisième ordre $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} = X$, & elle devient par-là $A\sigma y dx + B\sigma dy + C\sigma\frac{d^2y}{dx} + D\sigma\frac{d^3y}{dx^2} = X\sigma dx$, dont le premier membre étant par l'hypothèse une différentielle exacte, a pour intégrale $D\sigma\frac{d^2y}{dx^2}$ plus une fonction de $\frac{dy}{dx}$, y, x & de constantes que je nomme S'. Donc $A\sigma y dx + B\sigma dy + C\sigma\frac{d^2y}{dx} + D\sigma\frac{d^3y}{dx^2} = d\left(D\sigma\frac{d^2y}{dx^2} + S'\right) =$ $D\sigma\frac{d^3y}{dx^2} + \frac{d \cdot D\sigma}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx} + dS'$; d'où l'on tire $dS' = \left(C\sigma - \frac{d \cdot D\sigma}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx} + B\sigma dy + A\sigma y dx$, & $S' = \left(C\sigma - \frac{d \cdot D\sigma}{dx}\right)\frac{dy}{dx} +$ une fonction de y, x & de constantes que je nomme R'. En différentiant, il vient $dS' = \left(C\sigma - \frac{d \cdot D\sigma}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx} + \left(\frac{d \cdot C\sigma}{dx} - \frac{d^2 \cdot D\sigma}{dx^2}\right)dy + dR'$; & comparant les deux valeurs de dS', $dR' = \left(B\sigma - \frac{d \cdot C\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot D\sigma}{dx^2}\right)dy + A\sigma y dx$, d'où $R' = \left(B\sigma - \frac{d \cdot C\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot D\sigma}{dx^2}\right)y + Q'$, Q étant une fonction de la seule variable x & de constantes. On a $dR' =$ $\left(B\sigma - \frac{d \cdot C\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot D\sigma}{dx^2}\right)dy + \left(\frac{d \cdot B\sigma}{dx} - \frac{d^2 \cdot C\sigma}{dx^2} + \frac{d^3 \cdot D\sigma}{dx^3}\right)y dx + dQ'$; & comparant les deux valeurs de dR', $dQ' =$ $\left(A\sigma - \frac{d \cdot B\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot C\sigma}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot D\sigma}{dx^3}\right)y dx$, expression qui ne peut être vraie, à moins que l'on n'ait (A) . . . $A\sigma - \frac{d \cdot B\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot C\sigma}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot D\sigma}{dx^3} = 0$;

d'où l'on tire $dQ' = 0$, $Q' =$ conſtante, & l'équation linéaire du ſecond ordre

$$(B)\ldots D\sigma\frac{d^2y}{dx^2} + \left(C\sigma - \frac{d\cdot D\sigma}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + \left(B\sigma - \frac{d\cdot C\sigma}{dx} + \frac{d^2\cdot D\sigma}{dx^2}\right)y = a + \int X\sigma dx.$$

Si on trouve une valeur de σ qui ſatisfaſſe à l'équation A, on aura, en ſubſtituant cette valeur dans l'équation B, une des intégrales premières complètes de la propoſée; ſi on trouve deux valeurs de σ, on aura deux des intégrales premières complètes, &, éliminant $\frac{d^2 y}{dx^2}$, une équation linéaire du premier ordre qui étant intégrée complétement, comme nous ſavons qu'on peut toujours le faire, donnera l'intégrale finie complète de la propoſée. Si on trouve trois valeurs de σ, on aura les trois intégrales premières complètes de la propoſée; & pour trouver ſon intégrale finie, il ſuffira d'éliminer $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ au moyen de ces trois équations.

Nommons Ψdx le facteur propre à rendre intégrable l'équation A, ou $\left(A - \frac{dB}{dx} + \frac{d^2C}{dx^2} - \frac{d^3D}{dx^3}\right)\sigma - \left(B - 2\frac{dC}{dx} + 3\frac{d^2D}{dx^2}\right)\frac{d\sigma}{dx} + \left(C - 3\frac{dD}{dx}\right)\frac{d^2\sigma}{dx^2} - D\frac{d^3\sigma}{dx^3} = 0$; nous trouverons, en opérant comme nous venons de faire ſur la propoſée, qu'elle a pour intégrale complète du ſecond ordre

$$(C)\ldots\ldots D\Psi\frac{d^2\sigma}{dx^2} - \left[\left(C - 2\frac{dD}{dx}\right)\cdot\Psi + D\frac{d\Psi}{dx}\right]\frac{d\sigma}{dx} + \left[\left(B - \frac{dC}{dx} + \frac{d^2D}{dx^2}\right)\cdot\Psi + \left(C - \frac{dD}{dx}\right)\cdot\frac{d\Psi}{dx} + D\frac{d^2\Psi}{dx^2}\right]\sigma = \text{conſt.},$$

Ψ étant donné par l'équation

$$(D)\ldots\ldots\ldots A\Psi + B\frac{d\Psi}{dx} + C\frac{d^2\Psi}{dx^2} + D\frac{d^3\Psi}{dx^3} = 0.$$

Il eſt à remarquer que l'équation D n'eſt autre que la propoſée dans laquelle on auroit fait $X = 0$; d'où il ſuit qu'on aura l'intégrale finie complète de l'équation du troiſième ordre $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} = X$, ſi on peut trouver deux valeurs de y qui ſatisfaſſent à cette équation dans le cas de $X = 0$.

Je fais $\Psi = e^{\int\zeta dx}$, d'où $\frac{d\Psi}{dx} = \zeta e^{\int\zeta dx}$, $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \zeta^2 e^{\int\zeta dx} + \frac{d\zeta}{dx}e^{\int\zeta dx}$, $\frac{d^3\Psi}{dx^3} = \zeta^3 e^{\int\zeta dx} + 3\zeta\frac{d\zeta}{dx}e^{\int\zeta dx} + \frac{d^2\zeta}{dx^2}e^{\int\zeta dx}$; en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation D, on a pour déterminer ζ l'équation du ſecond ordre

$$(E)\ldots\ldots\ldots A + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 + (C + 3D\zeta)\frac{d\zeta}{dx} + D\frac{d^2\zeta}{dx^2} = 0.$$

Je ſuppoſe qu'on ait trouvé deux valeurs de ζ qui ſatisfaſſent à l'équation précédente, ſavoir ζ_1 & ζ_2; puis je mets dans l'équation C, après avoir diviſé tous ſes termes par Ψ, pour Ψ ſucceſſivement $e^{\int\zeta_1 dx}$, $e^{\int\zeta_2 dx}$; & j'ai de cette ma-

nière les deux équations du second ordre

$$D\frac{d^2\sigma}{dx^2}-\left[C-2\frac{dD}{dx}+D\zeta 1\right]\frac{d\sigma}{dx}+\left[B-\frac{dC}{dx}+\frac{d^2D}{dx^2}+\left(C-\frac{dD}{dx}\right)\cdot \zeta 1+D\cdot\left(\zeta^2 1+\frac{d\zeta 1}{dx}\right)\right]\sigma=a' e^{-\int\zeta 1 dx},$$

$$D\frac{d^2\sigma}{dx^2}-\left[C-2\frac{dD}{dx}+D\zeta 2\right]\frac{d\sigma}{dx}+\left[B-\frac{dC}{dx}+\frac{d^2D}{dx^2}+\left(C-\frac{dD}{dx}\right)\cdot \zeta 2+d\cdot\left(\zeta^2 2+\frac{d\zeta 2}{dx}\right)\right]\sigma=b' e^{-\int\zeta 2 dx},$$

a' & b' sont deux constantes arbitraires. Avec ces deux équations j'élimine $\frac{d^2\sigma}{dx^2}$, & il vient l'équation linéaire du premier ordre

$$(\zeta 2-\zeta 1)\frac{d\sigma}{dx}-\left[\frac{C-\frac{dD}{dx}}{D}\cdot(\zeta 2-\zeta 1)+\zeta^2 2-\zeta^2 1+\frac{d(\zeta 2-\zeta 1)}{dx}\right]\sigma$$

$$=\frac{a' e^{-\int\zeta 1 dx}-b' e^{-\int\zeta 2 dx}}{D}, \text{ ou } \frac{d\sigma}{dx}-\left[\frac{C-\frac{dD}{dx}}{D}+\zeta 2+\zeta 1+\frac{d(\zeta 2-\zeta 1)}{(\zeta 2-\zeta 1)dx}\right]\sigma=\frac{a' e^{-\int\zeta 1 dx}-b' e^{-\int\zeta 2 dx}}{D(\zeta 2-\zeta 1)}$$

; d'où l'on tire, en faisant pour abréger $\frac{C-\frac{dD}{dx}}{D}+\zeta 2+\zeta 1+\frac{d(\zeta 2-\zeta 1)}{(\zeta 2-\zeta 1)dx}=\zeta'$, $\sigma=e^{\int\zeta' dx}\left[c'+\int e^{-\int\zeta' dx}\cdot\frac{a' dx\, e^{-\int\zeta 1 dx}-b' dx\, e^{-\int\zeta 2 dx}}{D(\zeta 2-\zeta 1)}\right]$, c'est l'intégrale complète de l'équation A. A cause des trois constantes arbitraires dont on fera successivement deux égales à zéro, & la troisième égale à ± 1 ; on a ces trois intégrales particulières $\sigma=e^{\int\zeta' dx}$, $\sigma=e^{\int\zeta' dx}\int\frac{e^{-\int(\zeta'+\zeta 1)dx}dx}{D(\zeta 2-\zeta 1)}$,
$\sigma=e^{\int\zeta' dx}\int\frac{e^{-\int(\zeta'+\zeta 2)dx}dx}{D(\zeta 2-\zeta 1)}$. Ces valeurs de σ, que je nomme $\sigma 1$; $\sigma 2$, $\sigma 3$, étant substituées successivement dans l'équation B, on en tire

$$D\sigma 1\frac{d^2y}{dx^2}+\left(C\sigma 1-\frac{d\cdot D\sigma 1}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(B\sigma 1-\frac{d\cdot C\sigma 1}{dx}+\frac{d^2\cdot D\sigma 1}{dx^2}\right)y=a+\int X\sigma 1\,dx,$$

$$D\sigma 2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(C\sigma 2-\frac{d\cdot D\sigma 2}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(B\sigma 2-\frac{d\cdot C\sigma 2}{dx}+\frac{d^2\cdot D\sigma 2}{dx^2}\right)y=b+\int X\sigma 2\,dx,$$

$$D\sigma 3\frac{d^2y}{dx^2}+\left(C\sigma 3-\frac{d\cdot D\sigma 3}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(B\sigma 3-\frac{d\cdot C\sigma 3}{dx}+\frac{d^2\cdot D\sigma 3}{dx^2}\right)y=c+\int X\sigma 3\,dx.$$

Avec

Avec ces trois intégrales premières complètes de la proposée, on éliminera $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$; & après avoir fait pour abréger $\sigma 1 \frac{d \cdot D\sigma 2}{dx} - \sigma 2 \frac{d \cdot D\sigma 1}{dx} = \sigma_, 2$, $\sigma 1 \left(\frac{d \cdot C\sigma 2}{dx} - \frac{d^2 \cdot D\sigma 2}{dx^2}\right) - \sigma 2 \left(\frac{d \cdot C\sigma 1}{dx} - \frac{d^2 \cdot D\sigma 1}{dx^2}\right) = \sigma_{,,} 2$, $\sigma 1 \frac{d \cdot D\sigma 3}{dx} - \sigma 3 \frac{d \cdot D\sigma 1}{dx} = \sigma_, 3$, $\sigma 1 \left(\frac{d \cdot C\sigma 3}{dx} - \frac{d^2 \cdot D\sigma 3}{dx^2}\right) - \sigma 3 \left(\frac{dC\sigma 1}{dx} - \frac{d^2 \cdot D\sigma 1}{dx^2}\right) = \sigma_{,,} 3$, on aura pour l'intégrale finie complète de la proposée, $y =$

$$\frac{(\sigma 2\sigma_, 3 - \sigma 3\sigma_, 2)(a + \int X\sigma 1\, dx) - \sigma 1\sigma_, 3(b + \int X\sigma 2\, dx) + \sigma 1\sigma_, 2(c + \int X\sigma 3\, dx)}{\sigma_, 3\, \sigma_{,,} 2 - \sigma_, 2\, \sigma_{,,} 3}.$$

(280). S'il s'agissoit d'intégrer

$$iy + h(k + lx)\frac{dy}{dx} + g(k + lx)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + f(k + lx)^3 \frac{d^3 y}{dx^3} = X;$$

on ne rencontreroit aucune difficulté; car l'équation A devient alors

$$i\sigma - h\frac{d \cdot \sigma(k + lx)}{dx} + g\frac{d^2 \cdot \sigma(k + lx)^2}{dx^2} - f\frac{d^3 \cdot \sigma(k + lx)^3}{dx^3} = 0;$$

à laquelle on satisfera en faisant $\sigma = (k + lx)^\lambda$, & λ sera donné par l'équation du troisième degré $i - hl \cdot (\lambda + 1) + gl^2 \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 2) - fl^3 \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda + 3) = 0$. Mettant ensuite pour σ sa valeur dans l'équation B, on a, après avoir divisé tous les termes par $(k + lx)^{\lambda + 1}$, $f(k + lx)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [g - fl \cdot (\lambda + 3)](k + lx)\frac{dy}{dx} + [h - gl \cdot (\lambda + 2) + fl^2 \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda + 3)]y = (k + lx)^{-\lambda - 1}[a + \int (k + lx)^\lambda X dx]$, & le problême est resolu. En effet, toute équation du troisième degré ayant nécessairement une racine réelle, on prendra pour λ celle de ses valeurs qui est réelle, & il ne sera plus question que d'intégrer une équation du second ordre, comme nous savons qu'on peut le faire dans tous les cas possibles. Si l'équation du troisième degré a ses racines inégales, & si on a par conséquent trois valeurs de λ que je nomme $\lambda 1$, $\lambda 2$, $\lambda 3$; il sera plus court de chercher les trois intégrales premières de la proposée. Or, si l'on fait $(k + lx)^{-\lambda - 1}[a + \int (k + lx)^\lambda X dx] = \Pi$, & que $\Pi 1$, $\Pi 2$, $\Pi 3$ soient ce que devient Π lorsque λ devient successivement $\lambda 1$, $\lambda 2$, $\lambda 3$, on aura

$$f(k + lx)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [g - fl \cdot (\lambda 1 + 3)][k + lx]\frac{dy}{dx} + [h - gl \cdot (\lambda 1 + 2) + fl^2 \cdot (\lambda 1 + 2) \cdot (\lambda 1 + 3)]y = \Pi 1,$$

$$f(k + lx)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [g - fl \cdot (\lambda 2 + 3)][k + lx]\frac{dy}{dx} + [h - gl \cdot (\lambda 2 + 2) + fl^2 \cdot (\lambda 2 + 2) \cdot (\lambda 2 + 3)]y = \Pi 2,$$

$$f(k + lx)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [g - fl \cdot (\lambda 3 + 3)][k + lx]\frac{dy}{dx} + [h - gl \cdot (\lambda 3 + 2) + fl^2 \cdot (\lambda 3 + 2) \cdot (\lambda 3 + 3)]y = \Pi 3;$$

d'où l'on tire, en éliminant $\frac{d^2 y}{dx^2}$ & $\frac{dy}{dx}$,

$$y = \frac{\Pi 1}{fl^2(\lambda 2 - \lambda 1)(\lambda 3 - \lambda 1)} - \frac{\Pi 2}{fl^2(\lambda 2 - \lambda 1)(\lambda 3 - \lambda 2)} + \frac{\Pi 3}{fl^2(\lambda 3 - \lambda 1)(\lambda 3 - \lambda 2)};$$

c'eſt l'intégrale finie complète de la propoſée, ſi chacune des quantités $\Pi 1$, $\Pi 2$, $\Pi 3$ ne renferme point la même conſtante arbitraire. Suppoſons que l'équation du troiſième degré ait deux racines imaginaires, & que par conſéquent deux des valeurs de λ, par exemple $\lambda 2$ & $\lambda 3$, ſoient des quantités imaginaires telles que $\lambda' - \lambda'' \sqrt{-1}$, $\lambda' + \lambda'' \sqrt{-1}$. On voit d'abord que $(\lambda 2 - \lambda 1) \cdot (\lambda 3 - \lambda 1)$ eſt une quantité réelle, & qu'ainſi le premier terme de la valeur de y eſt réel. Repréſentons les diviſeurs des deux autres par $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ & $-\alpha + \beta \sqrt{-1}$; ces deux termes deviendront $-\frac{(k+lx)^{-\lambda'-1}}{\alpha^2+\beta^2}\Big[(\alpha - \beta \sqrt{-1})$ $(k+lx)^{\lambda'' \sqrt{-1}}[b + \int (k+lx)^{\lambda' - \lambda'' \sqrt{-1}} X dx] + (\alpha + \beta \sqrt{-1})$ $(k+lx)^{-\lambda'' \sqrt{-1}}[c + \int (k+lx)^{\lambda' + \lambda'' \sqrt{-1}} X dx]\Big]$; ou, faiſant attention que $(k+lx)^{\pm \lambda'' \sqrt{-1}} = \cos.[\lambda'' \log.(k+lx)] \pm \sqrt{-1} \sin.[\lambda'' \log.(k+lx)]$, & n'oubliant pas de faire les réductions néceſſaires, $-\frac{(k+lx)^{-\lambda'-1}}{\alpha^2+\beta^2}$ $\Big[b \sin.[\lambda'' \log.(k+lx)] + c \cos.[\lambda'' \log.(k+lx)] + 2[\alpha \sin.(\lambda'' \log.(k+lx)) - \beta \cos.(\lambda'' \log.(k+lx))] \int (k+lx)^{\lambda'} \sin.[\lambda'' \log.(k+lx)] X dx + 2[\alpha \cos.(\lambda'' \log.(k+lx)) + \beta \sin.[\lambda'' \log.(k+lx))] \int (k+lx)^{\lambda'} \cos.[\lambda'' \log.(k+lx) X dx\Big]$, quantité toute réelle.

(281). Je multiplie par σdx tous les termes de l'équation linéaire de l'ordre n, & elle devient par-là

$$A\sigma y dx + B\sigma dy + C\sigma \frac{d^2 y}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots + U\sigma \frac{d^n y}{dx^{n-1}} = X\sigma dx,$$

dont le premier membre étant par l'hypothèſe une différentielle exacte, a pour intégrale $U\sigma \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A'$. Or

$$U\sigma \frac{d^n y}{dx^{n-1}} + \frac{d \cdot U\sigma}{dx} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-2}} + dA' = U\sigma \frac{d^n y}{dx^{n-1}} + T\sigma \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-2}} + \&c.;$$

donc $dA' = \left(T\sigma - \frac{d \cdot U\sigma}{dx}\right) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-2}} + S\sigma \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-3}} + \&c.$, &

$A' = \left(T\sigma - \frac{d \cdot U\sigma}{dx}\right) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + B'$. En différentiant, il vient

$$dA' = \left(T\sigma - \frac{d \cdot U\sigma}{dx}\right) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-2}} + \left(\frac{d \cdot T\sigma}{dx} - \frac{d^2 \cdot U\sigma}{dx^2}\right) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-3}} + dB';$$

& comparant le deux valeurs de

$$dA', dB' = \left(S\sigma - \frac{d \cdot T\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot U\sigma}{dx^2}\right) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-1}} + R\sigma \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-4}} + \&c.,$$

d'où $B' = \left(S\sigma - \frac{d \cdot T\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot U\sigma}{dx^2}\right) \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-1}} + C'$.

En opérant toujours de la même manière, on trouvera

$$dC = \left(R\sigma - \frac{d \cdot S\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot T\sigma}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot U\sigma}{dx^3}\right) \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-4}} + Q\sigma \frac{d^{n-4} y}{dx^{n-5}} + \&c.,$$

$$\& \; C = \left(R\sigma - \frac{d \cdot S\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot T\sigma}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot U\sigma}{dx^3}\right) \frac{d^{n-4} y}{dx^{n-4}} + D';$$

$$dD' = \left(Q\sigma - \frac{d \cdot R\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot S\sigma}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot T\sigma}{dx^3} + \frac{d^4 \cdot U\sigma}{dx^4}\right) \frac{d^{n-4} y}{dx^{n-4}} + P\sigma \frac{d^{n-5} y}{dx^{n-5}} + \&c.,$$

$$\& \; D' = \left(Q\sigma - \frac{d \cdot R\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot S\sigma}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot T\sigma}{dx^3} + \frac{d^4 \cdot U\sigma}{dx^4}\right) \frac{d^{n-5} y}{dx^{n-6}} + E', \&c.$$

Enfin on verra aiſément que σ étant donné par l'équation

$$(A) \ldots\ldots\ldots A\sigma - \frac{d \cdot B\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot C\sigma}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot C\sigma}{dx^3} + \ldots\ldots\ldots \pm \frac{d^n \cdot U\sigma}{dx^n} = 0;$$

la propoſée a pour intégrale de l'ordre immédiatement inférieur (B) ....

$$U\sigma \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \left(T\sigma - \frac{d \cdot U\sigma}{dx}\right) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \left(S\sigma - \frac{d \cdot T\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot U\sigma}{dx^2}\right)$$
$$\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \left(R\sigma - \frac{d \cdot S\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot T\sigma}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot U\sigma}{dx^3}\right) \frac{d^{n-4} y}{dx^{n-4}} + \ldots\ldots \mp$$
$$\left(B\sigma - \frac{d \cdot C\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot D\sigma}{dx^2} - \ldots\ldots\ldots \pm \frac{d^{n-1} \cdot U\sigma}{dx^{n-1}}\right) y = a + \int X\sigma dx.$$

Si on trouvoit $n - 1$ valeurs de σ qui ſatisfiſſent à l'équation A, on auroit, en ſubſtituant ſucceſſivement ces valeurs dans l'équation B, $n - 1$ intégrales premières complètes de la propoſée; &, éliminant $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, on parviendroit à une équation linéaire du premier ordre, qui étant intégrée complétement, donneroit l'intégrale finie complète de la propoſée.

Nommons ψdx le facteur propre à rendre intégrable l'équation A, ou

$$\left(A - \frac{dB}{dx} + \frac{d^2 C}{dx^2} - \frac{d^3 D}{dx^3} + \&c.\right)\sigma - \left(B - 2\frac{dC}{dx} + 3\frac{d^2 D}{dx^2} - \&c.\right)$$
$$\frac{d\sigma}{dx} + \left(C - 3\frac{dD}{dx} + \&c.\right)\frac{d^2 \sigma}{dx^2} - \ldots\ldots \pm \left[S - (n-1) \cdot \frac{dT}{dx} + \right.$$
$$\left. n \cdot (n-1)\frac{d^2 U}{dx^2}\right] \frac{d^{n-2} \sigma}{dx^{n-2}} \mp \left(T - n\frac{dU}{dx}\right)\frac{d^{n-1} \sigma}{dx^{n-1}} \pm U \frac{d^n \sigma}{dx^n} = 0;$$

& nous trouverons en opérant, comme nous venons de faire ſur la propoſée, qu'elle a pour intégrale complète de l'ordre immédiatement inférieur

de la propofée, que l'équation qui renferme λ aura de racines inégales; & de cette manière on parviendra à une intégrale d'un ordre inférieur d'un nombre d'unités égal à celui de ces racines inégales. On raifonnera fur l'équation réfultante comme fur la propofée, & continuant toujours de même, on parviendra à l'intégrale finie complète demandée.

(282). La même méthode nous fervira pour intégrer les équations linéaires entre un plus grand nombre de variables. Soit l'équation du premier ordre

$$Ay + Bz + C\frac{dy}{dx} + D\frac{dz}{dx} = X;$$

je la multiplie par σdx; & fi par-là fon premier membre devient une différentielle exacte, il a pour intégrale $C\sigma y + D\sigma z + S'$, S' ne devant renfermer que des x. Donc à caufe de

$$dS' = \left[A\sigma - \frac{d\cdot C\sigma}{dx}\right]y\,dx + \left[B\sigma - \frac{d\cdot D\sigma}{dx}\right]z\,dx,$$

il eft néceffaire que $A\sigma - \frac{d\cdot C\sigma}{dx} = 0$, $B\sigma - \frac{d\cdot D\sigma}{dx} = 0$. Une feule de ces équations fuffit pour déterminer σ, l'autre eft l'équation de condition qui doit avoir lieu, pour que la propofée foit intégrable. Si, par exemple, A, B, C, D étoient des quantités conftantes, la première équation donneroit $\sigma = e^{\frac{Ax}{C}}$; & fubftituant cette valeur dans la feconde, on verroit que dans ce cas la propofée ne pourroit être intégrable, à moins que l'on eût $AD = BC$. Une variable de plus auroit donné une équation de condition de plus, & ainfi de fuite.

Soit l'équation du fecond ordre

$$Ay + Bz + C\frac{dy}{dx} + D\frac{dz}{dx} + E\frac{d^2y}{dx^2} + F\frac{d^2z}{dx^2} = X;$$

fi, en la multipliant par σdx, on rend fon premier membre une différentielle exacte, il a pour intégrale de l'ordre immédiatement inférieur

$E\sigma\frac{dy}{dx} + F\sigma\frac{dz}{dx} + S'$. Mais

$$dS' = \left[C\sigma - \frac{d\cdot E\sigma}{dx}\right]dy + \left[D\sigma - \frac{d\cdot F\sigma}{dx}\right]dz + A\sigma y\,dx + B\sigma z\,dx;$$

donc $S' = \left[C\sigma - \frac{d\cdot E\sigma}{dx}\right]y + \left[D\sigma - \frac{d\cdot F\sigma}{dx}\right]z = R'$, R' ne devant renfermer que des x. En comparant les deux valeurs de dS', on a

$$dR' = \left(A\sigma - \frac{d\cdot C\sigma}{dx} + \frac{d^2\cdot E\sigma}{dx^2}\right)y\,dx + \left(B\sigma - \frac{d\cdot D\sigma}{dx} + \frac{d^2\cdot F\sigma}{dx^2}\right)z\,dx;$$

d'où l'on tire les deux équations

$$A\sigma - \frac{d\cdot C\sigma}{dx} + \frac{d^2\cdot E\sigma}{dx^2} = 0,\quad B\sigma - \frac{d\cdot D\sigma}{dx} + \frac{d^2\cdot F\sigma}{dx^2} = 0,$$

dont l'une fervira à déterminer σ, & l'autre fera l'équation de condition.

En général, soit l'équation d'un ordre quelconque

$$Au + B\frac{du}{dx} + C\frac{d^2u}{dx^2} + \&c. + A'y + B'\frac{dy}{dx} + C'\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$$

$+ A''z + B''\frac{dz}{dx} + C''\frac{d^2z}{dx^2} + \&c. + \&c. = X$, qui renferme un nombre m de variables; on aura, en nommant σdx le facteur, ce nombre $m - 1$ d'équations $A\sigma - \frac{d \cdot B\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot C\sigma}{dx^2} - \&c. = 0$, $A'\sigma - \frac{d \cdot B'\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot C'\sigma}{dx^2} - \&c. = 0$, $A''\sigma - \frac{d \cdot B''\sigma}{dx} + \frac{d^2 \cdot C''\sigma}{dx^2} - \&c. = 0$, &c.

Une de ces équations servira à déterminer σ; les autres seront les équations de condition qui devront nécessairement avoir lieu pour que la proposée ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur.

(283). Etant donné entre les variables z, y, x les deux équations linéaires du premier ordre

$$Ay + Bz + C\frac{dy}{dx} + D\frac{dz}{dx} = X,\ A'y + B'z + C'\frac{dy}{dx} + D'\frac{dz}{dx} = X';$$

on demande de trouver les valeurs complètes de y & de z, chacune en fonctions de x & de constantes. Après avoir multiplié la première équation par σdx, & la seconde par $\sigma' dx$, je les ajoute ensemble, ce qui donne

$$(A\sigma + A'\sigma')y\,dx + (B\sigma + B'\sigma')z\,dx + (C\sigma + C'\sigma')dy + (D\sigma + D'\sigma')dz = (X\sigma + X'\sigma')dx.$$

Je suppose que le premier membre de cette équation soit une différentielle exacte, & que par conséquent il ait pour intégrale $(C\sigma + C'\sigma')y + (D\sigma + D'\sigma')z$ plus une fonction de x & de constantes que je nomme S'. On trouvera $dS' =$

$$\left(A\sigma + A'\sigma' - \frac{d(C\sigma + C'\sigma')}{dx}\right)y\,dx + \left(B\sigma + B'\sigma' - \frac{d(D\sigma + D'\sigma')}{dx}\right)z\,dx;$$

d'où l'on tire pour déterminer σ & σ' les deux équations

$$(A)\ldots\ldots \left(A - \frac{dC}{dx}\right)\sigma + \left(A' - \frac{dC'}{dx}\right)\sigma' - C\frac{d\sigma}{dx} - C'\frac{d\sigma'}{dx} = 0,$$

$$(B)\ldots\ldots \left(B - \frac{dD}{dx}\right)\sigma + \left(B' - \frac{dD'}{dx}\right)\sigma' - D\frac{d\sigma}{dx} - D'\frac{d\sigma'}{dx} = 0.$$

A cause de $dS' = 0$, on a $S' = a$, & l'équation

$$(C)\ldots\ldots\ldots (C\sigma + C'\sigma')y + (D\sigma + D'\sigma')z = a + \int(X\sigma + X'\sigma')dx.$$

On tâchera de trouver une valeur particulière de chacun des facteurs σ & σ'; cela fait, on dégagera dans l'équation C celle qu'on voudra des deux variables y & z,

y par exemple, & substituant pour y & $\frac{dy}{dx}$ leurs valeurs dans l'une des deux équations proposées, on aura une équation linéaire du premier ordre entre x & z. En intégrant cette équation, on ajoutera une constante arbitraire, & on aura la valeur complète de z en fonction de x & de constantes. On mettra cette valeur dans ce qu'on a d'abord trouvé pour y, pour avoir sa valeur complète en fonction de x & de constantes, & le problême sera resolu. Je multiplie l'équation A par $\rho\, dx$, & l'équation B par $\rho'\, dx$, je les ajoute ensemble, & je suppose ensuite que le premier membre de l'équation résultante soit une différentielle exacte, ce qui donne

$$(D) \ldots\ldots (C\rho + D\rho')\,\sigma + (C'\rho + D'\rho')\,\sigma' = b';$$

& pour déterminer ρ & ρ' les deux équations

$$(E) \ldots\ldots A\rho + B\rho' + C\frac{d\rho}{dx} + D\frac{d\rho'}{dx} = 0,$$

$$(F) \ldots\ldots A'\rho + B'\rho' + C'\frac{d\rho}{dx} + D'\frac{d\rho'}{dx} = 0.$$

Lorsqu'on aura ρ & ρ', on aura bientôt σ & σ'; mais les équations E & F ne sont autres que les deux proposées dans lesquelles on auroit fait $X = 0$ & $X' = 0$; tout est donc réduit à trouver, dans le cas de $X = 0$ & de $X' = 0$, une valeur particulière de chacune des quantités y & z. Avec les deux équations E & F, on trouve $\rho' = \frac{AD' - A'D}{B'D - BD'}\rho + \frac{CD' - C'D}{B'D - BD'} \cdot \frac{d\rho}{dx}$; & substituant pour ρ' & $\frac{d\rho'}{dx}$ leurs valeurs dans celle qu'on voudra de ces deux équations, il en vient une de cette forme $(A)\rho + (B)\frac{d\rho}{dx} + (C)\frac{d^2\rho}{dx^2} = 0$. Il suffira de trouver, au moyen de cette équation linéaire du second ordre, une valeur particulière de ρ; si on en trouve deux, on aura, en nommant $\rho 1$ & $\rho 2$ ces deux valeurs, $\rho' 1$ & $\rho' 2$ les deux valeurs de ρ' correspondantes, les deux équations

$$(C\rho 1 + D\rho' 1)\,\sigma + (C'\rho 1 + D'\rho' 1)\,\sigma' = b',$$
$$(C\rho 2 + D\rho' 2)\,\sigma + (C'\rho 2 + D'\rho' 2)\,\sigma' = a';$$

d'où l'on tire, en mettant $\rho_{,}$ pour

$$(C'\rho 1 + D'\rho' 1)(C\rho 2 + D\rho' 2) - (C\rho 1 + D\rho' 1)(C'\rho 2 + D'\rho' 2),$$

$$\sigma = \frac{a'(C'\rho 1 + D'\rho' 1) - b'(C'\rho 2 + D'\rho' 2)}{\rho_{,}},$$

$$\sigma' = \frac{b'(C\rho 2 + D\rho' 2) - a'(D\rho 1 + D\rho' 1)}{\rho_{,}}.$$

Donc si l'on fait dans les expressions de σ & σ' successivement l'une des constantes arbitraires égale à zéro, & l'autre égale à 1, on aura deux valeurs par-

ticulières de σ, favoir $\sigma 1 = \frac{C'\rho 1 + D'\rho' 1}{\rho_,}$, $\sigma 2 = \frac{C'\rho 2 + D'\rho' 2}{\rho_,}$; & deux de σ', favoir $\sigma' 1 = \frac{C\rho 1 + D\rho' 1}{\rho_,}$, $\sigma' 2 = \frac{C\rho 2 + D\rho' 2}{\rho_,}$. On mettra ces valeurs fucceffivement dans l'équation C, & on aura les deux équations

$$(C\sigma 1 + C'\sigma' 1)\, y + (D\sigma 1 + D'\sigma' 1)\, z + a = \int (X\sigma 1 + X'\sigma' 1)\, dx = \Pi 1,$$
$$(C\sigma 2 + C'\sigma' 2)\, y + (D\sigma 2 + D'\sigma' 2)\, z + b = \int (X\sigma 2 + X'\sigma' 2)\, dx = \Pi 2;$$

d'où il fera facile de tirer les valeurs complètes de y & z que voici,

$$y = \frac{D\sigma 2 + D'\sigma' 1}{\sigma_,}(\Pi 2 - b) - \frac{D\sigma 2 + D'\sigma' 2}{\sigma_,}(\Pi 1 - a),$$
$$z = \frac{C\sigma 2 + C'\sigma' 2}{\sigma_,}(\Pi 1 - a) - \frac{C\sigma 1 + C'\sigma' 1}{\sigma_,}(\Pi 2 - b),$$

on a fait, pour abréger

$$(D\sigma 1 + D'\sigma' 1)(C\sigma 2 \mp C'\sigma' 2) - (D\sigma 2 + D'\sigma' 2)(C\sigma 1 + C'\sigma' 1) = \sigma_,.]$$

(234). Soit propofée de réfoudre les deux équations

$$iy + hz + (k + lx)\left(g\frac{dy}{dx} + f\frac{dz}{dx}\right) = X,$$
$$i'y + h'z + (k + lx)\cdot\left(g'\frac{dy}{dx} + f'\frac{dz}{dx}\right) = X'.$$

On aura $\rho' = \frac{if' - i'f}{h'f - hf'}\rho + \frac{gf' - g'f}{h'f - hf'}\cdot(k + lx)\cdot\frac{d\rho}{dx}$; & pour déterminer ρ l'équation $(h'i - hi')\rho + [h'g - hg' + if' - i'f + (gf' - g'f)\cdot l]$ $(k + lx)\frac{d\rho}{dx} + (gf' - g'f)(k + lx)^2\frac{d^2\rho}{dx^2} = 0$. On fatisfera à cette équation en faifant $\rho = (k + lx)^\lambda$, λ étant donné par l'équation du fecond degré $h'i - hi' + (h'g - hg' + if' - i'f)\, l\lambda + (gf' - g'f)\, l^2\lambda^2 = 0$; & ρ' fera de cette forme $(e + e'l\lambda)(k + lx)^\lambda$. Si les deux valeurs de λ font inegales & repréfentées par $\lambda 1$, $\lambda 2$; on aura

$$\rho 1 = (k + lx)^{\lambda 1},\ \rho 2 = (k + lx)^{\lambda 2},\ \rho' 1 = (e + e'l\lambda 1)(k + lx)^{\lambda 1},$$
$$\rho' 2 = (e + e'l\lambda 2)(k + lx)^{\lambda 2};$$

& faifant pour abréger $g + fe = c$, $g' + f'e = c'$, $f'g - fg' = k'$, on aura

$$\sigma 1 = \frac{c' + f'e'l\lambda 1}{k'e'l(\lambda 1 - \lambda 2)}(k + lx)^{-\lambda 2 - 1},\ \sigma 2 = \frac{c' + f'e'l\lambda 2}{k'e'l(\lambda 1 - \lambda 2)}(k + lx)^{-\lambda 1 - 1},$$
$$\sigma' 1 = \frac{c + fe'l\lambda 1}{k'e'l(\lambda 1 - \lambda 2)}(k + lx)^{-\lambda 2 - 1},\ \sigma' 2 = \frac{c + fe'l\lambda 2}{k'e'l(\lambda 1 - \lambda 2)}(k + lx)^{-\lambda 1 - 1}.$$

Donc

Donc

$$\Pi 1 = \frac{e' + f'e' l\lambda 1}{k'e' l(\lambda 1 - \lambda 2)} \int (k + lx)^{-\lambda 2 - 1} X dx + \frac{e + fe' l\lambda 1}{k'e' l(\lambda 1 - \lambda 2)} \int (k + lx)^{-\lambda 2 - 1} X' dx,$$

$$\Pi 2 = \frac{e' + f'e' l\lambda 2}{k'e' l(\lambda 1 - \lambda 2)} \cdot \int (k + lx)^{-\lambda 1 - 1} X dx + \frac{e + fe' l\lambda 2}{k'e' l(\lambda 1 - \lambda 2)} \int (k + lx)^{-\lambda 1 - 1} X' dx;$$

& faisant pour abréger $2ff' \cdot (ge' + g'e) - (gf' + g'f) \cdot (fe' + f'e) = (k)$; $\frac{ge' + g'e}{(k)} = (i)$, $\frac{(gf' + g'f)e'}{(k)} = (h)$, $\frac{fe' + f'e}{(k)} = (g)$, $2ff'e' = (e)$; il vient $y = k'[(g) + (e) l\lambda 1](k + lx)^{\lambda 1}(\Pi 2 - b) - k'[(g) + (e) l\lambda 2](k + lx)^{\lambda 2}(\Pi 1 - a)$, $z = k'[(i) + (h) l\lambda 2](k + lx)^{\lambda 2}(\Pi 1 - a) - k'[(i) + (h) l\lambda 1](k + lx)^{\lambda 1}(\Pi 2 - b)$.

Ce cas ne souffrira de difficulté que lorsque les deux racines seront imaginaires. Mais l'on sait qu'alors les deux valeurs $\lambda 1$ & $\lambda 2$ de λ pourront être représentées, l'une par $\lambda' + \lambda'' \sqrt{-1}$, l'autre par $\lambda' - \lambda'' \sqrt{-1}$, λ' & λ'' étant des quantités réelles ; & si l'on fait

$$\frac{e' + f'e' l\lambda 1}{2k'e' l\lambda'' \sqrt{-1}} = a_{,} + a_{,,} \sqrt{-1}, \quad \frac{e + fe' l\lambda 1}{2k'e' l\lambda'' \sqrt{-1}} = c_{,} + c_{,,} \sqrt{-1};$$

$(i) + (h) l\lambda 1 = e_{,} + e_{,,}\sqrt{-1}$, $(g) + (e) l\lambda 1 = g_{,} + g_{,,}\sqrt{-1}$, $a_{,}, a_{,,}, c_{,}, c_{,,}$, &c. étant des quantités réelles, on aura

$$\frac{e' + f'e' l\lambda 2}{2k'e' l\lambda'' \sqrt{-1}} = a_{,} - a_{,,} \sqrt{-1}, \quad \frac{e + fe' l\lambda 2}{2k'e' l\lambda'' \sqrt{-1}} = c_{,} - c_{,,} \sqrt{-1},$$

$(i) + (h) l\lambda 2 = e_{,} - e_{,,} \sqrt{-1}$, $(g) + (e) l\lambda 2 = g_{,} - g_{,,} \sqrt{-1}$.

Ainsi dans le cas que nous examinons

$$\Pi 1 = \frac{a_{,} + a_{,,}\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \int (k + lx)^{-\lambda' - 1 + \lambda''\sqrt{-1}} X dx + \frac{c_{,} + c_{,,}\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \int (k + lx)^{-\lambda' - 1 + \lambda''\sqrt{-1}} X' dx,$$

$$\Pi 2 = \frac{a_{,} - a_{,,}\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \int (k + lx)^{-\lambda' - 1 - \lambda''\sqrt{-1}} X dx + \frac{c_{,} - c_{,,}\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \int (k + lx)^{-\lambda' - 1 - \lambda''\sqrt{-1}} X' dx;$$

& on a $y = k'(g_{,} + g_{,,}\sqrt{-1})(k + lx)^{\lambda' + \lambda''\sqrt{-1}}(\Pi 2 - b) - k'(g_{,} - g_{,,}\sqrt{-1})(k + lx)^{\lambda' - \lambda''\sqrt{-1}}(\Pi 1 - a)$, $z = k'(e_{,} - e_{,,}\sqrt{-1})(k + lx)^{\lambda' - \lambda''\sqrt{-1}}(\Pi 1 - a) - k'(e_{,} + e_{,,}\sqrt{-1})(k + lx)^{\lambda' + \lambda''\sqrt{-1}}(\Pi 2 - b)$.

On doit ſe rappeller que

$$(k+lx)^{\pm\lambda''\sqrt{-1}} = \cos.[\lambda''\log.(k+lx)] \pm \sqrt{-1}\,\sin.[\lambda''\log.(k+lx)];$$

faiſant donc ces ſubſtitutions, il vient, après avoir fait pour abréger $\cos.[\lambda''\log.(k+lx)] = m$, $\sin.[\lambda''\log.(k+lx)] = n$, $(k+lx)^{-\lambda'-1} = p$;

$$y = 2k'(k+lx)^{\lambda'}[a\cdot(g_{,,}n - g_{,}m) - b\cdot(g_{,,}m + g_{,}n)] - [(a_{,}g_{,} + a_{,,}g_{,,}).m + (a_{,,}g_{,} - a_{,}g_{,,}).n]\int npXdx + [(a_{,}g_{,,} - a_{,,}g_{,}).m + (a_{,}g_{,} + a_{,,}g_{,,}).n]\int mpXdx - [(c_{,}g_{,} + c_{,,}g_{,,}).m + (c_{,,}g_{,} - c_{,}g_{,,}).n]\int npX'dx + [(c_{,}g_{,,} - c_{,,}g_{,}).m + (c_{,}g_{,} + c_{,,}g_{,,}).n]\int mpX'dx,$$

$$z = 2k'(k+lx)^{\lambda'}[a.(e_{,}m - e_{,,}n) + b(e_{,}n + e_{,,}m) + [(a_{,}e_{,} + a_{,,}e_{,,}).m + (a_{,,}e_{,} - a_{,}e_{,,}).n]\int npXdx + [(a_{,,}e_{,} - a_{,}e_{,,}).m - (a_{,}e_{,} + a_{,,}e_{,,}).n]\int mpXdx + [(c_{,}e_{,} + c_{,,}e_{,,}).m + (c_{,,}e_{,} - c_{,}e_{,,}).n]\int npX'dx + [(c_{,,}e_{,} - c_{,}e_{,,}).m - (c_{,}e_{,} + c_{,,}e_{,,}).n]\int mpX'dx].$$

Lorſqu'on n'a qu'une ſeule valeur de λ, ſoit $\rho = (k+lx)^{\lambda}$, $\rho' = (e + e'l\lambda)(k+lx)^{\lambda}$; & l'équation D devient

$$(c + fe'l\lambda)\sigma + (c' + f'e'l\lambda).\sigma' = b'(k+lx)^{-\lambda-1};$$

ou, faiſant la conſtante arbitraire b' égale à zéro, car il ne faut qu'une valeur particulière de σ, & une de σ', $\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{c' + f'e'l\lambda}{c' + fe'l\lambda} = c''$ pour abréger. Je mets dans l'une des équations A ou B, dans l'équation B, pour σ ſa valeur $c''\sigma'$, & je la change par-là en celle-ci

$$[(h - fl).c'' + h' - f'l]\sigma' - (fc'' + f')(k+lx)\frac{d\sigma'}{dx} = 0;$$

d'où l'on tire, en faiſant pour abréger

$$\frac{(h - fl).c'' + h' - f'l}{fc'' + f'} = \lambda',\ \sigma' = (k+lx)^{\lambda'}\ \&\ \sigma = c''(k+lx)^{\lambda'}.$$

Subſtituant pour σ & σ' leurs valeurs dans l'équation C, on a

$$(gc'' + g')y + (fc'' + f')z = (k+lx)^{-\lambda'-1}[a + \int(k+lx)^{\lambda'}(c''X + X')dx] = \Pi.$$

Donc $y = \frac{\Pi - (fc'' + f')z}{gc'' + g'}$; & ſubſtituant pour y & $\frac{dy}{dx}$ leurs valeurs dans la ſeconde des deux équations propoſées, il vient $[h'.(gc'' + g') - i'.(fc'' + f')]z + c''(f'g - g'f)(k+lx)\frac{dz}{dx} = (gc'' + g')X' - i'\Pi - g'(k+lx)\frac{d\Pi}{dx}$,

qui, étant miſe ſous la forme que voici $dz + \frac{g''zdx}{k+lx} = \Pi'dx$, donne

$$z = (k+lx)^{-\frac{g''}{l}}[b + \int(k+lx)^{\frac{g''}{l}}\Pi'dx].$$

Si l'on vouloit le cas où $k = 1$ & $l = 0$, on feroit λl égal à une quantité μ qui feroit donnée par l'équation du ſecond degré

$$h'i - ki' + (h'g - hg' + if' - i'f)\mu + (gf' - g'f)\mu^2 = 0;$$

& nommant $\mu 1$ & $\mu 2$ les deux valeurs de μ lorsqu'elles sont réelles & inégales, $\mu' + \mu'' \sqrt{-1}$ & $\mu' - \mu'' \sqrt{-1}$ ces deux valeurs lorsqu'elles sont imaginaires, on auroit $l\lambda 1 = \mu 1$, $l\lambda 2 = \mu 2$, $l\lambda' = \mu'$, $l\lambda'' = \mu''$. De plus lorsque $K = 1$ & $l = 0$, on a $\frac{\log. (K + lx)}{l} = x$ &

$(K + lx)^{\lambda} = (K + lx)^{\frac{\mu}{l}} = e^{\mu x}$; donc, &c.

(285). Maintenant soient entre les variables z, y, x, u, les trois équations linéaires du premier ordre

$$Au + By + Cz + D\frac{du}{dx} + E\frac{dy}{dx} + F\frac{dz}{dx} = X,$$

$$A'u + B'y + C'z + D'\frac{du}{dx} + E'\frac{dy}{dx} + F'\frac{dz}{dx} = X',$$

$$A''u + B''y + C''z + D''\frac{du}{dx} + E''\frac{dy}{dx} + F''\frac{dy}{dx} = X''.$$

Après avoir multiplié la première par $\sigma\, dx$, la seconde par $\sigma'\, dx$, la troisième par $\sigma''dx$, je les ajoute toutes les trois ensemble, & je suppose que le premier membre de l'équation résultante $(A\sigma + A'\sigma' + A''\sigma'')\, u\, dx + (B\sigma + B'\sigma' + B''\sigma'')\, y\, dx + (C\sigma + C'\sigma' + C''\sigma'')\, z\, dx + (D\sigma + D'\sigma' + D''\sigma'')\, du + (E\sigma + E'\sigma' + E\sigma'')\, dy + (F\sigma + F'\sigma' + F''\sigma'')\, dz = (X\sigma + X'\sigma' + X''\sigma'')\, dx$, soit une différentielle exacte, ce qui donne

(A) .... $(D\sigma + D'\sigma' + D''\sigma'')\, u + (E\sigma + E'\sigma' + E''\sigma'')\, y + (F\sigma + F'\sigma' + F''\sigma'')\, z + a = \int (X\sigma + X'\sigma' + X''\sigma'')\, dx$;

& pour déterminer σ, σ' & σ'' les trois équations

(B) ...... $\left(A - \frac{dD}{dx}\right)\sigma + \left(A' - \frac{dD'}{dx}\right)\sigma' + \left(A'' - \frac{dD''}{dx}\right)\sigma'' - D\frac{d\sigma}{dx} - D'\frac{d\sigma'}{dx} - D''\frac{d\sigma''}{dx} = 0,$

(C) ...... $\left(B - \frac{dE}{dx}\right)\sigma + \left(B' - \frac{dE'}{dx}\right)\sigma' + \left(B'' - \frac{dE''}{dx}\right)\sigma'' - E\frac{d\sigma}{dx} - E'\frac{d\sigma'}{dx} - E''\frac{d\sigma''}{dx} = 0,$

(D) ...... $\left(C - \frac{dF}{dx}\right)\sigma + \left(C' - \frac{dF'}{dx}\right)\sigma' + \left(C'' - \frac{dF''}{dx}\right)\sigma'' - F\frac{d\sigma}{dx} - F'\frac{d\sigma'}{dx} - F''\frac{d\sigma''}{dx} = 0.$

Lorsqu'on aura trouvé une valeur particulière de chacun des facteurs σ, σ' & σ'', on dégagera dans l'équation A celle qu'on voudra des trois variables u, y & z, u par exemple; & substituant pour u & $\frac{du}{dx}$ leurs valeurs dans deux des trois

équations propofées, on aura deux équations linéaires du premier ordre entre z, y & x; c'eſt-à-dire, que de cette manière on ramènera le problême au précédent. Si on trouvoit trois valeurs particulières de chacun de ces facteurs, il feroit bien plus court de former, au moyen de l'équation A, trois équations qui renfermeroient chacune une conſtante arbitraire, & avec leſquelles il feroit facile de trouver les valeurs complètes de u, y & z.

Je multiplie l'équation B par $\rho\, d x$, l'équation C par $\rho' d x$, l'équation D par $\rho'' d x$; & les ayant ajoutées enſemble, je ſuppoſe que le premier membre de l'équation réſultante ſoit une différentielle exacte, ce qui donne d'abord

$$(E) \ldots\ldots (D\rho + E\rho' + F\rho'')\sigma + (D'\rho + E'\rho' + F'\rho'')\sigma' + (D''\rho + E''\rho' + F''\rho'')\sigma'' = b';$$

& pour déterminer ρ, ρ' & ρ'' les trois équations

$$(F) \ldots\ldots A\rho + B\rho' + C\rho'' + D\frac{d\rho}{dx} + E\frac{d\rho'}{dx} + F\frac{d\rho''}{dx} = 0,$$

$$(G) \ldots\ldots A'\rho + B'\rho' + C'\rho'' + D'\frac{d\rho}{dx} + E'\frac{d\rho'}{dx} + F'\frac{d\rho''}{dx} = 0,$$

$$(H) \ldots\ldots A''\rho + B''\rho' + C''\rho'' + D''\frac{d\rho}{dx} + E''\frac{d\rho'}{dx} + F''\frac{d\rho''}{dx} = 0.$$

Lorſqu'on aura ρ, ρ' & ρ'', on aura bientôt les valeurs complètes de σ, σ' & σ''; & faiſant dans chacune ſucceſſivement deux des conſtantes arbitraires égales à zéro, & la troiſième égale à 1, on aura trois valeurs particulières de σ, trois de σ', trois de σ'', & le problême ſera réſolu. Mais les équations F, G & H ne ſont autres que les propoſées dans leſquelles on auroit fait $X = 0$, $X' = 0$, $X'' = 0$; tout eſt donc réduit à trouver dans le cas de $X = 0$, $X' = 0$, $X'' = 0$, une valeur particulière de chacune des quantités u, y & z.

Deux quelconques des trois équations F, G & H ſerviront à trouver ρ'', & on aura

$$\rho'' = [A]\rho + [B]\rho' + [C]\frac{d\rho}{dx} + [D]\frac{d\rho'}{dx};$$

ayant éliminé ρ'' & $\frac{d\rho''}{dx}$, ces trois équations en donneront deux autres qui ſeront de cette forme

$$(A)\rho + (B)\rho' + (C)\frac{d\rho}{dx} + (D)\frac{d\rho'}{dx} + (E)\frac{d^2\rho}{dx^2} + (F)\frac{d^2\rho'}{dx^2} = 0,$$

Je les nomme 1 & 2, & j'ai cinq équations F, G, H, 1 & 2, avec leſquelles je trouverai $\rho' = [A']\rho + [B']\frac{d\rho}{dx} + [C']\frac{d^2\rho}{dx^2}$. En éliminant ρ', $\frac{d\rho'}{dx}$ & $\frac{d^2\rho'}{dx^2}$ dans les équations 1 & 2, il en vient une qui pourra être repréſentée par

$$(3) \ldots\ldots (A'')\rho + (B'')\rho' + (C'')\frac{d\rho}{dx} + (D'')\frac{d\rho'}{dx} + (E'')\frac{d^2\rho}{dx^2} + (F'')\frac{d^2\rho'}{dx^2} + (G'')\frac{d^3\rho}{dx^3} = 0.$$

Avec

Avec les six équations F, G, H, 1, 2, 3, j'éliminerai ρ'', $\frac{d\rho''}{dx}$, ρ', $\frac{d\rho'}{dx}$, $\frac{d^2\rho'}{dx^2}$, & j'aurai, pour déterminer ρ, une équation linéaire du troisième ordre, à laquelle il suffira de satisfaire.

On suivroit le même procédé si on avoit à résoudre un nombre m d'équations linéaires du premier ordre entre un nombre $m+1$ de variables u, y, z, &c. & x; & si on pouvoit trouver m valeurs particulières de chacune des variables u, y, z, &c. dans le cas de $X=0$, $X'=0$, &c. ou, ce qui revient au même, m valeurs particulières de ρ, qui satisfissent à l'équation linéaire de l'ordre m entre x & ce facteur, le problême n'auroit plus d'autre difficulté que celle d'éliminer un nombre m d'inconnues, avec un même nombre d'équations du premier degré.

(286). Entre les variables z, y, x, j'imagine deux équations linéaires du second ordre

$$Ay+Bz+C\frac{dy}{dx}+D\frac{dz}{dx}+E\frac{d^2y}{dx^2}+F\frac{d^2z}{dx^2}=X,$$

$$A'y+B'z+C'\frac{dy}{dx}+D'\frac{dz}{dx}+E'\frac{d^2y}{dx^2}+F'\frac{d^2z}{dx^2}=X'.$$

Pour résoudre ces équations, je fais $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dz}{dx}=q$; & j'ai entre les cinq variables p, q, x, y, z, quatre équations linéaires du premier ordre

$$Ay+Bz+Cp+Dq+E\frac{dp}{dx}+F\frac{dq}{dx}=X,$$

$$A'y+B'z+C'p+D'q+E'\frac{dp}{dx}+F'\frac{dq}{dx}=X',$$

$$p-\frac{dy}{dx}=0,\ q-\frac{dz}{dx}=0.$$

Je multiplie la première par $\sigma\,dx$, la seconde par $\sigma'\,dx$, la troisième par $\sigma''\,dx$; la quatrième par $\sigma'''\,dx$; & les ayant ajoutées ensemble, il me vient

$$(A\sigma+A'\sigma')y\,dx+(B\sigma+B'\sigma')z\,dx+(C\sigma+C'\sigma'+\sigma'')p\,dx+(D\sigma+D'\sigma'+\sigma''')$$
$$q\,dx+(E\sigma+E'\sigma')\,dp+(F\sigma+F'\sigma')\,dq-\sigma''dy-\sigma'''dz=(X\sigma+X'\sigma')\,dx.$$

Si on suppose que l'équation précédente soit intégrable, on a

(A).....$(E\sigma+E'\sigma')p+(F\sigma+F'\sigma')q-\sigma''y-\sigma'''z+a=\int(X\sigma+X'\sigma')\,dx$;

& pour déterminer les quatre facteurs, ces quatre équations

(B)...... $A\sigma+A'\sigma'+\frac{d\sigma''}{dx}=0$, (C)...... $B\sigma+B'\sigma'+\frac{d\sigma'''}{dx}=0$;

(D)..... $\left[C-\frac{dE}{dx}\right]\cdot\sigma+\left[C'-\frac{dE'}{dx}\right]\cdot\sigma'+\sigma''-E\frac{d\sigma}{dx}-E'\frac{d\sigma'}{dx}=0$,

(E)..... $\left[D-\frac{dF}{dx}\right]\cdot\sigma+\left[D'-\frac{dF'}{dx}\right]\cdot\sigma'+\sigma'''-F\frac{d\sigma}{dx}-F'\frac{d\sigma'}{dx}=0$;

d'où l'on tire, en éliminant σ'', σ''' $\frac{d\sigma''}{dx}$, $\frac{d\sigma'''}{dx}$, les deux équations du second ordre ;

$$(F)\ldots\ldots\left(A - \frac{dC}{dx} + \frac{d^2E}{dx^2}\right)\sigma + \left(A' - \frac{dC'}{dx} + \frac{d^2E'}{dx^2}\right)\sigma' - \left(C - 2\frac{dE}{dx}\right)\frac{d\sigma}{dx} - \left(C' - 2\frac{dE'}{dx}\right)\frac{d\sigma'}{dx} + E\frac{d^2\sigma}{dx^2} + E'\frac{d^2\sigma'}{dx^2} = 0;$$

$$(G)\ldots\ldots\left(B - \frac{dD}{dx} + \frac{d^2F}{dx^2}\right)\sigma + \left(B' - \frac{dD'}{dx} + \frac{d^2F'}{dx^2}\right)\sigma' - \left(D - 2\frac{dF}{dx}\right)\frac{d\sigma}{dx} - \left(D' - 2\frac{dF'}{dx}\right)\frac{d\sigma'}{dx} + F\frac{d^2\sigma}{dx^2} + F'\frac{d^2\sigma'}{dx^2} = 0.$$

J'aurois pu tout d'un coup multiplier la première des deux équations proposées par $\sigma\,dx$, & la seconde par $\sigma'\,dx$, ce qui m'auroit donné

$$(A\sigma + A'\sigma')\,y\,dx + (B\sigma + B'\sigma')\,z\,dx + (C\sigma + C'\sigma')\,dy + (D\sigma + D'\sigma')\,dz + (E\sigma + E'\sigma')\frac{d^2y}{dx} + (F\sigma + F'\sigma')\frac{d^2z}{dx} = (X\sigma + X'\sigma')\,dx.$$

Si le premier membre doit être une différentielle exacte, il a pour intégrale $(E\sigma + E'\sigma')\frac{dy}{dx} + (F\sigma + F'\sigma')\frac{dz}{dx} + S'$, S' étant égal à

$$\left(C\sigma + C'\sigma' - \frac{d(E\sigma + E'\sigma')}{dx}\right)y + \left(D\sigma + D'\sigma' - \frac{d(F\sigma + F'\sigma')}{dx}\right)z;$$

plus à une fonction de x seul & de constantes que je nomme R'. On trouve

$$dR' = \left(A\sigma + A'\sigma' - \frac{d(C\sigma + C'\sigma')}{dx} + \frac{d^2(E\sigma + E'\sigma')}{dx^2}\right)y\,dx + \left(B\sigma + B'\sigma' - \frac{d(D\sigma + D'\sigma')}{dx} + \frac{d^2(F\sigma + F'\sigma')}{dx^2}\right)z\,dx,$$

expression qui feroit absurde, si le co-efficient de $y\,dx$ n'étoit égal à zéro aussi bien que celui de $z\,dx$. Cela donne les deux équations F & G ; &, à cause de R' = constante,

$$(H)\ldots\ldots(E\sigma + E'\sigma')\frac{dy}{dx} + (F\sigma + F'\sigma')\frac{dz}{dx} + \left(C\sigma + C'\sigma' - \frac{d(E\sigma + E'\sigma')}{dx}\right)y + \left(D\sigma + D'\sigma' - \frac{d(F\sigma + F'\sigma')}{dx}\right)z + a = \int(X\sigma + X'\sigma')\,dx.$$

On verra aisément que H est identiquement la même équation que A ; car B & C donnent

$$\frac{d\sigma''}{dx} = -A\sigma - A'\sigma' = -\frac{d(C\sigma + C'\sigma')}{dx} + \frac{d^2(E\sigma + E'\sigma')}{dx^2},$$

$$\frac{d\sigma'''}{dx} = -B\sigma - B'\sigma' = -\frac{d(D\sigma + D'\sigma')}{dx} + \frac{d^2(F\sigma + F'\sigma')}{dx^2};$$

d'où l'on tire

$$-\sigma'' = C\sigma + C'\sigma' - \frac{d(E\sigma + E'\sigma')}{dx}, -\sigma''' = D\sigma + D'\sigma' - \frac{d(F\sigma + F'\sigma')}{dx}.$$

Lorsqu'on aura trouvé deux valeurs de σ & de σ', on aura, au moyen de l'équation H, deux équations qui renfermeront chacune une constante arbitraire; ces deux équations serviront à trouver y, $\frac{dy}{dx}$ & par conséquent $\frac{d^2y}{dx^2}$; substituant ces valeurs dans une des deux équations proposées, on aura une équation linéaire du second ordre entre x & z; cette équation étant intégrée complètement, on aura la valeur de z qui renfermera les quatre constantes arbitraires que le problême exige; il ne s'agira plus que de substituer cette valeur dans ce qu'on a d'abord trouvé pour y. Si on trouvoit quatre valeurs de chacune des quantités σ & σ', on formeroit, au moyen de l'équation H, quatre équations qui renfermeroient chacune une constante arbitraire, & avec lesquelles il seroit facile de trouver les valeurs complètes de y & z.

Je multiplie les deux équations F & G, l'une par ρdx, l'autre par $\rho' dx$; & par un procédé analogue au précédent, je trouve d'abord l'équation

$$(I) \ldots . (E\rho + F\rho') \frac{d\sigma}{dx} + (E'\rho + F'\rho') \frac{d\sigma'}{dx} - \left(\left[C - \frac{dE}{dx} \right] \cdot \rho + \left[D - \frac{dF}{dx} \right] \cdot \rho' + E \frac{d\rho}{dx} + F \frac{d\rho'}{dx} \right) \sigma - \left(\left[C' - \frac{dE'}{dx} \right] \cdot \rho + \left[D' - \frac{dF'}{dx} \right] \cdot \rho' + E' \frac{d\rho}{dx} + F' \frac{d\rho'}{dx} \right) \sigma' = \text{constante};$$

& ensuite pour déterminer ρ & ρ' les deux équations

$$(K) \ldots \ldots A\rho + B\rho' + C\frac{d\rho}{dx} + D\frac{d\rho'}{dx} + E\frac{d^2\rho}{dx^2} + F\frac{d^2\rho'}{dx^2} = 0;$$

$$(L) \ldots \ldots A'\rho + B'\rho' + C'\frac{d\rho}{dx} + D'\frac{d\rho'}{dx} + E'\frac{d^2\rho}{dx^2} + F'\frac{d^2\rho'}{dx^2} = 0,$$

qui ne sont autres que les deux proposées dans lesquelles on auroit fait $X = 0$, & $X' = 0$. Si on trouve deux valeurs de chacun des facteurs ρ & ρ', il sera bien facile de trouver ensuite les valeurs complètes de σ & σ'; & faisant dans chacune successivement trois des constantes arbitraires égales à zéro, & la quatrième égale à 1, on aura quatre valeurs de σ, quatre de σ', & le problême sera résolu.

Avec les équations K & L j'élimine $\frac{d^2\rho'}{dx^2}$, & j'ai une équation qui étant différentiée est de cette forme

$$(1) \ldots \ldots (A)\rho + (B)\rho' + (C)\frac{d\rho}{dx} + (D)\frac{d\rho'}{dx} + (E)\frac{d^2\rho}{dx^2} + (F)\frac{d^2\rho'}{dx^2} + (G)\frac{d^3\rho}{dx^3} = 0.$$

Ces équations K, L, 1 serviront à trouver

$$\rho' = [A]\rho + [B]\frac{d\rho}{dx} + [C]\frac{d^2\rho}{dx^2} + [D]\frac{d^3\rho}{dx^3}.$$

Cela fait, avec une des équations K & L & l'équation 1, j'éliminerai $\frac{d^2\rho'}{dx^2}$, & j'aurai une équation qui étant différentiée, sera de cette forme

$$(2) \ldots\ldots (A')\rho + (B')\rho' + (C')\frac{d\rho}{dx} + (D')\frac{d\rho'}{dx} + (E')\frac{d^2\rho}{dx^2} + (F')\frac{d^2\rho'}{dx^2} + (G')\frac{d^3\rho}{dx^3} + (H')\frac{d^4\rho}{dx^4} = 0;$$

il ne reste plus qu'à éliminer ρ', $\frac{d\rho'}{dx}$, $\frac{d^2\rho'}{dx^2}$ avec les quatre équations K, L, 1 & 2, & il viendra pour déterminer ρ une équation linéaire du quatrième ordre entre x & ce facteur.

(287). Soit proposé de résoudre les deux équations linéaires du troisième ordre

$$Ay + Bz + C\frac{dy}{dx} + D\frac{dz}{dx} + E\frac{d^2y}{dx^2} + F\frac{d^2z}{dx^2} + G\frac{d^3y}{dx^3} + H\frac{d^3z}{dx^3} = X,$$

$$A'y + B'z + C'\frac{dy}{dx} + D'\frac{dz}{dx} + E'\frac{d^2y}{dx^2} + F'\frac{d^2z}{dx^2} + G'\frac{d^3y}{dx^3} + H'\frac{d^3z}{dx^3} = X'.$$

En faisant $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dz}{dx} = p'$, $\frac{dp'}{dx} = q'$; on aura entre les sept variables, p, q, p', q', x, y, z six équations linéaires du premier ordre qu'on résoudra comme nous avons enseigné à le faire. Mais plus simplement on multipliera la première des deux proposées par σdx, & l'autre par $\sigma' dx$, on les ajoutera ensemble, & on aura une certaine équation dont on supposera le premier membre une différentielle exacte, ce qui donnera

$$(A) \ldots\ldots (G\sigma + G'\sigma')\frac{d^2y}{dx^2} + (H\sigma + H'\sigma')\frac{d^2z}{dx^2} + \left(E\sigma + E'\sigma' - \frac{d(G\sigma + G'\sigma')}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + \left(F\sigma + F'\sigma' - \frac{d(H\sigma + H'\sigma')}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + \left(C\sigma + C'\sigma' - \frac{d(E\sigma + E'\sigma')}{dx} + \frac{d^2(G\sigma + G'\sigma')}{dx^2}\right)y + \left(D\sigma + D'\sigma' - \frac{d(F\sigma + F'\sigma')}{dx} + \frac{d^2(H\sigma + H'\sigma')}{dx^2}\right)z + a = \int (X\sigma + X'\sigma')\,dx;$$

& pour déterminer σ & σ' les deux équations

$$(B) \ldots\ldots \left(A - \frac{dC}{dx} + \frac{d^2E}{dx^2} - \frac{d^3G}{dx^3}\right)\sigma + \left(A' - \frac{dC'}{dx} + \frac{d^2E'}{dx^2} - \frac{d^3G'}{dx^3}\right)\sigma' - \left(C - 2\frac{dE}{dx} + 3\frac{d^2G}{dx^2}\right)\frac{d\sigma}{dx} - \left(C' - 2\frac{dE'}{dx} + 3\frac{d^2G'}{dx^2}\right)\frac{d\sigma'}{dx} + \left(E - 3\frac{dG}{dx}\right)\frac{d^2\sigma}{dx^2} + \left(E' - 3\frac{dG'}{dx}\right)\frac{d^2\sigma'}{dx^2} - G\frac{d^3\sigma}{dx^3} - G'\frac{d^3\sigma'}{dx^3} = 0,$$

(C)

$$(C) \ldots\ldots \left(B - \frac{dD}{dx} + \frac{d^2F}{dx^2} - \frac{d^3H}{dx^3}\right)\sigma + \left(B' - \frac{dD'}{dx} + \frac{d^2F'}{dx^2} - \frac{d^3H'}{dx^3}\right)\sigma'$$
$$- \left(D - 2\frac{dF}{dx} + 3\frac{d^2H}{dx^2}\right)\frac{d\sigma}{dx} - \left(D' - 2\frac{dF'}{dx} + 3\frac{d^2H'}{dx^2}\right)\frac{d\sigma'}{dx} +$$
$$\left(F - 3\frac{dH}{dx}\right)\frac{d^2\sigma}{dx^2} + \left(F' - 3\frac{dH'}{dx}\right)\frac{d^2\sigma'}{dx^2} - H\frac{d^3\sigma}{dx^3} - H'\frac{d^3\sigma'}{dx^3} = 0.$$

Lorſqu'on aura trouvé trois valeurs de σ & trois de σ', on aura au moyen de l'équation A trois équations qui renfermeront chacune une conſtante arbitraire; ces équations ſerviront à trouver y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, & par conſéquent $\frac{d^3y}{dx^3}$; ſubſtituant ces valeurs dans une des deux équations propoſées, on aura une équation linéaire du troiſième ordre entre x & z; cette équation étant intégrée complétement, la valeur de z renfermera les ſix conſtantes arbitraires que le problême exige, & il ne s'agira plus que de ſubſtituer cette valeur dans ce qu'on a d'abord trouvé pour y. Si on trouvoit ſix valeurs de chacun des facteurs σ & σ', on formeroit, au moyen de l'équation A, ſix équations qui renfermeroient chacune une conſtante arbitraire, & avec leſquelles il ſeroit plus facile encore de trouver les valeurs complètes de y & z. Je multiplie les deux équations B & C, l'une par $\rho\,dx$, l'autre par $\rho'\,dx$; & je trouve pour déterminer ρ & ρ' les deux équations

$$(D) \ldots\ldots A\rho + B\rho' + C\frac{d\rho}{dx} + D\frac{d\rho'}{dx} + E\frac{d^2\rho}{dx^2} + F\frac{d^2\rho'}{dx^2} + G\frac{d^3\rho}{dx^3}$$
$$+ H\frac{d^3\rho'}{dx^3} = 0,$$

$$(E) \ldots\ldots A'\rho + B'\rho' + C'\frac{d\rho}{dx} + D'\frac{d\rho'}{dx} + E'\frac{d^2\rho}{dx^2} + F'\frac{d^2\rho'}{dx^2} + G'\frac{d^3\rho}{dx^3}$$
$$+ H'\frac{d^3\rho'}{dx^3} = 0,$$

qui ne font autres que les deux propoſées dans leſquelles on auroit fait $X = 0$ & $X' = 0$. Je trouve enſuite l'équation

$$(F) \ldots\ldots (G\rho + H\rho')\frac{d^2\sigma}{dx^2} + (G'\rho + H'\rho')\frac{d^2\sigma'}{dx^2} - \left(\left[E - 2\frac{dG}{dx}\right]\cdot\right.$$
$$\left.\rho + G\frac{d\rho}{dx} + \left[F - 2\frac{dH}{dx}\right]\cdot\rho' + H\frac{d\rho'}{dx}\right)\frac{d\sigma}{dx} - \left(\left[E' - 2\frac{dG'}{dx}\right]\cdot\right.$$
$$\left.\rho + G'\frac{d\rho}{dx} + \left[F' - 2\frac{dH'}{dx}\right]\cdot\rho' + H'\frac{d\rho'}{dx}\right)\frac{d\sigma'}{dx} + \left(\left[C - \frac{dE}{dx} + \frac{d^2G}{dx^2}\right]\cdot\right.$$
$$\rho + \left[E - \frac{dG}{dx}\right]\cdot\frac{d\rho}{dx} + G\frac{d^2\rho}{dx^2} + \left[D - \frac{dF}{dx} + \frac{d^2H}{dx^2}\right]\cdot\rho' + \left[F - \frac{dH}{dx}\right]\cdot$$
$$\left.\frac{d\rho'}{dx} + H\frac{d^2\rho'}{dx^2}\right)\sigma + \left(\left[C' - \frac{dE'}{dx} + \frac{d^2G'}{dx^2}\right]\cdot\rho + \left[E' - \frac{dG'}{dx}\right]\right.$$
$$\frac{d\rho}{dx} + G'\frac{d^2\rho}{dx^2} + \left[D' - \frac{dF'}{dx} + \frac{d^2H'}{dx^2}\right]\cdot\rho' + \left[F' - \frac{dH'}{dx}\right]\cdot\frac{d\rho'}{dx} +$$
$$\left.H'\frac{d^2\rho'}{dx^2}\right)\sigma' = \text{conſtante.}$$

Lorsqu'on aura trois valeurs de chacun des facteurs ρ & ρ', il sera facile de trouver les valeurs complètes de σ & σ' ; & faisant dans chacune successivement cinq des constantes arbitraires égales à zéro, & la sixième égale à 1, on aura six valeurs de σ, six de σ', & le problême sera résolu. On le réduira encore à trouver trois valeurs de ρ qui satisfassent à une équation linéaire du sixième ordre entre ρ & x.

(288). Si on avoit à résoudre un nombre quelconque d'équations linéaires, la première de l'ordre m, la seconde de l'ordre m', &c. entre un nombre de variables x, y, z, &c. plus grand d'une unité ; on pourroit, en faisant $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, &c. & ainsi des autres variables z, &c. réduire le problême à n'avoir à résoudre qu'un nombre $m + m' +$ &c. $= n$ d'équations linéaires du premier ordre. Mais il sera plus court d'opérer sur ces équations sans autre préparation que de les multiplier chacune par un facteur convenable. Des deux manières on parviendra à un résultat tel, que le problême n'aura d'autre difficulté que celle d'éliminer un nombre n d'inconnues, avec un même nombre d'équations du premier degré, si on peut trouver n valeurs de chacune des variables y, z, &c. dans le cas où le terme de chacune des équations proposées, qui ne renferme pas ces variables, seroit égal à zéro. Ce théorême est comme celui de l'article précédent de Lagrange ; j'ajouterai que le problême se réduiroit encore à l'élimination des mêmes inconnues, si on pouvoit trouver n valeurs d'un des facteurs qui satisfissent à l'équation linéaire de l'ordre n, entre la variable x & ce facteur, à laquelle on peut toujours parvenir par de simples éliminations. Lorsque les équations proposées seront de cette forme

$$iy + h(k + lx)\frac{dy}{dx} + g(k + lx)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \&c. + i'z + \&c. + \&c. = X,$$

l'équation de l'ordre n entre x, & l'un des facteurs que je nomme ρ pourra être représentée par

$$(i)\rho + (h)(k + lx)\frac{d\rho}{dx} + (g)(k + lx)^2\frac{d^2\rho}{dx^2} + \&c. = 0,$$

(i), (h), (g), &c. étant toujours des quantités constantes. Mais nous savons qu'on peut généralement intégrer cette équation ; ainsi nous trouverons ρ avec n constantes arbitraires, & faisant successivement toutes ces constantes, moins une, égales à zéro, & celle-ci égale à 1, nous aurons n valeurs particulières de ρ, & le problême sera résolu.

(289). Dès 1747, Dalembert, dans son excellent Traité de la cause des vents, avoit indiqué la méthode que voici pour intégrer les équations linéaires. Soit l'équation du second ordre $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} = X$; on fera $\frac{dy}{dx} = p$, & on aura les deux équations du premier ordre

$$p - \frac{dy}{dx} = 0, \quad Ay + Bp + C\frac{dp}{dx} = X.$$

Ayant multiplié la première par ε, on l'ajoutera à l'autre, ce qui donnera $Ay + (B+\varepsilon)p + C\frac{dp}{dx} - \varepsilon\frac{dy}{dx} = X$. On fera $Cp - \varepsilon y = s$, & l'équation précédente deviendra

$$\left(A + \frac{d\varepsilon}{dx}\right)y + \left(B - \frac{dC}{dx} + \varepsilon\right)p + \frac{ds}{dx} = X,$$

à laquelle on tâchera de donner cette forme $\Pi s + \frac{ds}{dx} = X$, Π étant une fonction de x & de constantes. Or, comme $\Pi s = \Pi C p - \Pi \varepsilon y$, il faudra que $A + \frac{d\varepsilon}{dx} = -\Pi\varepsilon$, $B - \frac{dC}{dx} + \varepsilon = C\Pi$. On tire de la seconde

$\Pi = \frac{B - \frac{dC}{dx}}{C} + \frac{\varepsilon}{C} = B_{,} + \frac{\varepsilon}{C}$; & substituant cette valeur dans la première, on a pour déterminer ε, l'équation

$$AC + B\varepsilon + \varepsilon^2 + C\frac{d\varepsilon}{dx} - \varepsilon\frac{dC}{dx} = 0,$$

qui devient, en faisant $\frac{\varepsilon}{C} = \mathcal{E}$, $A + B\mathcal{E} + C\mathcal{E}^2 + C\frac{d\mathcal{E}}{dx} = 0$.

La difficulté est, comme nous l'avons remarqué n°. 276, de pouvoir satisfaire à l'équation précédente ; mais $\mathcal{E}$ trouvé, on a $\varepsilon = C\mathcal{E}$, $\Pi = B_{,} + \mathcal{E}$, $s = e^{-\int(B_{,}+\mathcal{E})dx}\left(a + \int e^{\int(B_{,}+\mathcal{E})dx} X dx\right)$; & à cause de $Cp - \varepsilon y = s$, $\frac{dy}{dx} - \mathcal{E}y = \frac{s}{C}$, &c.

Soient $A = i$, $B = h$, $C = g$, ces co-efficiens étant constans ; on prendra ε égal à une constante f qui sera donnée par l'équation du second degré $ig + hf + f^2 = 0$, qui étant résolu, donnera $f = -\frac{h}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{h^2}{4} - ig\right]}$.

Cela posé, si l'on nomme $f1$ & $f2$ les deux valeurs de f, $s1$ & $s2$ les deux valeurs de s correspondantes, on aura

$s1 = e^{-\frac{h+f1}{g}x}\left(a + \int e^{\frac{h+f1}{g}x} X dx\right)$, $s2 = e^{-\frac{h+f2}{g}x}\left(b + \int e^{\frac{h+f2}{g}x} X dx\right)$; &, à cause de $gp - f1y = s1$, $gp - f2y = s2$; on aura $y = \frac{s1 - s2}{f2 - f1}$. Lorsque les deux valeurs de f seront égales, on supposera pour un instant qu'elles diffèrent d'une quantité infiniment petite ρ, ce qui donnera $f1 = -\frac{h}{2} - \rho$, $f2 = -\frac{h}{2} + \rho$, $f2 - f1 = 2\rho$; &

$s1 = e^{-\frac{hx}{2g}}\left(a e^{\frac{\rho x}{g}} + e^{\frac{\rho x}{g}} \int e^{\frac{hx}{2g}} e^{-\frac{\rho x}{g}} X dx\right)$, $s2 = e^{-\frac{hx}{2g}}\left(b e^{-\frac{\rho x}{g}} + e^{-\frac{\rho x}{g}} \int e^{\frac{hx}{2g}} e^{\frac{\rho x}{g}} X dx\right)$. Mais $e^{\pm\frac{\rho x}{g}} = 1 \pm \frac{\rho x}{g}$, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre; donc

$$\frac{s1 - s2}{f2 - f1} = e^{-\frac{hx}{2g}}\left(a + bx - \frac{1}{g}\int e^{\frac{hx}{2g}} X x dx + \frac{x}{g}\int e^{\frac{hx}{2g}} X dx\right);$$

on a mis a pour $\frac{a-b}{2\rho}$, b pour $\frac{a+b}{2g}$, ce qui eſt bien permis, puiſque a & b ſont arbitraires, & on a négligé, comme on le devoit, le terme multiplié par ρ. Cette manière très-ſimple de réſoudre le problême, lorſque l'équation qui renferme f a des racines égales, a été donnée par Dalembert dans les Mémoires de Berlin de 1748, où il a développé les méthodes dont il eſt queſtion dans cet article.

(290). Étant données, entre les variables z, y, x, les deux équations linéaires du ſecond ordre

$$Ay + Bz + C\frac{dy}{dx} + D\frac{dz}{dx} + E\frac{d^2y}{dx^2} + F\frac{d^2z}{dx^2} = X,$$

$$A'y + B'z + C'\frac{dy}{dx} + D'\frac{dz}{dx} + E'\frac{d^2y}{dx^2} + F'\frac{d^2z}{dx^2} = X';$$

on fera $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dz}{dx} = q$, & on aura les quatre équations du premier ordre

$$p - \frac{dy}{dx} = 0, \quad q - \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$Ay + Bz + Cp + Dq + E\frac{dp}{dx} + F\frac{dq}{dx} = X,$$

$$A'y + B'z + C'p + D'q + E'\frac{dp}{dx} + F'\frac{dq}{dx} = X'.$$

Il faudra multiplier la première par σ, la ſeconde par σ', la troiſième par σ'', & enſuite les ajouter enſemble, ce qui donnera $(A\sigma'' + A')y + (B\sigma'' + B')z + (\sigma + C\sigma'' + C')p + (\sigma' + D\sigma'' + D')q - \sigma\frac{dy}{dx} - \sigma'\frac{dz}{dx} + (E\sigma'' + E')\frac{dp}{dx} + (F\sigma'' + F')\frac{dq}{dx} = X\sigma'' + X'$.

Soit (A)...... $-\sigma y - \sigma' z + (E\sigma'' + E')p + (F\sigma'' + F')q = s$; on change par-là l'équation précédente en celle-ci;

$$\left(A\sigma'' + A' + \frac{d\sigma}{dx}\right)y + \left(B\sigma'' + B' + \frac{d\sigma'}{dx}\right)z + \left(\sigma + C\sigma'' + C' - \frac{d(E\sigma'' + E')}{dx}\right)p + \left(\sigma' + D\sigma'' + D' - \frac{d(F\sigma'' + F')}{dx}\right)q + \frac{ds}{dx} = X\sigma'' + X',$$

qu'on

qu'on fera en ſorte de rendre identiquement la même que

$$(B) \ldots\ldots\ldots\ldots \Pi s + \frac{ds}{dx} = X\sigma'' + X'.$$

Or comme $\Pi s = -\Pi\sigma y - \Pi\sigma' z + (E\sigma'' + E')\,\Pi p + (F\sigma' + F)\,\Pi q$; il faudra faire

$$A\sigma'' + A' + \frac{d\sigma}{dx} = -\Pi\sigma,\ B\sigma'' + B' + \frac{d\sigma'}{dx} = -\Pi\sigma',$$

$$\sigma + C\sigma'' + C' - \frac{d(E\sigma'' + E')}{dx} = (E\sigma'' + E')\,\Pi,$$

$$\sigma' + D\sigma'' + D' - \frac{d(F\sigma'' + F')}{dx} = (F\sigma'' + F)\,\Pi;$$

& ces quatre équations ſerviront à déterminer Π, σ, σ' & σ''. Si on trouve quatre valeurs de chacune de ces quantités, on aura, au moyen de l'équation B qu'on intégrera complétement, quatre valeurs de s qui renfermeront chacune une conſtante arbitraire ; & ſubſtituant ſucceſſivement les quatre valeurs de chacune des quantités σ, σ', σ'' & s dans l'équation A, quatre équations qui ſerviront à éliminer p & q, & à trouver les valeurs complètes de y & z, &c.

Si je m'étois contenté de multiplier la première des deux équations du ſecond ordre propoſées par σ, & de l'ajouter à la ſeconde, j'aurois trouvé

$$(A\sigma + A')\,y + (B\sigma + B')\,z + (C\sigma + C')\,\frac{dy}{dx} + (D\sigma + D')\,\frac{dz}{dx}$$
$$+ (E\sigma + E')\,\frac{d^2y}{dx^2} + (F\sigma + F')\,\frac{d^2z}{dx^2} = X\sigma + X'.$$

Soit $(E\sigma + E')\,y + (F\sigma + F')\,z = s$; d'où l'on tire

$$(E\sigma + E')\,\frac{dy}{dx} + (F\sigma + F)\,\frac{dz}{dx} = \frac{ds}{dx} - \frac{d(E\sigma + E')}{dx}\,y - \frac{d(F\sigma + F')}{dx}\,z,$$

$$(E\sigma + E')\,\frac{d^2y}{dx^2} + (F\sigma + F)\,\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2s}{dx^2} - 2\,\frac{d(E\sigma + E')}{dx}\,\frac{dy}{dx} -$$
$$2\,\frac{d(F\sigma + F')}{dx}\,\frac{dz}{dx} - \frac{d^2(E\sigma + E')}{dx^2}\,\gamma - \frac{d^2(F\sigma + F')}{dx^2}\,z.$$

Je change par ces ſubſtitutions l'équation précédente en celle-ci

$$\left(A\sigma + A' - \frac{d^2(E\sigma + E'')}{dx^2}\right)y + \left(B\sigma + B' - \frac{d^2(F\sigma + F')}{dx^2}\right)z +$$
$$\left(C\sigma + C - 2\,\frac{d(E\sigma + E')}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + \left(D\sigma + D' - 2\,\frac{d(F\sigma + F')}{dx}\right)\frac{dz}{dx} +$$
$$\frac{d^2s}{dx^2} = X\sigma + X';$$

& faiſant en ſorte qu'elle ſoit identiquement la même que

$$\Pi s + \Pi'\,\frac{ds}{dx} + \frac{d^2s}{dx^2} = X\sigma + X',$$

il me vient, pour déterminer Π, Π' & σ quatre équations

$$A\sigma + A' - \frac{d^2(E\sigma + E')}{dx^2} = (E\sigma + E')\Pi + \frac{d(E\sigma + E')}{dx}\Pi',$$

$$B\sigma + B' - \frac{d^2(F\sigma + F')}{dx^2} = (F\sigma + F')\Pi + \frac{d(F\sigma + F')}{dx}\Pi',$$

$$C\sigma + C' - 2\frac{d(E\sigma + E')}{dx} = \Pi(E\sigma + E'),$$

$$D\sigma + D' - 2\frac{d(F\sigma + F')}{dx} = \Pi'(F\sigma + F');$$

je trouve donc une équation de condition, c'est-à-dire, que de cette manière le problême ne peut être résolu que dans quelques cas particuliers. Supposons que les co-efficiens A, B, &c. soient des quantités constantes, le problême se résoudra de la première manière, en faisant σ, σ' & σ'' constantes, & ces quantités seront déterminées par les équations

$$\frac{A\sigma'' + A'}{\sigma} = \frac{B\sigma'' + B'}{\sigma'} = -\frac{\sigma + C\sigma'' + C'}{E\sigma'' + E'} = -\frac{\sigma' + D\sigma'' + D'}{F\sigma'' + F'}.$$

On aura à résoudre une équation du quatrième degré, dont les quatre racines donneront les quatre valeurs de chacune des quantités Π, σ, σ' & σ''. Au lieu que de l'autre manière on n'a qu'une seule inconnue σ & les deux équations

$$(A\sigma + A')(F\sigma + F') = (B\sigma + B')(E\sigma' + E'),$$
$$(C\sigma + C')(F\sigma + F') = (D\sigma + D')(E\sigma + E').$$

Le problême n'est donc soluble de cette manière que dans quelques cas particuliers; par exemple, lorsque A, A', B, B' sont en même temps nuls; lorsque C, C', D, D' sont en même temps nuls; lorsqu'on a en même temps $A = C$, $A' = C'$, $B = D$, $B' = D'$.

Il reste toujours ce problême à résoudre, trouver n valeurs de y qui satisfassent à l'équation

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots + U\frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

Or, si par la séparation des indéterminées, ou en la multipliant par quelqu'autre facteur qu'une fonction de x seulement, on parvenoit à intégrer complétement cette équation; on auroit, en faisant successivement dans l'intégrale trouvée toutes les constantes arbitraires moins une égales à zéro, les n valeurs desirées. Mais ces recherches ne peuvent point trouver place dans un chapitre où nous n'avons en vue que de développer les règles fondamentales du calcul intégral, en les appliquant à des exemples choisis. Nous ajouterons seulement qu'on doit voir, par ce qui précède, qu'il y a deux méthodes bien distinctes, d'intégrer les équations différentielles; l'une consiste à séparer les variables dans ces équations; l'autre à trouver des facteurs propres à les rendre intégrables. Nous traiterons de chacune de ces méthodes dans un chapitre particulier.

(291). $M\,dy$ étant un terme de la différentielle exacte d'une fonction quel-

conque z de y, x, &c., si nous désignons par $\int M\,dy$ l'intégrale de ce terme prise par rapport à y seulement, il est clair que $M\,dy$ est la différentielle de $\int M\,dy$ en ne faisant varier que y; mais quelle est la différentielle de cette formule intégrale en regardant toute autre quantité, x par exemple, comme variable ? Leibnitz a le premier résolu ce problême dont on a depuis fait de si heureuses applications. Je suppose que la différentielle de $\int M\,dy$, en faisant varier x, soit égale à $K\,dx$, K étant une fonction inconnue de y, x, &c. On trouvera que $M\,dy + K\,dx$ sont deux termes de la différentielle de $\int M\,dy$, & que par conséquent $\frac{dM}{dx} = \frac{dK}{dy}$, d'où l'on tire $\frac{dM}{dx}\,dy = \frac{dK}{dy}\,dy$. Donc $\frac{dM}{dx}\,dy$ est la différentielle de K en ne faisant varier que y; & K par conséquent ne peut être égal qu'à $\int \frac{dM}{dx}\,dy$ plus à une fonction qui ne renferme point y. Mais tous les termes de $\int M\,dy$ devant nécessairement renfermer y, tous ceux de K, qui est le co-efficient de dx dans la différentielle de cette formule, doivent aussi renfermer la même quantité; donc K est égal à $\int \frac{dM}{dx}\,dy$, & $dx \int \frac{dM}{dx}\,dy$ est la différentielle de $\int M\,dy$, en ne faisant varier que x.

Une remarque importante, c'est que si la fonction z est telle qu'elle doive être nulle dans l'hypothèse de y égal à une constante a; toutes les différences partielles de z, excepté M ou $\frac{dz}{dy}$, seront nécessairement nulles dans la même hypothèse: si cette fonction est telle qu'elle doive être nulle dans l'hypothèse de $y = a$ & de $x = b$; toutes les différences partielles de z, excepté $\frac{dz}{dy}$ & $\frac{dz}{dx}$, seront nécessairement nulles dans la même hypothèse, & ainsi de suite. Pour éclaircir cela par quelques exemples, si $z = a + x - y - \sqrt{(a^2 + x^2 - y^2)}$, $y = a$ rend z & $\frac{dz}{dx} = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2-y^2)}}\right)$ chacune égale à zéro; mais il ne rend pas nulle $\frac{dz}{dy} = -1 + \frac{y}{\sqrt{(a^2+x^2-y^2)}}$.

Si $z = Ay^2 + Buxy + Cx^2 - Aa^2 - Babu - Cb^2$, $y = a$ & $x = b$ rendent z & $\frac{dz}{du}$ $(= Bxy - Bab)$ chacune égale à zéro; mais ces suppositions ne rendent pas nulles $\frac{dz}{dx} = Buy + 2Cx$, $\frac{dz}{dy} = 2Ay + Bux$.

Il suit de cette remarque que si la formule intégrale $\int M\,dy$ est nulle dans l'hypothèse de y égal à une constante a, cette autre formule intégrale $\int \frac{dM}{dx}\,dy$, qui est le co-efficient de dx dans la différentielle de la première, est nécessairement nulle dans la même hypothèse.

(291). Dès 1720, Nicolas Bernoulli fit usage du théorême de Leibnitz, pour résoudre le problême des trajectoires; voici en quoi ce problême consiste. On suppose une infinité de courbes telles que AMm (*fig. LXIII*), toutes comprises sous la même équation de la manière suivante. Cette équation, outre les co-ordonnées BP (x), PM (y), renferme un paramètre a, qui sera constant pour chaque courbe, mais qu'on fera varier pour les avoir toutes successivement; c'est ainsi qu'en faisant varier a dans l'équation $y^2 = ax$, on auroit toutes les paraboles décrites sur le même axe, & ayant leur sommet au même point. Cela posé, on demande la nature de la trajectoire $EM\mu$, qui doit couper une infinité de courbes toutes comprises sous la même équation, en faisant avec chacune un angle constant μMm. Au point de section M, la trajectoire & la coupée AM auront les mêmes co-ordonnées x & y; or si nous désignons par $\frac{dy}{dx}$ la tangente de l'angle que la trajectoire fait à ce point avec la ligne des abscisses, il faudra employer une autre caractéristique pour désigner la tangente de l'angle que la coupée fait au même point avec la ligne des abscisses; nous désignerons cette tangente par $\frac{\delta y}{\delta x}$. Étant donnée l'équation des coupées, on la différentiera, sans faire varier le paramètre; & on aura le rapport $\frac{\delta y}{\delta x}$; en différentiant l'équation de la trajectoire, on auroit $\frac{dy}{dx}$. L'angle $mM\mu$, qui est la différence de deux angles, dont l'un a pour tangente $\frac{dy}{dx}$, & l'autre $\frac{\delta y}{\delta x}$, a lui-même pour tangente $\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\delta y}{\delta x}\right) : \left(1 + \frac{dy}{dx}\frac{\delta y}{\delta x}\right)$; & comme par l'hypothêse cet angle est constant, on aura l'équation

$$(\text{A}) \ldots\ldots\ldots \left(1 - b\,\frac{\delta y}{\delta x}\right)\frac{dy}{dx} = b + \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Avec cette équation & celle des coupées, on éliminera le paramètre a, & on aura une équation entre y & x, qui sera celle de la trajectoire.

Je suppose que toutes les coupées sont des lignes droites, qui partent du même point, & qui ont pour équation $y = ax$. On en tire $\frac{\delta y}{\delta x} = a$, & l'équation A devient $(1 - ab)\frac{dy}{dx} = b + a$, dans laquelle si l'on met $\frac{y}{x}$ pour a, on aura $(x - by)\,dy = (bx + y)\,dx$ qui sera l'équation de la trajectoire. Cette équation étant homogène, on fera $\frac{y}{x} = u$, $dy = u\,dx + x\,du$, & on la changera en celle-ci $(1 - bu)(u\,dx + x\,du) = (b + u)\,dx$, d'où l'on

l'on tire $\frac{b\,dx}{x} = \frac{du}{1+u^2} - \frac{b\,u\,du}{1+u^2}$, & b log. $x = A$ tang. $u - b$ log. $\sqrt{(1+u^2)} + b$ log. m. Mettant $\frac{y}{x}$ pour u, on a b log. $\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{m} = A$ tang. $\frac{y}{x}$, équation qui exprime la nature de toutes les spirales logarithmiques (n°. 217). Si la trajectoire doit être orthogonale, c'est-à-dire, si elle doit faire avec les coupées un angle droit, on a b infini, & par conséquent log. $\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{m} = 0$, d'où l'on tire $\sqrt{(x^2+y^2)} = m$, équation au cercle.

(293). Je suppose que l'équation des coupées soit telle que l'on ait une certaine fonction du paramètre égale à une fonction des co-ordonnées y & x. En nommant A cette fonction du paramètre, on pourra représenter l'équation dont nous venons de parler par $dA = M\,dy + N\,dx$. Pour une même coupée, le paramètre est constant, & on a $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-N}{M}$; ainsi l'équation A devient $(M + bN)\frac{dy}{dx} = bM - N$ qui est celle de la trajectoire. L'équation des coupées étant $A = x^m y^n$, qui exprime la nature de toutes les paraboles & de toutes les hyperboles à l'infini, on a $M = n x^m y^{n-1}$, $N = m x^{m-1} y^n$; & pour l'équation de la trajectoire, celle-ci $(nx + bmy)\,dy = (bnx - my)\,dx$ qui est homogène. Si cette trajectoire doit être orthogonale, on aura b infini, & l'équation précédente deviendra $my\,dy = nx\,dx$; d'où l'on tire $my^2 = c^2 + nx^2$, qui est une équation à l'ellipse ou à l'hyperbole sections coniques.

Je suppose que dans l'équation des coupées on puisse séparer les variables, & avoir y égal à une fonction de l'abscisse x & du paramètre a. Soit alors $dy = P\,dx + Q\,da$; on en tire $\frac{\delta y}{\delta x} = P$, & l'équation A devient $(1 - bP)\,dy = (b + P)\,dx$. Je mets dans cette dernière équation $P\,dx + Q\,da$ pour dy, & je la change par-là en celle-ci

$$(B) \ldots\ldots (1 + P^2)\,b\,dx + (bP - 1)\,Q\,da = 0,$$

qui ne renferme que les deux variables x & a. Si on pouvoit tirer de l'équation B la valeur de x en a, on auroit, en faisant varier successivement ce paramètre, pour chacune des coupées la position du point P, ce qui suffiroit pour construire la trajectoire. Autrement, il faudroit pouvoir en tirer la valeur du paramètre en fonction de l'abscisse, & substituer cette valeur dans l'équation des coupées, ce qui donneroit l'équation de la trajectoire. Par exemple, l'équation des coupées étant $y^2 = 2ax - x^2$, on en tire $dy = \frac{(a-x)\cdot dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} + \frac{x\,da}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$; & par conséquent $P = \frac{a-x}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, $Q = \frac{x}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$.

Mettant pour P & Q leurs valeurs dans l'équation B, elle devient

$$b a^2 dx + [b (a - x) - \sqrt{(2ax - x^2)}] x da = 0;$$

& comme celle-ci est homogène entre x & a, il sera toujours facile de séparer celle qu'on voudra de ces deux quantités. Si la trajectoire doit être orthogonale, on a b infini, & l'équation précédente devient $a^2 dx + (a - x) x da = 0$, ou $a dx + x da - \frac{x^2 da}{a} = 0$. L'intégrale des deux premiers termes étant ax, il est clair qu'on rendra toute l'équation intégrable en la divisant par $a^2 x^2$. On a de cette manière $\frac{a dx + x da}{a^2 x^2} - \frac{da}{a^2} = 0$, dont l'intégrale complète est $\frac{1}{ax} - \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2c^2}$, ou $a^2 x^2 = c^2 (2ax - x^2)$. Mais $y^2 = 2ax - x^2$; donc $a^2 x^2 = c^2 y^2$, & $a = \frac{cy}{x}$; je mets pour a sa valeur dans l'équation $y^2 = 2ax - x^2$, & il me vient $x^2 = 2cy - y^2$ qui est celle de la trajectoire, & qui est aussi une équation au cercle.

(294). L'équation des coupées (dans laquelle les variables sont séparées) étant différentielle & représentée par $dy = P dx$, on trouvera Q par le théorême de Leibnitz. En effet, $P dx + Q da$ étant une différentielle exacte, on a $\frac{dP}{da} = \frac{dQ}{dx}$; donc $\frac{dQ}{dx} dx = \frac{dP}{da} dx$, & $\frac{dP}{da} dx$ est par conséquent la différentielle de Q, fonction de x & a, prise par rapport à x seulement. Ainsi Q ne peut être égale qu'à $\int \frac{dP}{da} dx$ plus à une fonction du paramètre a & de constantes que je nomme c'. Cette fonction arbitraire c' se déterminera par les conditions selon lesquelles on doit intégrer $\int P dx$; un exemple qui va suivre rendra cela encore plus clair.

Je mets l'équation B sous cette forme $\frac{1 + P^2}{bP - 1} b dx + Q da = 0$, &, l'ayant multipliée par une fonction π de x & de a, j'ai pour déterminer ce facteur l'équation que voici : la différentielle de $b\pi \frac{1 + P^2}{bP - 1}$ prise par rapport à a seulement, & divisée par da, est égale à la différentielle de $Q\pi$ prise par rapport à x seulement, & divisée par dx. Après avoir mis $\frac{dP}{da}$ pour $\frac{dQ}{dx}$, & avoir fait les réductions nécessaires, cette équation devient

$$b \frac{1 + P^2}{bP - 1} \frac{d\pi}{da} - \frac{1 + b^2}{(bP - 1)^2} \pi \frac{dP}{da} = Q \frac{d\pi}{dx}.$$

On demande de trouver généralement quel doit être P, pour que l'équation B puisse devenir intégrable en la multipliant par une fonction de a seul & de

constantes? Je nomme A cette fonction; & parce que $\frac{dz}{dx}=0$ & $\frac{dz}{da}=\frac{dA}{da}$, on a

$$\frac{dA}{Ada}=\frac{1+b^2}{(bP-1)(1+P^2)}\frac{dP}{da}=\left(\frac{b^2}{bP-1}-\frac{bP+1}{1+P^2}\right)\frac{dP}{da}.$$

Le second membre de cette équation est la différentielle de

$(K)\ldots\ldots\ b\log.(bP-1)-b\log.\sqrt{(1+P^2)}-A\ \text{tang.}\ P$ prise en regardant a seul comme variable & divisée par da; donc $\frac{dK}{da}=\frac{bdA}{Ada}$, & parce que A n'est fonction que de a seul & de constantes, $\frac{dK}{da}da=\frac{bdA}{A}$; d'où l'on tire que K ne peut être égal qu'à $b\log.A$ plus à une fonction de x seul & de constantes que je représenterai par $b\log.bX$. Ainsi pour trouver la valeur complète de P, on aura l'équation

$b\log.A+b\log.bX=b\log.(bP-1)-b\log.\sqrt{(1+P^2)}-A\ \text{tang.}\ P$, ou $b\log.bAX=b\log.\frac{bP-1}{\sqrt{(1+P^2)}}-A\ \text{tang.}\ P$. Si la trajectoire doit être orthogonale, cette équation devient $AX=\frac{P}{\sqrt{(1+P^2)}}$; d'où l'on tire $P=\frac{AX}{\sqrt{(1-A^2X^2)}}$ & $\frac{dP}{da}=\frac{X}{(1-A^2X^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dA}{da}$.

Donc $Q=\int\frac{dA}{da}\frac{Xdx}{(1-A^2X^2)^{\frac{3}{2}}}+c'=\frac{dA}{da}\int\frac{Xdx}{(1-A^2X^2)^{\frac{3}{2}}}+c'$,

puisque dans cette intégration on doit regarder a comme constant. Mettant pour P & Q leurs valeurs dans $\frac{1+P^2}{P}dx+Qda=0$, qui est ce que devient l'équation B lorsque la trajectoire doit être orthogonale, on aura

$$\frac{dx}{AX\sqrt{(1-A^2X^2)}}+dA\int\frac{Xdx}{(1-A^2X^2)^{\frac{3}{2}}}+c'da=0;$$

qu'on rendra intégrable en la multipliant par A. Le premier membre de cette équation a donc pour intégrale $\int\frac{dx}{X\sqrt{(1-A^2X^2)}}$ plus une fonction C de a & de constantes. Différentiant & comparant, il vient $dC=Ac'da$ & $C=\int Ac'da+h$, h ne devant pas renfermer a. Enfin, dans ce cas particulier l'équatiou B étant intégrée, donne $\int\frac{dx}{X\sqrt{(1-A^2X^2)}}+\int Ac'da+h=0$. Or l'équation des coupées étant $dy=\frac{AXdx}{\sqrt{(1-A^2X^2)}}$, on en tire $y=\int\frac{AXdx}{\sqrt{(1-A^2X^2)}}+c$; l'arbitraire c qu'on déterminera par les conditions du problême, celle-ci par exemple, que toutes les coupées partent d'un même point qui soit l'origine des abscisses; l'arbitraire c, dis-je, pouvant renfermer le paramètre, il s'ensuit que

si l'on différentie l'équation précédente en faisant varier x & a, on aura $dy = \frac{AXdx}{\sqrt{(1-A^2X^2)}} + dA\int\frac{Xdx}{(1-A^2X^2)^{\frac{3}{2}}} + dc$; & par conséquent $Q = \frac{dA}{da}\int\frac{Xdx}{(1-A^2X^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{dc}{da}$. Comparant cette valeur de Q avec celle que nous avons trouvée plus haut, on a $c'da = dc$; donc en prenant pour l'équation des coupées $y = \int\frac{AXdx}{\sqrt{(1-A^2X^2)}} + c$, on trouvera cette autre équation $\int\frac{dx}{X\sqrt{(1-A^2X^2)}} + \int Adc + h = 0$, qui ne renferme d'autre fonction arbitraire du paramètre que c, & de laquelle si on peut tirer la valeur de x en fonction de paramètre, il sera bien facile ensuite de construire la trajectoire. Quoi qu'il en soit, il est clair maintenant, comme l'a remarqué Euler, qu'il ne peut s'introduire dans le problême d'autre fonction arbitraire du paramètre que c; & qu'il y a des cas où l'on peut construire la trajectoire indépendamment de la possibilité d'intégrer Pdx, ou de faire dépendre l'intégrale de cette différentielle de la quadrature des courbes connues.

(295). On peut proposer d'autres conditions de sécabilité, comme, par exemple (*fig. LXIV*), que toutes les courbes partant du même point A, la trajectoire les coupe de manière que les arcs tels que AM puissent être parcourus dans le même temps par un corps qui, dans un milieu non résistant, descendroit le long de cette courbe, n'étant animé d'autre force que de la gravité. Euler a résolu ce problême dans sa méchanique. Je nomme g la gravité qui est une force accélératrice constante, u la vitesse au point M, AP, x, PM, y, AM, s. Je prends sur la verticale MK une partie MK pour représenter la gravité, & je décompose cette force en deux autres; l'une MO, dont la direction est perpendiculaire à la courbe, l'autre KO, dont la direction est parallèle à la tangente au point M, & qui seule contribue au mouvement du corps le long de la courbe qui est supposée ne pouvoir pas changer de figure. On aura $MO : KO :: ds : dx$; & $\frac{gdx}{ds}$ est la force qui fait décrire au corps le petit arc ds. Ainsi $udu = gdx$, d'où l'on tire $u = \sqrt{(2gx)}$, car au point A la vîtesse est nulle. Le temps que le corps met à descendre le long de l'arc AM est égal à $\int\frac{ds}{\sqrt{(2gx)}}$, ou à $\int\frac{s'dx}{\sqrt{(2gx)}}$, en faisant $ds = s'dx$. Puisque tous les arcs tels que s sont parcourus dans le même temps, la formule précédente, rapportée à toutes les coupées, est une quantité constante; c'est-à-dire que la différentielle de cette formule, prise en faisant varier x & le paramètre a doit être égale à zéro. On aura donc $\frac{s'dx}{\sqrt{(2gx)}} + da\int\frac{ds'}{da}\frac{dx}{\sqrt{(2gx)}} = 0$. Ajoutons maintenant que toutes les courbes qui partent du point A soient semblables.

Lorsque

Lorsque deux fonctions F & F', l'une de y, x, &c. & du paramètre a, l'autre de y', x', &c. & du paramètre a', de même dimension n, sont semblables, on a $x : x' :: a : a'$, $y : y' :: a : a'$, &c., $F : F' :: a^n : a'^n$. Si nous supposons $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, &c., $a' = a + da$, on aura aussi $F' = F + dF$; & les proportions précédentes pourront être changées en celles-ci,

$$x : dx :: a : da, \; y : dy :: a : da : \&c., \quad F : dF :: a^n : na^{n-1}\, da;$$

d'où il sera facile de tirer $dx = \frac{x\,da}{a}$, $dy = \frac{y\,da}{a}$, &c., $dF = \frac{n.F\,da}{a}$.

Soit maintenant $dF = M\,dy + N\,dx + \ldots\ldots\ldots + U\,da$, on aura, en mettant pour dx, dy, &c., dF leurs valeurs, & divisant ensuite par da, $nF = My + Nx + \ldots\ldots\ldots + Ua$, propriété qui est celle de toutes les fonctions homogènes, comme nous l'avons démontré précédemment (n°. 231).

Puisque dans l'hypothèse que toutes les coupées sont des courbes semblables, leur équation doit être homogène en y, x & a; s' est une fonction homogène de dimension nulle de x & a, & par conséquent $\int^{'} \frac{s'\,dx}{\sqrt{(2gx)}}$ est une fonction homogène des mêmes quantités dont la dimension est $\frac{1}{2}$. Par la propriété des fonctions homogènes $\frac{s'x}{\sqrt{(2gx)}} + a\int^{'} \frac{ds'}{da} \frac{dx}{\sqrt{(2gx)}} = \frac{1}{2}\int^{'} \frac{s'\,dx}{\sqrt{(2gx)}}$; donc $\int^{'} \frac{ds'}{da} \frac{dx}{\sqrt{(2gx)}} = \frac{1}{2a}\int^{'} \frac{s'\,dx}{\sqrt{(2gx)}} - \frac{s'x}{a\sqrt{(2gx)}}$, & faisant cette substitution dans l'équation trouvée plus haut, on la change en celle-ci,

$\frac{s'\,dx}{\sqrt{x}} + \frac{da}{2a}\int^{'} \frac{s'\,dx}{\sqrt{x}} - \frac{s'\,da\sqrt{x}}{a} = 0$. Mais une des conditions du problême est que $\int^{'} \frac{s'\,dx}{\sqrt{(2gx)}}$ soit une quantité constante; prenons pour cette quantité constante le temps qu'un corps grave mettroit à tomber d'une hauteur h, lequel temps on trouvera facilement être égal à $\frac{2\sqrt{(h)}}{\sqrt{(2g)}}$, & l'équation précédente deviendra

$$(A) \ldots\ldots\ldots \frac{s'\,dx}{\sqrt{(x)}} + \frac{da\sqrt{(h)}}{a} - \frac{s'\,da\sqrt{(x)}}{a} = 0.$$

(296). La courbe AMC est une demi-cycloïde dont CE est l'axe & le diamètre du cercle générateur : or nous avons démontré que l'arc CM de la cycloïde est égal à $2\sqrt{(CE \cdot CL)}$ (n°. 186), & par conséquent toute la demi-cycloïde à $2\,CE$; donc $s = 2\,CE - 2\sqrt{(CE \cdot CL)}$. Je mets pour CL sa valeur $CE - x$; puis je fais $2\,CE = a$, & l'équation précédente devient $s = a - \sqrt{(a^2 - 2ax)}$; d'où l'on tire

$$ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}} \;\&\; dy\,[= \sqrt{(ds^2 - dx^2)}\,] = \frac{dx\sqrt{(2ax)}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}.$$

Je mets dans l'équation A pour s sa valeur $\frac{a}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$, & elle devient

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{(a)}\sqrt{(ax-2x^2)}}+\frac{da\sqrt{(h)}}{a}-\frac{x\,da}{\sqrt{(a)}\sqrt{(ax-2x^2)}}=0, \text{ ou}$$

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{ax\,da-a^2\,dx}{\sqrt{(a)}\sqrt{(ax-2x^2)}}=da\sqrt{(h)}.$$

On a $y=\int\frac{dx\sqrt{(2ax)}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$; cette équation étant différentiée en faisant varier y, x & le paramètre a, donne $dy=\frac{dx\sqrt{(2ax)}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}+da\int\frac{a\,dx\sqrt{(2ax)}}{(a^2-2ax)^{\frac{3}{2}}}$. Mais y est une fonction homogène de x & de a dont la dimension est 1; donc $y=\frac{x\sqrt{(2ax)}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}+a\int\frac{a\,dx\sqrt{(2ax)}}{(a^2-2ax)^{\frac{3}{2}}}$, d'où $\int\frac{a\,dx\sqrt{(2ax)}}{(a^2-2ax)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y}{a}-\frac{x\sqrt{(2ax)}}{a\sqrt{(a^2-2ax)}}$, & $dy=\frac{dx\sqrt{(2ax)}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}+\frac{y\,da}{a}-\frac{x\,da\sqrt{(2ax)}}{a\sqrt{(a^2-2ax)}}$, équation à laquelle je donne la forme que voici

$$(b) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{a\,dy-y\,da}{a^2\sqrt{(2)}}=\frac{ax\,dx-x^2\,da}{a^2\sqrt{(ax-2x^2)}}.$$

Je multiplie l'équation a par $\frac{1}{4a\sqrt{(a)}}$, & je l'ajoute à l'équation b, ce qui donne $\frac{a\,dy-y\,da}{a^2\sqrt{(2)}}+\frac{da\sqrt{(h)}}{4a\sqrt{(a)}}=\frac{4ax\,dx-a^2\,dx-4x^2\,da+ax\,da}{4a^2\sqrt{(ax-2x^2)}}$, dont l'intégrale est $\frac{y}{a\sqrt{(2)}}-\frac{\sqrt{(h)}}{2\sqrt{(a)}}=-\frac{\sqrt{(ax-2x^2)}}{2a}$. Je dégage $\sqrt{(a)}$ dans cette équation, & j'ai $\sqrt{(a)}=\frac{y\sqrt{(2h)}\pm\sqrt{(2xy^2-2hx^2+2x^3)}}{h-x}$; donc $\sqrt{(ax-2x^2)}=\sqrt{(h)}\sqrt{(a)}-y\sqrt{(2)}=\frac{xy\sqrt{(2)}\pm\sqrt{(h)}\sqrt{(2xy^2-2hx^2+2x^3)}}{h-x}$.

Avec les équations a & b j'élimine da, & il me vient

$$dy\sqrt{(h)}=\frac{(x\,dy-y\,dx)\sqrt{(a)}+x\,dx\sqrt{(2h)}}{\sqrt{(ax-2x^2)}},$$

équation dans laquelle si l'on met pour $\sqrt{(a)}$ & $\sqrt{(ax-2x^2)}$ leurs valeurs, on aura $(x\,dy-y\,dx-h\,dy)\sqrt{(x)}=dx\sqrt{(h)}\sqrt{(y^2-hx+x^2)}$, qui est celle de la trajectoire.

Jean Bernoulli a donné le nom de *trajectoires réciproques* aux courbes dont la propriété est, que si l'on fait mouvoir une de ces courbes parallélement à elle-même le long de son axe, & qu'on fasse en même temps mouvoir le long d'une parallèle à cet axe une courbe égale & semblable à la première, ces courbes se coupent de manière que l'angle de section soit constant. Mais nous ne nous arrêterons pas davantage à ces sortes de questions pour nous occuper de la recherche des tautochrones dans les milieux résistans.

(297). On demande la courbe dont la propriété est, que si un corps descend le long de sa concavité, de quelque point qu'il commence à descendre, il arrivera au point le plus bas toujours dans le même temps; ou bien une courbe telle que si un corps monte le long de sa concavité, il emploiera toujours le même temps à monter depuis le point le plus bas jusqu'à celui où doit le faire arriver la vîtesse avec laquelle il est parti de ce point le plus bas. Tout doit se passer dans un milieu qui résiste comme une fonction quelconque de la vîtesse. Huyghens découvrit le premier que la tautochrone est une cycloïde, lorsque le corps n'est animé d'autre force que de la gravité, & qu'il se meut dans un milieu qui ne résiste pas. Newton vint ensuite qui démontra que lorsque la résistance est proportionnelle à la vîtesse, c'est encore la cycloïde qui est la tautochrone des corps graves. Mais ce furent Jean Bernoulli & Euler qui les premiers résolurent le problême dans l'hypothèse de la gravité & d'un milieu résistant comme le quarré de la vîtesse. Le Mémoire de Bernoulli fut imprimé parmi ceux de l'académie des sciences de 1730, & se trouve aussi dans le troisième volume de ses Œuvres; la solution de Euler parut en 1729 dans les Mémoires de Pétersbourg, & se trouve aussi dans le second volume de sa Méchanique. En 1734, Fontaine publia une très-belle méthode pour résoudre le même problême, & il ajouta aux découvertes de Bernoulli & Euler que la courbe qu'ils avoient démontrée être tautochrone dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle au quarré de la vîtesse, l'étoit encore dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle au quarré de la vîtesse augmenté d'un multiple de la vîtesse. Il se passa ensuite beaucoup de temps sans que l'on vît rien paroître sur les tautochrones, & ce ne fut qu'en 1767 que Dalembert & Lagrange publièrent dans les Mémoires de Berlin, des recherches très-profondes sur cette matière. Lagrange & Euler reprirent encore ce travail, l'un en 1770, dans les Mémoires de la même académie; l'autre en 1772, dans les Mémoires de l'académie de Pétersbourg.

(298). Je conçois que le corps monte (*fig. LXV*), & qu'il est arrivé de A en m; je suppose en même temps que M soit le point le plus haut où il puisse monter. Je nomme l'arc Am, x; l'abscisse Ap, z; la vîtesse au point m, u; le temps employé pour arriver du point A à ce point m, t; la force rétardatrice, p; l'arc total AM, a; l'abscisse AP, c; & enfin le temps que le corps emploiera à monter le long de AM, T. Il faut, comme on voit, que le temps T soit absolument indépendant de l'arc a.

On aura d'abord $dt = \frac{dx}{u}$; & parce que la force p retarde le corps le long de petit arc $m\mu = dx$, $udu = -pdx$, ou $udu + pdx = 0$. Il est visible que $t = \int \frac{dx}{u}$, cette intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $x = 0$; & que si après l'intégration on fait $x = a$, on aura T ou le temps total depuis le commencement du mouvement jusqu'à la fin. Or, ce temps total doit être indépendant de l'espace parcouru a; donc il faut que la valeur de $\int \frac{dx}{u}$ soit telle, qu'en faisant $x = a$, a disparoisse entiérement.

Imaginons deux fonctions pareilles X & A, l'une de x, l'autre de a; si nous pouvions faire que la valeur de $\int \frac{dx}{u}$ fût une fonction de dimension nulle de X & de A, en substituant dans cette fonction qA au lieu de X, A disparoîtroit, & il n'y resteroit plus que q. Le temps t seroit alors une fonction de q seulement. Pour avoir le temps total ou T, il faudroit dans t faire $x = a$: or, la supposition de $x = a$ rendroit $X = A$; &, à cause de $X = qA$, $q = 1$; donc alors le temps total T auroit une valeur déterminée & indépendante de a. Soit $dX = X'dx$ & $dA = A'da$, X' étant une fonction de x & A' une pareille fonction de a; il suit de tout ce qui précède, que si on différentie $\int \frac{dx}{u}$ en faisant varier x & a, qu'on substitue pour dx & da leurs valeurs $\frac{dX}{X'}$ & $\frac{dA}{A'}$, & qu'on mette ensuite pour dX ceci, $Adq + qdA$, on doit avoir le co-efficient de dA égal à zéro. C'est à-peu-près de cette manière que Jean Bernoulli & Euler sont parvenus à résoudre le problême dans les hypothèses dont nous venons de parler.

Nous avons $udu + pdx = 0$, ou $du = \frac{-pdx}{u}$, supposons qu'en faisant varier x & a, $du = \frac{-pdx}{u} + Qda$; nous aurons pour la différentielle de $\int \frac{dx}{u}$, en faisant varier x & a, $\frac{dx}{u} - da \int \frac{Qdx}{u^2}$, ou, mettant pour dx & da leurs valeurs, $\frac{dX}{uX'} - \frac{dA}{A'} \int \frac{Qdx}{u^2}$. Donc si dans cette expression nous écrivons $Adq + qdA$ pour dX, nous aurons $\frac{Adq}{uX'} + \left(\frac{q}{uX'} - \frac{1}{A'} \int \frac{Qdx}{u^2}\right) dA$; & par conséquent $\frac{q}{uX'} - \frac{1}{A'} \int \frac{Qdx}{u^2} = 0$. Je remets pour q sa valeur $\frac{X}{A}$, & j'ai l'équation $\frac{X}{uX'} - \frac{A}{A'} \int \frac{Qdx}{u^2} = 0$, laquelle, en faisant, pour plus de simplicité, $\frac{X}{X'} = s$, $\frac{A}{A'} = \alpha$, se change en celle-ci $\frac{s}{u} - \alpha \int \frac{Qdx}{u^2} = 0$. Je différentie cette équation en faisant varier x seulement; &, après avoir fait $ds = s'dx$, & avoir tout divisé par dx, il me vient $\frac{us' + \frac{sp}{u}}{u^2} = \frac{\alpha Q}{u^2}$; d'où je tire $Q = \frac{us'}{\alpha} + \frac{sp}{\alpha u}$. En substituant pour Q sa valeur dans l'équation $du = \frac{-pdx}{u} + Qda$, j'aurai $du = \frac{-p}{u} dx + \left(us' + \frac{sp}{u}\right) \frac{da}{\alpha}$, à laquelle je donnerai la forme suivante

$$(A) \ldots\ldots\ldots \frac{udu + pdx}{u^2 s' + sp} - \frac{da}{\alpha} = 0.$$

Puisque

Puisque les fonctions s & p ne doivent pas renfermer a, il est clair que si l'équation A est possible, $\frac{u\,du + p\,dx}{u^2 s' + sp}$ doit être la différentielle exacte d'une fonction de x & u; j'aurai donc $\frac{d[u:(u^2 s' + sp)]}{dx} = \frac{d[p:(u^2 s' + sp)]}{du}$. Je fais $ds' = s''\,dx$, dx est constant; & après avoir exécuté les différentiations indiquées, il me vient l'équation

$$(\text{B}) \ldots\ldots\ldots u^2 s'' + u s' \frac{dp}{du} + s \frac{dp}{dx} - s'p = 0;$$

qui doit avoir lieu sans qu'il en résulte aucune nouvelle relation entre x & u; & qui par conséquent est identique.

Il faut remarquer que s doit être une fonction de x telle qu'elle s'évanouisse lorsque $x = 0$. En effet, les calculs précédens sont fondés sur cette considération, qu'en faisant $X = qA$, l'expression du temps $\int' \frac{dx}{u}$ doit devenir une fonction de la seule variable q. Soit donc désignée par $\varphi:(q)$ cette fonction de q; on aura en général $\int' \frac{dx}{u} = \varphi:(q) + c$, la constante c devant être telle que $\int \frac{dx}{u}$ soit nulle lorsque $x = 0$. Or, puisque X est une fonction de la seule variable x, si l'on suppose qu'elle devienne $= f$ quand $x = 0$, on aura $q = \frac{f}{A}$, $\varphi:\left(\frac{f}{A}\right) + c = 0$, & par conséquent $c = -\varphi:\left(\frac{f}{A}\right)$. Donc $\int \frac{dx}{u} = \varphi:(q) - \varphi:\left(\frac{f}{A}\right)$; d'où l'on voit que la valeur de $\int' \frac{dx}{u}$ contiendra nécessairement la quantité A, à moins que f ne soit $= 0$. Donc il faut que la fonction X soit telle qu'elle s'évanouisse lorsque $x = 0$; & comme $s = \frac{X}{X'}$, il faudra aussi que la quantité s devienne nulle dans la même hypothèse.

(299). Indépendamment de la résistance du milieu, que je suppose être proportionnelle à une fonction V de la vîtesse, le corps est retardé le long de la courbe par sa pesanteur. Or j'ai démontré plus haut que cette force retardatrice étoit proportionnelle à $\frac{g\,dz}{dx}$; donc si je fais $\frac{g\,dz}{dx} = \sigma$, σ étant une fonction de x & de constantes, je pourrai prendre d'abord $p = \sigma + V$. Je dis que σ ne doit renfermer de variable que x, la raison en est bien simple; car si le problême est possible, il existe entre x & z une équation qui est celle de la tautochrone, de laquelle je pourrai tirer $\frac{dz}{dx}$ en fonction de x. Maintenant soit $d\sigma = \sigma'\,dx$ & $dV = V'\,du$; l'équation

$p = \sigma + V$ donnera $\frac{dp}{dx} = \sigma'$, $\frac{dp}{du} = V'$; & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation B, elle deviendra $u^\lambda s' + V' u s' - V s' + s\sigma' - s'\sigma = 0$.

Si au lieu de ſuppoſer la réſiſtance du milieu proportionnelle à V, je l'euſſe ſuppoſée proportionnelle à $V + mu$, j'aurois trouvé la même équation ; d'où je puis conclure qu'une courbe qui eſt tautochrone dans une hypothèſe quelconque de réſiſtance, le feroit encore ſi cette réſiſtance venoit à augmenter d'une quantité proportionnelle à la vîteſſe.

Je ſuppoſe $V = l + mu + nu^\lambda$, d'où $V' = m + n\lambda u^{\lambda-1}$; & mettant ces valeurs dans l'équation précédente, il me vient

$$u^\lambda s'' + (\lambda - 1)\, n s' u^\lambda - l s' + s\sigma' - s'\sigma = 0.$$

Cela poſé, ſi l'équation B eſt identique, la précédente le fera auſſi ; & comme les fonctions s & σ ſont abſolument indépendantes de u, on en tirera les deux équations

$$u^\lambda s'' + (\lambda - 1)\, n s' u^\lambda = 0,\quad s\sigma' - s'\sigma - l s' = 0;$$

ou, mettant pour s'', s' & σ' leurs valeurs $\frac{d^2 s}{dx^2}$, $\frac{ds}{dx}$ & $\frac{d\sigma}{dx}$, ces deux-ci

$$(a) \ldots\ldots d^2 s + (\lambda - 1)\, n u^{\lambda-1} ds\, dx = 0 \text{ \& } s d\sigma - \sigma ds = l ds;$$

dont la ſeconde devient intégrable étant multipliée par $\frac{1}{s^2}$, & donne $\sigma = is - l$.

L'hypothèſe la plus générale dans laquelle l'équation a puiſſe réſoudre le problême, eſt celle où l'on auroit la réſiſtance du milieu proportionnelle à $l + mu + nu^2$. Soit donc $\lambda = 2$, & l'équation a deviendra $d^2 s + n ds\, dx = 0$, d'où l'on tire $ds = he^{-nx} dx$, & $s = g - \frac{h}{n} e^{-nx}$. Mais s doit être tel qu'il s'évanouiſſe lorſque $x = 0$; donc $g = \frac{h}{n}$, & $s = \frac{h}{n}(1 - e^{-nx})$. Donc $\sigma\ (= is - l) = \frac{hi}{n}(1 - e^{-nx}) - l$, ou, mettant h pour hi, $\sigma = \frac{h}{n}(1 - e^{-nx}) - l$. Nous avons fait $\frac{g\, dz}{dx} = \sigma$; donc $\frac{g\, dz}{dx} = \frac{h}{n}(1 - e^{-nx}) - l$, équation de la tautochrone, dans l'hypothèſe préſente, lorſque le corps eſt aſcendant ; ſi on eût ſuppoſé que le corps deſcend, on auroit trouvé $\frac{g\, dz}{dx} = \frac{h}{n}(e^{nx} - 1) + l$.

On demande par exemple quelle eſpèce de courbe c'eſt que la tautochrone lorſque la réſiſtance eſt nulle, ou ſimplement proportionnelle à la vîteſſe ? On aura

$$e^{\pm nx} = 1 \pm \frac{n(\sigma \mp l)}{h};\quad \pm x = \frac{\log.\left(1 \pm \frac{n(\sigma \mp l)}{h}\right)}{n} = \pm \frac{\sigma \mp l}{h}$$

lorſque $n = 0$ (n°. 278) ; donc, dans cette hypothèſe, $\sigma = hx \pm l$, &

$g\,dz = hx\,dx \pm l\,dx$; d'où l'on tire $gz = \frac{hx^2}{2} \pm lx$, car $x = 0$ doit donner $z = 0$, & $x = \mp \frac{l}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{2gz}{h} + \frac{l^2}{h^2} \right)}$, équation de la cycloïde.

(300). Nous avons, lorſque le corps eſt aſcendant, & nous le ſuppoſerons pour abréger, $u\,du + e\,dx + (l + mu + nu^2)\,dx = 0$ & $t = \int \frac{dx}{u}$; il nous ſera donc bien facile de trouver l'expreſſion de la vîteſſe & celle du temps dans l'hypothèſe préſente. En effet, en mettant pour e ſa valeur, la première équation devient $u\,du + mu\,dx + nu^2\,dx = \frac{h\,dx}{n}(c^{-nx} - 1)$. Je fais $u = y(c^{-nx} - 1)$, $du = dy(c^{-nx} - 1) - ny\,dx\,c^{-nx}$; & j'ai la transformée $y\,dy(c^{-nx} - 1) + my\,dx - ny^2\,dx = \frac{h\,dx}{n}$, d'où je tire $\frac{dx}{c^{-nx} - 1} = \frac{y\,dy}{\frac{h}{n} - my + ny^2}$. L'intégrale du premier membre eſt $\frac{1}{n} \log. \frac{1}{1 - c^{nx}}$.

Je remarque enſuite que la différentielle logarithmique de $\frac{h}{n} - my + ny^2 = \frac{(2ny - m)\,dy}{\frac{h}{n} - my + ny^2}$, & qu'ainſi $\int \frac{y\,dy}{\frac{h}{n} - my + ny^2} = \frac{1}{2n}\left[\log.\left(\frac{h}{n} - my + ny^2\right) + m\int \frac{dy}{\frac{h}{n} - my + ny^2}\right]$. Pour intégrer cette dernière quantité, je fais $y\sqrt{n} - \frac{m}{2\sqrt{n}} = \rho$, d'où $ny^2 - my = \rho^2 - \frac{m^2}{4n}$ & $dy = \frac{d\rho}{\sqrt{n}}$; donc

$$\int \frac{dy}{\frac{h}{n} - my + ny^2} = \int \frac{d\rho}{\sqrt{n}\left(\frac{h}{n} - \frac{m^2}{4n} + \rho^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left[h - \frac{m^2}{4}\right]}} \mathcal{A}\ \text{tang.}$$

$$\frac{\rho\sqrt{n}}{\sqrt{\left[h - \frac{m^2}{4}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{\left[h - \frac{m^2}{4}\right]}} \mathcal{A}\ \text{tang.} \frac{ny - \frac{m}{2}}{\sqrt{\left[h - \frac{m^2}{4}\right]}}.$$ Donc

$$2 \log. \frac{i}{1 - c^{nx}} = \log.\left(\frac{h}{n} - my + ny^2\right) + \frac{m}{\sqrt{\left[h - \frac{m^2}{4}\right]}} \mathcal{A}\ \text{tang.} \frac{ny - \frac{m}{2}}{\sqrt{\left[h - \frac{m^2}{4}\right]}}.$$

On déterminera la conſtante arbitraire i de manière que $y = 0$, lorſque $x = a$, & on aura

$$\log. i = \frac{1}{2} \log. \frac{h}{n} - \log. \frac{1}{1 - c^{na}} + \frac{m}{2\sqrt{\left[h - \frac{m^2}{4}\right]}} \mathcal{A}\ \text{tang.} \frac{-m}{2\sqrt{\left[h - \frac{m^2}{4}\right]}};$$

donc 2 log. $\frac{1-c^{na}}{1-c^{nx}}$ = log. $\frac{h-mny+n^2y^2}{n}+\frac{m}{\sqrt{\left[h-\frac{m^2}{4}\right]}}$

$$\left(A \text{ tang. } \frac{my-\frac{m}{2}}{\sqrt{\left[h-\frac{m^2}{4}\right]}} - A \text{ tang. } \frac{-m}{2\sqrt{\left[h-\frac{m^2}{4}\right]}}\right);$$

lorſqu'on aura tiré de cette équation la valeur de y en x, on aura bien aiſément celle de u en x. Pour avoir l'expreſſion du temps, il faut intégrer $\frac{dx}{u}$ qui devient $\frac{dy}{\frac{h}{n}-my+ny^2}$;

donc $t=\frac{1}{\sqrt{\left(h-\frac{m^2}{4}\right)}}\left(A \text{ tang. } \frac{ny-\frac{m}{2}}{\sqrt{\left[h-\frac{m^2}{4}\right]}}+c\right)$.

Lorſque $t=0$, $x=0$ & y devient infini; donc $-c$ eſt égal à l'arc dont la tangente eſt infinie, ou au quart de la circonférence; &

$t=\frac{1}{\sqrt{\left[h-\frac{m^2}{4}\right]}}\left(A \text{ tang. } \frac{ny-\frac{m}{2}}{\sqrt{\left[h-\frac{m^2}{4}\right]}}-\frac{\pi}{4}\right)$. Pour avoir l'expreſſion du temps total, il faut dans la valeur de t faire $x=a$ ou $y=0$, & on aura $T=\frac{1}{\sqrt{\left[h-\frac{m^2}{4}\right]}}\left(A \text{ tang. } \frac{-m}{2\sqrt{\left[h-\frac{m^2}{4}\right]}}-\frac{\pi}{4}\right)$; on ne doutera pas que cette expreſſion du temps total ne ſoit poſitive, lorſqu'on ſe rappellera que l'angle qui a pour tangente une quantité négative eſt toujours plus grand qu'un angle droit. Je remarquerai enſuite que l ni n n'entrent point dans l'expreſſion du temps total; & qu'ainſi ce temps eſt le même, ſoit que l'on ſuppoſe la réſiſtance du milieu proportionnelle à $l+mu+nu^2$, ou ſimplement proportionnelle à mu; donc le temps total eſt le même, lorſque la réſiſtance eſt nulle, & lorſqu'elle eſt proportionnelle au quarré de la viteſſe; on a dans ces deux dernières hypothèſes $T=\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4\sqrt{h}}$.

Nous n'avons encore réſolu qu'un cas très-particulier du problême des tautochrones; peut-être que l'intégration complète de l'équation B, qui eſt aux différences partielles, pourroit nous conduire à quelque choſe de plus général; mais il faut qu'auparavant nous faſſions mieux connoître, que nous ne l'avons encore pu faire, ce genre particulier d'équations qu'on nomme aux différences partielles.

(301). Pour repréſenter la différentielle d'une fonction indéterminée z des variables

variables y, x & de constantes, nous sommes convenus d'écrire $dz = \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{dx} dx$, & de donner aux co-efficiens $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ le nom de différences partielles du premier ordre de la fonction z. On donne ordinairement ce nom à chacun des termes $\frac{dz}{dy} dy$, $\frac{dz}{dy} dx$; si je ne le fais pas ainsi, ce n'est que pour plus de clarté. Toute équation entre y, x, z, $\frac{dz}{dy}$ & $\frac{dz}{dx}$ est une équation aux différences partielles du premier ordre. Soit d'abord proposé d'intégrer l'équation $\frac{dz}{dy} = P$, par P j'entends une fonction donnée des variables y, x & de constantes. Puisque $\frac{dz}{dy} dy = P dy$, il est clair que $P dy$ est un terme de la différentielle de z; & z par conséquent ne peut être égal qu'à l'intégrale de $P dy$, prise par rapport à y seulement, plus à une fonction de x & de constantes. Si donc nous désignons par $F:(x)$ une fonction quelconque de x & de constantes, nous aurons $z = \int P dy + F:(x)$, c'est l'intégrale complète de l'équation $\frac{dz}{dy} = P$. Quelle que soit la fonction de x, ajoutée en intégrant, la différentielle de $z = \int P dy + F:(x)$, prise en ne faisant varier que y, sera toujours $\frac{dz}{dy} = P$; ainsi l'intégrale que nous venons de trouver ne seroit pas complète, si $F:(x)$ ne représentoit une fonction quelconque de x, on entend par-là une fonction de x & de constantes la plus générale qu'il soit possible de concevoir. On trouvera de la même manière que l'intégrale complète de l'équation $\frac{dz}{dx} = P$, est $z = \int P dx + f:(y)$.

Une lettre suivie de deux points mise devant une quantité comprise entre deux parenthèses, désignera toujours dans la suite une fonction quelconque de cette quantité ; ainsi $F:(y)$, $f:(ax+y^2)$ désignent deux fonctions quelconques, l'une de y, l'autre de $ax+y^2$. Il est clair que la différentielle d'une fonction de y est égale à dy multiplié par une autre fonction de y; on est convenu d'écrire $dF:(y) = dy F':(y)$, $dF':(y) = dy F'':(y)$, $dF'':(y) = dy F''':(y)$, &c. $df:(ax+y^2) = (adx + 2ydy) f':(ax+y^2)$, &c. Une lettre suivie de deux points mise devant deux quantités séparées par une virgule, & comprise entre deux parenthèses, désignera toujours dans la suite une fonction quelconque de ces deux quantités; ainsi $F:(x,y)$ désigne une fonction quelconque des deux variables y & x; $f:(ax+y^2)$ est bien une fonction de y & x, mais elle n'est pas une fonction de ces deux variables la plus générale que nous puissions concevoir. Maintenant, pour représenter la différentielle de $F:(x,y)$; soient P & Q deux autres fonctions quelconques des mêmes variables, qui n'aient d'autres relations entr'elles que

celle-ci $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$, on pourra ſuppoſer $dF:(x,y) = (Pdy + Qdx)F':(x,y)$.

(302). On propoſe d'intégrer l'équation $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} = 0$, M & N étant des fonctions données de y, x & de conſtantes. On a $\frac{dz}{dy} = -\frac{N}{M}\frac{dz}{dx}$; & mettant pour $\frac{dz}{dy}$ ſa valeur dans $dz = \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dx}dx$, $dz = \frac{Mdx - Ndy}{M}\frac{dz}{dx}$. Nommons μ le facteur qui doit rendre $Mdx - Ndy$ une différentielle exacte, & faiſons $\mu Mdx - \mu Ndy = dS$; on aura $dz = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dS}{\mu M}$, équation qui ſeroit abſurde ſi z & $\frac{dz}{dx} : \mu M$ n'étoient fonctions de S. Donc $z = F(S)$, c'eſt l'intégrale complète de l'équation propoſée. On en tire

$\frac{dz}{dx} = \frac{dS}{dx}F':(S) = \mu MF':(S)$ & $\frac{dz}{dx} : \mu M = F':(S)$,

$\frac{dz}{dy} = \frac{dS}{dy}F':(S) = -\mu NF':(S)$ & $-\frac{dz}{dy} : \mu N = F':(S)$;

ſi on élimine $F':(S)$, il vient $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} = 0$.

Je prendrai pour exemple l'équation $y\frac{dz}{dy} + x\frac{dz}{dx} = 0$; il eſt viſible qu'on rendra $ydx - xdy$ une différentielle exacte en la multipliant par $\frac{1}{y^2}$; donc $\mu = \frac{1}{y^2}$ & $S = \frac{x}{y}$. Donc $z = F:\left(\frac{x}{y}\right)$ eſt l'intégrale complète demandée.

(303). L'équation $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + P = 0$ (M, N, P ſont des fonctions données de y, x & de conſtantes) donne $\frac{dz}{dy} = -\frac{N}{M}\frac{dz}{dx} - \frac{P}{M}$; & mettant pour $\frac{dz}{dy}$ ſa valeur dans $dz = \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{dx}dx$, $dz = \frac{Mdx - Ndy}{M}\frac{dz}{dx} - \frac{Pdy}{M}$. Soit comme ci-deſſus $\mu Mdx - \mu Ndy = dS$; & l'équation précédente deviendra $dz = \frac{dz}{dx}\frac{dS}{\mu M} - \frac{Pdy}{M}$, dont le ſecond membre, après qu'on aura éliminé x abſolument, au moyen de $\int(\mu Mdx - \mu Ndy) = S$, ſera la différentielle exacte d'une fonction des deux variables y & S. Donc $z = -\int\frac{Pdy}{M} + F:(S)$; il ne faut point perdre de vue qu'avant d'intégrer

$\frac{P\,dy}{M}$, en ne faisant varier que y, on doit mettre dans $\frac{P}{M}$ pour x sa valeur en y & S. Quelques exemples rendront cela encore plus clair.

On demande l'intégrale complète de $y\frac{dz}{dy} + x\frac{dz}{dx} = a\sqrt{(x^2+y^2)}$? On a $M = y$, $N = x$, $P = -a\sqrt{(x^2+y^2)}$; à cause de $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = dS$, $S = \frac{x}{y}$; & mettant pour x sa valeur yS dans $\frac{a\,dy\sqrt{(x^2+y^2)}}{y}$, on a $a\,dy\sqrt{(1+S^2)}$, dont l'intégrale, prise par rapport à y, est $ay\sqrt{(1+S^2)}$. Donc la proposée a pour intégrale complète

$$z = ay\sqrt{(1+S^2)} + F:(S) = a\sqrt{(x^2+y^2)} + F:\left(\frac{x}{y}\right).$$

Soit encore $y^2\frac{dz}{dy} + x^2\frac{dz}{dx} = axy$. Il est clair qu'on rendra $y^2\,dx - x^2\,dy$ une différentielle exacte en la divisant par y^2x^2, & on aura $\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2} = dS$, d'où l'on tire $S = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}$. Mais $-\frac{P\,dy}{M} = \frac{ax\,dy}{y} = \Big($ en mettant tant pour x sa valeur $\frac{y}{1-Sy}\Big)\frac{a\,dy}{1-Sy}$; donc

$$z = -\frac{a}{S}\log.(1-Sy) + F:(S) = \frac{axy}{y-x}\log.\frac{y}{x} + F:\left(\frac{x-y}{xy}\right);$$

c'est l'intégrale complète demandée.

(304). Pour intégrer $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + Pz = 0$; je fais $z = e^{\rho}$, ρ étant une nouvelle indéterminée quelconque. On tire delà $\frac{dz}{dy} = e^{\rho}\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{dz}{dx} = e^{\rho}\frac{d\rho}{dx}$, & substituant ces valeurs dans la proposée, on a l'équation $M\frac{d\rho}{dy} + N\frac{d\rho}{dx} + P = 0$, qui n'étant autre que celle que nous venons d'intégrer, donne $\rho = -\int\frac{P\,dy}{M} + F:(S)$. Donc $z = e^{-\int\frac{P\,dy}{M} + F:(S)} = e^{-\int\frac{P\,dy}{M}}\cdot e^{F:(S)}$; ou, mettant pour plus de simplicité $f:(S)$ au lieu de $e^{F:(S)}$, $z = e^{-\int\frac{P\,dy}{M}}\cdot f:(S)$.

Je prends pour exemple l'équation $x\frac{dz}{dy} + y\frac{dz}{dx} = az$. On a $x\,dx - y\,dy = dS$ & $S = \frac{x^2-y^2}{2}$; de plus $-\frac{P\,dy}{M} = \frac{a\,dy}{x} = \frac{a\,dy}{\sqrt{(2S+y^2)}}$.

dont l'intégrale, prise en ne faisant varier que y, est a log. $[y+\sqrt{(2S+y^2)}]$. Donc $e^{-\int\frac{Pdy}{M}}=[y+\sqrt{(2S+y^2)}]^a$, & $z=[y+\sqrt{(2S+y^2)}]^a$ $f:(S)=(y+x)^a f:(x^2-y^2)$. Soit encore pris pour exemple l'équation $(hx+iy)\frac{dz}{dy}+(kx+ly)\frac{dz}{dx}=az$. On a la formule différentielle homogène $(hx+iy)\,dx-(kx+ly)\,dy$ qu'il faut rendre exacte ; pour cela je la multiplie par une fonction homogène μ des variables y & x, & si $(hx+iy)\,\mu dx-(kx+ly)\,\mu dy=dS$, la dimension de S étant n, la propriété des fonctions homogènes donnera $(hx+iy)\,\mu x-(kx+ly)\,\mu y=nS$, & par conséquent $\frac{(hx+iy)\,dx-(kx+ly)\,dy}{(hx+iy)\,x-(kx+ly)\,y}=\frac{dS}{nS}$. Je fais $y=ux$, & l'équation précédente devient $\frac{(h+iu)\,dx-(k+lu)\,(udx+xdu)}{(h+iu)\,x-(k+lu)\,ux}=\frac{dS}{nS}$, ou $\frac{dx}{x}-\frac{(k+lu)\,du}{h+(i-k)\,u-lu^2}=\frac{dS}{nS}$. La différentielle logarithmique de $k+(i-k)\,u-lu^2$ est égale à $\frac{(i-k)\,du-2ludu}{h+(i-ku)-lu^2}$; donc

$$\frac{ludu}{h+(i-k)\,u-lu^2}=\frac{\frac{i-k}{2}du}{h+(i-k)\,u-lu^2}-\tfrac{1}{2}d\,\text{log.}\,[h+(i-k)\,u-lu^2],$$

$$\&\ \frac{(k+lu)\,du}{h+(i-k)\,u-lu^2}=\frac{\frac{k+i}{2}du}{h+(i-k)\,u-lu^2}-\tfrac{1}{2}d\,\text{log.}\,[h+(i-k)\,u-lu^2].$$

Nous avons déjà eu occasion d'intégrer une formule différentielle de la forme de $\frac{du}{h+(i-k)\,u-lu^2}$; ainsi, sans nous y arrêter, nous représenterons son intégrale par log. V, & nous aurons

$\frac{1}{n}$ log. $S=$ log. $x-\frac{k+i}{2}$ log. $V+\frac{1}{2}$ log. $[h+(i-k)\,u-lu^2]$, d'où $S=x^n\sqrt{\left[\frac{h+(i-k)\,u-lu^2}{V^{k+i}}\right]^n}$. Mais $-\frac{Pdy}{M}=\frac{ady}{hx+iy}=$ $\frac{a(udx+xdu)}{(h+iu)\,x}=\frac{au}{h+iu}\frac{dx}{x}+\frac{adu}{h+iu}=\frac{au}{h+iu}\left(\frac{(k+lu)\,du}{h+(i-k)\,u-lu^2}+\frac{dS}{nS}\right)+$ $\frac{adu}{h+iu}=\frac{adu}{h+(i-k)\,u-lu^2}+\frac{au}{h+iu}\frac{dS}{nS}=\frac{adV}{V}+\frac{au}{h+iu}\frac{dS}{nS}$, dont l'intégrale, prise en ne faisant varier que u, est égale à a log. V. Donc $e^{-\int\frac{Pdy}{M}}=V^a$, & $z=V^a f:\left[x^n\sqrt{\left(\frac{h+(i-k)\,u-lu^2}{V^{k+i}}\right)^n}\right]$, ou, ce qui n'est pas moins général, $z=V^a f:\left(\frac{hx^2+(i-k)\,ux^2-lu^2x^2}{V^{k+i}}\right)$. Le cas où

où i feroit $= -k$, mérite d'être examiné particuliérement. Alors $\frac{(k+lu)\,du}{h+(i-k)u-lu^2}$ devient $\frac{(k+lu)\,du}{h-2ku-lu^2}$; dont l'intégrale est $-$ log. $\sqrt{(h-2ku-lu^2)}$; & on aura $\frac{1}{n}$ log. $S =$ log. $x +$ log. $\sqrt{(h-2ku-lu^2)}$, d'où $S=[x\sqrt{h-2ku-lu^2})]^n$. On aura aussi $-\frac{P\,dy}{M} = \frac{a\,du}{h-2ku-lu^2} + \frac{dS}{nS}$; & représentant par log. V l'intégrale de $\frac{du}{h-2ku-lu^2}$,

$z = V^a f: [(x\sqrt{(h-2ku-lu^2)})^n]$, ou $z = V^a f: (hx^2-2kx^2u-lx^2u^2)$.

(305). Soit μ un facteur propre à rendre intégrable la formule différentielle quelconque du premier ordre $\alpha dx + \zeta dy$, & supposons que $\mu\alpha dx + \mu\zeta dy = dS$. En multipliant de part & d'autre par une fonction quelconque de S, on a $\alpha dx + \zeta dy$, $\mu F:(S) = dS.F:(S)$; donc $(\alpha dx + \zeta dy)\,\mu F:(S)$ est encore une différentielle exacte, & $\mu F:(S)$, que je ferai $= z$, est la formule qui renferme tous les facteurs propres à rendre intégrable $\alpha dx + \zeta dy$. Puisque $\alpha z dx + \zeta z dy$ est une différentielle exacte, on a $\frac{d\cdot\alpha z}{dy} = \frac{d\cdot\zeta z}{dx}$, ou $\alpha\frac{dz}{dy} - \zeta\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\zeta}{dx}\right)z = 0$; $z = \mu$ est une intégrale particulière de cette équation aux différences partielles, qui a pour intégrale complète $z = \mu F:(S)$. S'il est question de rendre exacte une formule différentielle du premier ordre, on trouve que cela dépend de pouvoir satisfaire à une équation aux différences partielles de la forme de $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + Pz = 0$; & réciproquement pour intégrer une semblable équation, il faut chercher un des facteurs propres à rendre $M dx - N dy$ une différentielle exacte. Ce feroit faire un grand pas vers la perfection du calcul intégral, que de résoudre le second problême indépendamment du premier; on n'y est encore parvenu que dans quelques cas particuliers, comme, par exemple, lorsque α & ζ étant des fonctions homogènes des variables x & y, on peut rendre $\alpha dx + \zeta dy$ une différentielle exacte en la multipliant par une fonction homogène des mêmes variables. Car soit $\mu\alpha dx + \mu\zeta dy = dS$; la dimension de S en x, & y étant n, on aura $\mu\alpha x + \mu\zeta y = nS$, & par conséquent $\frac{\alpha dx + \zeta dy}{\alpha x + \zeta y} = \frac{dS}{nS}$. Donc $\frac{\alpha dx + \zeta dy}{\alpha x + \zeta y}$ est une différentielle exacte, & $\frac{1}{\alpha x + \zeta y}$ est le facteur demandé. Il en faut excepter le cas de $n = 0$; alors on a $\alpha x + \zeta y = 0$, d'où l'on tire

$\alpha = -\zeta\frac{y}{x}$, $\alpha dx + \zeta dy = \zeta\frac{x dy - y dx}{x}$, & $\frac{\alpha dx + \zeta dy}{\zeta x} = d\frac{y}{x}$;

on voit que dans ce cas, on peut prendre pour S toute fonction de $\frac{y}{x}$, ou toute fonction de dimension nulle des variables y & x.

(306). Pour rendre exacte la différentielle $\alpha du + \beta dx + \gamma dy$, α, β, γ étant des fonctions quelconques des variables y, x, u & de constantes, je la multiplie par une fonction μ des mêmes quantités, & j'ai les trois équations

$$\frac{d \cdot \alpha\mu}{dx} = \frac{d \cdot \beta\mu}{du}, \quad \frac{d \cdot \alpha\mu}{dy} = \frac{d \cdot \gamma\mu}{du}, \quad \frac{d \cdot \beta\mu}{dy} = \frac{d \cdot \gamma\mu}{dx},$$

d'où je tire, en effectuant les différentiations indiquées,

$$\alpha \frac{d\mu}{dx} + \mu \frac{d\alpha}{dx} = \beta \frac{d\mu}{du} + \mu \frac{d\beta}{du},$$

$$\gamma \frac{d\mu}{du} + \mu \frac{d\gamma}{du} = \alpha \frac{d\mu}{dy} + \mu \frac{d\alpha}{dy},$$

$$\beta \frac{d\mu}{dy} + \mu \frac{d\beta}{dy} = \gamma \frac{d\mu}{dx} + \mu \frac{d\gamma}{dx}.$$

Je multiplie la première de ces équations par γ, la seconde par β, & la troisième par α; je les ajoute toutes les trois ensemble, & après avoir effacé ce qui se détruit, je divise tous les termes de l'équation résultante par μ, ce qui donne

$$(\Pi) \ldots\ldots \gamma \frac{d\alpha}{dx} - \alpha \frac{d\gamma}{dx} + \beta \frac{d\gamma}{du} - \gamma \frac{d\beta}{du} + \alpha \frac{d\beta}{dy} - \beta \frac{d\alpha}{dy} = 0,$$

équation de condition entre α, β & γ qui doit avoir lieu pour que $\alpha du + \beta dx + \gamma dy$ puisse devenir une différentielle exacte par la multiplication d'un facteur. Cette équation de condition, que nous avons déduite d'une manière bien simple du théorême d'Euler, a été donnée pour la première fois par N. Bernoulli dans son Mémoire sur les trajectoires dont nous avons parlé plus haut.

Etant donné $\alpha du + \beta dx + \gamma dy = 0$, il ne s'ensuit pas de ce que l'équation Π n'est pas identique, qu'il n'y ait point entre y, x, u quelques relations particulières qui satisfassent à la proposée. En effet, si je prends l'équation $(y - u)\, du + (u - y)\, dx + x\, dy = 0$, l'équation Π devient $u = x + y$; elle n'est donc point identique; cependant $u = x + y$ satisfait à $(y - u)\, du + (u - y)\, dx + x\, dy = 0$. Euler a le premier fait cette remarque importante dans son Calcul différentiel; il ajoute que si, l'équation Π n'étant point identique, la relation qu'on en tirera entre y, x, u, ne satisfait pas à la proposée, on peut être certain qu'il n'y en a aucune qui puisse satisfaire. Cette règle n'est point générale, comme l'a remarqué Laplace dans un très-beau Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles, imprimé parmi ceux de l'académie des sciences pour l'année 1772. Car si l'on a

$$du = dx\left[1 + \sqrt[3]{(u - y - x)}\left(y + a\sqrt[4]{(u - y - x)} - b\sqrt[3]{(u - y - x)}\right)\right] + dy\left[1 + x\sqrt[3]{(u - y - x)}\right],$$

l'équation résultante de l'équation de condition est $u = x + y + \left(\frac{3a}{4b}\right)^{12}$;

qui ne satisfait point à l'équation différentielle. Cependant on auroit tort d'en conclure qu'il n'y a aucune relation entre u, x, y, qui puisse satisfaire à cette équation, puisque $u = x + y$ y satisfait évidemment.

On verra très-aisément que si au lieu de trois variables la formule différentielle proposée en renfermoit un plus grand nombre, on auroit autant d'équations de condition qu'il y auroit de manières de combiner trois à trois les co-efficiens α, β, &c. Mais il n'est pas nécessaire de vérifier toutes ces équations pour s'assurer si la proposée peut devenir exacte. Si, par exemple, on avoit la formule différentielle $\alpha dt + \beta du + \gamma dx + \delta dy$, on trouveroit par la combinaison des quatre lettres α, β, γ, δ prises trois à trois, les quatre équations de condition,

$$\gamma \frac{d\alpha}{du} - \alpha \frac{d\gamma}{du} + \beta \frac{d\gamma}{dt} - \gamma \frac{d\beta}{dt} + \alpha \frac{d\beta}{dx} - \beta \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

$$\delta \frac{d\alpha}{du} - \alpha \frac{d\delta}{du} + \beta \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\beta}{dt} + \alpha \frac{d\beta}{dy} - \beta \frac{d\alpha}{dy} = 0,$$

$$\delta \frac{d\alpha}{dx} - \alpha \frac{d\delta}{dx} + \gamma \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\gamma}{dt} + \alpha \frac{d\gamma}{dy} - \gamma \frac{d\alpha}{dy} = 0,$$

$$\delta \frac{d\beta}{dx} - \beta \frac{d\delta}{dx} + \gamma \frac{d\delta}{du} - \delta \frac{d\gamma}{du} + \beta \frac{d\gamma}{dy} - \gamma \frac{d\beta}{dy} = 0;$$

or, on voit que si on prend trois de ces équations à volonté, la quatrième s'ensuit nécessairement; donc pour s'assurer si une fonction qui renferme quatre variables peut devenir exacte, il suffira de vérifier trois des équations de condition qu'elle donne. En général le nombre des variables contenues dans la formule différentielle étant m, le nombre des équations de condition sera $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$, dont il ne sera nécessaire que d'en vérifier $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ pour savoir si la proposée est susceptible de devenir exacte.

(307). Je reviens aux équations linéaires aux différences partielles du premier ordre qu'on peut toutes représenter par $M \frac{dz}{dy} + N \frac{dz}{dx} + Pz + Q = 0$. Si l'on fait $z = \frac{z'}{\rho}$, z' & ρ étant deux nouvelles indéterminées quelconques, on en tire $\frac{dz}{dy} = \frac{\rho \frac{dz'}{dy} - z' \frac{d\rho}{dy}}{\rho^2}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{\rho \frac{dz'}{dx} - z' \frac{d\rho}{dx}}{\rho^2}$; & substituant ces valeurs dans la proposée, on a la transformée

$$M\rho \frac{dz'}{dy} + N\rho \frac{dz'}{dx} - Mz' \frac{d\rho}{dy} - Nz' \frac{d\rho}{dx} + Pz'\rho + Q\rho^2 = 0.$$

Comme nous sommes les maîtres de partager cette équation en deux autres telles

que nous le jugerons à propos, nou[illegible]

$$M\frac{dz'}{dy} + N\frac{dz'}{dx} + Q\rho = 0, \quad -M\frac{d\rho}{dy} - N\frac{d\rho}{dx} + P\rho = 0.$$

En suppofant toujours $\mu M dx - \mu N dy = dS$, la feconde des équations précédentes donne $\rho = e^{\int \frac{P dy}{M}} f:(S)$; on tire de la première $z' = -\int \frac{Q\rho dy}{M} + F:(S)$. Donc $z = e^{-\int \frac{P dy}{M}} \cdot \frac{F:(S) - \int e^{\int \frac{P dy}{M}} f:(S) \frac{Q dy}{M}}{f:(S)}$.
Comme dans les intégrations indiquées S doit être regardé comme constant, on peut mettre l'intégrale précédente fous cette autre forme

$$z = e^{-\int \frac{P dy}{M}} \left(\frac{F:(S)}{f:(S)} - \int e^{\int \frac{P dy}{M}} \frac{Q dy}{M} \right),$$

qui devient, en mettant $\varphi:(S)$ pour $\frac{F:(S)}{f:(S)}$,

$$z = e^{-\int \frac{P dy}{M}} \left(\varphi:(S) - \int e^{\int \frac{P dy}{M}} \frac{Q dy}{M} \right).$$

C'eft à-peu-près ainfi que Dalembert intègre cette équation linéaire, dans un favant Mémoire fur le calcul intégral qui fe trouve dans le quatrième volume de fes Opufcules; voici une autre manière d'arriver au même réfultat.

(308). L'équation $M\frac{dz}{dy} + N\frac{dz}{dx} + Pz + Q = 0$ étant propofée, on peut fuppofer que fon intégrale complète eft $z = \Pi + \Psi F:(\omega)$, Π, Ψ & ω étant des fonctions inconnues des variables y, x & de conftantes. Je différentie cette intégrale deux fois, l'une par rapport à y, l'autre par rapport à x; & il me vient

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d\Pi}{dy} + \frac{d\Psi}{dy} F:(\omega) + \Psi \frac{d\omega}{dy} F':(\omega),$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\Pi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} F:(\omega) + \Psi \frac{d\omega}{dx} F'(\omega).$$

Avec les trois équations que j'ai maintenant, j'élimine $F:(\omega)$ & $F'(\omega)$, ce qui me donne, en faifant pour abréger $\frac{d\omega}{dy} : \frac{d\omega}{dx} = m$,

$$\frac{dz}{dy} - m\frac{dz}{dx} - \frac{z - \Pi}{\Psi}\left(\frac{d\Psi}{dy} - m\frac{d\Psi}{dx}\right) = \frac{d\Pi}{dy} - m\frac{d\Pi}{dx},$$

qu'il faut rendre identiquement la même que la propofée. On fera donc $\frac{N}{M} = -m$, ou (1) .... $N\frac{d\omega}{dx} + M\frac{d\omega}{dy} = 0$,
(2)..... $M\frac{d\Psi}{dy} + N\frac{d\Psi}{dx} + P\Psi = 0$, (3)..... $M\frac{d\Pi}{dy} + N\frac{d\Pi}{dx} + P\Pi + Q = 0$.
Soit $\mu M dx - \mu N dy = dS$, d'où (4) .... $S = \int(\mu M dx - \mu N dy)$; on

on satisfait à l'équation 1 en prenant $\omega = S$; je mets dans les deux autres pour x sa valeur en y & S tirée de l'équation (4), & je suppose que par-là elles deviennent

$$M' \frac{d\Psi'}{dy} + N' \frac{d\Psi'}{dS} + P' \Psi' = 0, \quad M' \frac{d\Pi'}{dy} + N' \frac{d\Pi'}{dS} + P' \Pi' + Q' = 0.$$

On regardera S comme constant, & on aura pour déterminer Ψ' & Π' deux équations linéaires aux différences ordinaires, d'où il sera facile de tirer

$$\Psi' = e^{-\int \frac{P' dy}{M'}}, \quad \Pi' = e^{-\int \frac{P' dy}{M'}} \int e^{\int \frac{P' dy}{M'}} \frac{Q' dy}{M'}.$$

On auroit pu mettre dans les équations 2 & 3 pour y sa valeur en x & S tirée de l'équation 4, & si par-là on les eût changées en celles-ci

$$(M) \frac{d(\Psi)}{dS} + N \frac{d(\Psi)}{dx} + (P)(\Psi) = 0,$$

$$(M) \frac{d(\Pi)}{dS} + (N) \frac{d(\Pi)}{dx} + (P)(\Pi) + (Q) = 0;$$

on auroit eu, en regardant S comme constant,

$$(\Psi) = e^{-\int \frac{(P) dx}{(N)}}, \quad (\Pi) = e^{-\int \frac{(P) dx}{(N)}} \int e^{\int \frac{(P) dx}{(N)}} \frac{(Q) dx}{(N)}.$$

On a donc pour l'intégrale complète de la proposée,

$$\text{ou } z = e^{-\int \frac{P' dy}{M'}} \left(F:(S) - \int e^{\int \frac{P' dy}{M'}} \frac{Q' dy}{M'} \right);$$

$$\text{ou } z = e^{-\int \frac{(P) dx}{(N)}} \left(F:(S) - \int e^{\int \frac{(P) dx}{(N)}} \frac{(Q) dx}{(N)} \right).$$

Je prendrai pour exemple l'équation

$$y^2 \frac{dz}{dy} + yx \frac{dz}{dx} + xz = axy\sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

On a $M = y^2$, $N = yx$, $P = x$, $Q = -axy\sqrt{(x^2+y^2)}$, & $y^2 dx - yx dy$ qu'on rendra une différentielle exacte en la divisant par y^3, d'où l'on tire $\frac{y dx - x dy}{y^2} = dS$, $S = \frac{x}{y}$.

1°. $\frac{P}{M} = \frac{x}{y^2}$, d'où $\frac{P'}{M'} = \frac{S}{y}$, & $e^{-\int \frac{P' dy}{M'}} = y^{-S}$; $\frac{Q}{N} = -\frac{ax\sqrt{(x^2+y^2)}}{y}$; d'où $\frac{Q'}{M'} = -aSy\sqrt{(1+S^2)}$, & $-\int e^{\int \frac{P' dy}{M'}} \frac{Q' dy}{M'} = \int aSy^{S+1} dy \sqrt{(1+S^2)} = \frac{aSy^{S+2}\sqrt{(1+S^2)}}{S+2}$; donc

$$z = y^{-S} F:(S) + \frac{aSy^2\sqrt{(1+S^2)}}{S+2} = y^{-\frac{x}{y}} F:\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{axy\sqrt{(x^2+y^2)}}{x+2y}.$$

2°. $\frac{P}{N} = \frac{1}{y}$, d'où $\frac{(P)}{(N)} = \frac{S}{x}$, & $e^{-\int \frac{(P)\,dx}{(N)}} = x^{-S}$;
$\frac{Q}{N} = a\sqrt{(x^2+y^2)}$, d'où $\frac{(Q)}{(N)} = -\frac{ax\sqrt{(1+S^2)}}{S}$, &
$-\int e^{\int \frac{(P)\,dx}{(N)}} \frac{(Q)\,dx}{(N)} = \int \frac{ax^{S+1}\,dx\sqrt{(1+S^2)}}{S} = \frac{ax^{S+2}\sqrt{(1+S^2)}}{S\cdot(S+2)}$;
donc $z = x^{-S} F:(S) + \frac{ax^2\sqrt{(1+S^2)}}{S\cdot(S+2)} = x^{-\frac{x}{y}} F:\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{axy\sqrt{(x^2+y^2)}}{x+2y}$; ce résultat eſt conforme au précédent, car au lieu de $F:\left(\frac{x}{y}\right)$, on peut écrire $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} F:\left(\frac{x}{y}\right)$ qui, étant multiplié par $x^{-\frac{x}{y}}$, donne $y^{-\frac{x}{y}} F:\left(\frac{x}{y}\right)$.

(309). Nous nous propoſerons pour ſecond exemple de trouver la valeur de p dans l'équation

$$(B) \ldots\ldots\ldots u^2 s'' + us' \frac{dp}{du} + s\frac{dp}{dx} - s'p = 0 \text{ (n}^\circ\text{. 298)}.$$

Je ferai $M = us'$, $N = s$, $P = -s'$, $Q = u^2 s''$; or $us'dx - sdu$ devient une différentielle exacte étant diviſé par $-us$, & on a $-\frac{s'dx}{s} + \frac{du}{u} = dS$, d'où $S = \log.\frac{u}{s}$, & $u = se^S$. De plus $\frac{(P)}{(N)} = -\frac{s'}{s}$, d'où $e^{-\int \frac{(P)\,dx}{(N)}} = s$;
$\frac{Q}{N} = \frac{u^2 s''}{s}$, d'où $\frac{(Q)}{(N)} = ss''e^{2S}$, &
$\int e^{\int \frac{(P)\,dx}{(N)}} \frac{(Q)\,dx}{(N)} = e^{2S}\int s''\,dx = s'e^{2S}$.
Donc $p = sF:(S) - ss'e^{2S} = sF:\left(\frac{u}{s}\right) - \frac{s'u^2}{s}$, c'eſt l'expreſſion générale de la force accélératrice néceſſaire pour le tautochroniſme. Au lieu de $F:\left(\frac{u}{s}\right)$, je puis écrire $\frac{u^2}{s^2} F:\left(\frac{u}{s}\right)$, & j'aurai $p = u^2\left[\frac{F:\left(\frac{u}{s}\right)}{s} - \frac{s'}{s}\right]$, qui eſt conforme à celle qu'a donné Lagrange en 1767.
Soit $F:\left(\frac{u}{s}\right) = h + i\frac{s}{u} + k\frac{s^2}{u^2}$, on aura $p = ks + iu + \frac{h-s'}{s}u^2$; pour que cette expreſſion ſoit identiquement la même que celle-ci $p = e + l + mu + nu^2$, il faut que $ks = e + l$, $i = m$, $\frac{h-s'}{s} = n$; on tire delà

$s = \frac{r+l}{k}$, $s' = \frac{r'}{k}$, & pour déterminer r l'équation $dr + nr\,dx = (hk - nl)\,dx$, d'où $r = ce^{-nx} + \frac{hk - ln}{n}$. Lorsque $x = 0$, r doit être égal à $-l$; donc $c = -\frac{hk}{n}$, & $r = \frac{hk}{n}(1 - e^{-nx}) - l$, résultat bien conforme à celui que nous avons trouvé précédemment. On pourroit de cette manière résoudre le problême dans une infinité d'autres hypothèses; mais on ne l'a pas encore fait pour celle où la résistance seroit proportionnelle à une fonction de la vîtesse seule autre que $l + mu + nu^2$; & malgré les efforts réitérés des géomètres dont nous venons de parler, on ne sait pas même quelle est la tautochrone lorsque le milieu résiste comme le cube de la vîtesse.

(310). Je reprends l'équation $u\,du + p\,dx = 0$, & l'ayant multipliée par un facteur μ, je suppose que $\int \mu\,(u\,du + p\,dx) = A$, A pouvant renfermer l'arc constant a. On tire delà, en faisant $dA = A'\,da$,

$$\mu u\,du + \mu p\,dx = A'\,da,\ du = \frac{A'\,da}{\mu u} - \frac{p\,dx}{u},$$

& par conséquent $\frac{du}{da} = \frac{A'}{\mu u}$, $\frac{du}{dx} = \frac{-p}{u}$.

En faisant varier x & a, $dt = \frac{dx}{u} - da \int \frac{du}{da}\,\frac{dx}{u^2}$,

&, mettant pour $\frac{du}{da}$ sa valeur, $dt = \frac{dx}{u} - da \int \frac{A'\,dx}{\mu u^3}$.

Soit X une fonction donnée de x & a, telle que $dX = M\,dx + N\,da$, & supposons que le temps t soit une fonction quelconque de X, telle que $dt = \psi\,dX$; on aura $dt = \psi M\,dx + \psi N\,da$, & comparant terme à terme les deux valeurs de dt, on aura $\frac{1}{u} = \psi M$, $-\int \frac{A'\,dx}{\mu u^3} = \psi N$; d'où l'on tire, en éliminant ψ & faisant pour abréger $\frac{N}{M} = r$, $-\int \frac{A'\,dx}{\mu u^3} = \frac{r}{u}$.

Je différentie cette équation en faisant varier x, & j'ai, après avoir divisé par dx,

$$-\frac{A'}{\mu u^3} = \frac{u\frac{dr}{dx} - r\frac{du}{dx}}{u^2},$$ d'où l'on tire, en mettant $\frac{-p}{u}$ pour $\frac{du}{dx}$,

$$\mu = \frac{-A'}{u^2\frac{dr}{dx} + rp}.$$ Ainsi l'équation $\mu u\,du + \mu p\,dx = A'\,da$, devient

$$(A') \ldots\ldots \frac{u\,du + p\,dx}{u^2\frac{dr}{dx} + rp} + da = 0.$$

Pour que la courbe soit tautochrone, il faut que l'expression du temps soit telle qu'en y faisant $x = a$, a s'évanouisse entiérement; or cela sera toujours ainsi,

si X est une fonction de x & a, telle que a disparoisse lorsqu'on fait $x = a$. Mais $dX = M\,dx + N\,da$, &, faisant $x = a$, on a $dX = (M+N)\,da = 0$, d'où $M + N = 0$, & $\frac{N}{M}\ (= \sigma) = -1$; donc on peut prendre pour σ toute fonction de x & a telle qu'elle devienne $= -1$, lorsqu'on y fait $x = a$. On doit aussi avoir $t = 0$ lorsque $x = 0$; donc, comme nous l'avons démontré (nº. 291), $\frac{dt}{da} = \Psi N = \frac{1}{u}\,\frac{N}{M} = \frac{\sigma}{u}$ doit être nul dans la même hypothèse; & comme alors u est une quantité finie, c'est σ qui doit être nul lorsque $x = 0$. Ainsi les seules conditions, auxquelles la fonction σ doive être assujettie dans le cas du tautochronisme, sont qu'elle devienne $= -1$ lorsqu'on fait $x = a$, & $= 0$ lorsqu'on fait $x = 0$.

(311). L'équation A', qui est entre les trois variables u, x & a, donne pour équation de condition, en supposant que p ne renferme pas l'arc a, & faisant pour abréger $u^2\,\frac{d\sigma}{dx} + \sigma p = r$,

$$x\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{p}{r}\right)}{du} = 0 \text{ (nº. 306)},$$

qui se réduit à $x\,\frac{dr}{dx} + r\,\frac{dp}{du} - p\,\frac{dr}{du} = 0$, ou à

$$(B') \ldots\ldots\ u^2\,\frac{d^2\sigma}{dx^2} + u\,\frac{d\sigma}{dx}\,\frac{dp}{du} + \sigma\,\frac{dp}{dx} - \frac{d\sigma}{dx}\,p = 0.$$

Comme p ne doit pas renfermer a, l'équation B' ne peut être identique, à moins que σ ne soit une fonction de x & a de cette forme αs, α étant une fonction de a seul, & s une fonction de x seul; or comme dans ce cas l'équation B' n'est autre que l'équation B, on en tire $p = u^2\left[\frac{F:\left(\frac{u}{s}\right)}{s} - \frac{s'}{s}\right]$. Je mets pour p & σ leurs valeurs dans l'équation A' qui devient par-là

$$\left(\frac{du}{u} - \frac{ds}{s}\right) : F : \left(\frac{u}{s}\right) + \frac{dx}{s} + \alpha\,da = 0,$$

dont l'intégrale est $\varphi : \left(\frac{u}{s}\right) + \int\frac{dx}{s} + \int\alpha\,da = 0$.

Lorsque $x = a$, $u = 0$, & $\varphi : \left(\frac{u}{s}\right)$ devient une quantité constante absolument indépendante de a; donc si après avoir mis dans l'équation précédente a pour x, on la différentie, on verra aisément que $\frac{1}{s}$, par la substitution de a pour x, doit devenir égal à $-\alpha$; c'est-à-dire, que $\frac{1}{s}$ & α, ou bien que s &

& a', en faisant $\frac{1}{a} = a'$, doivent être deux fonctions pareilles, l'une de x, l'autre de a, ayant des signes contraires. Donc en supposant que s & a' sont des fonctions pareilles, & de même signe, l'une de x, l'autre de a, on aura $p\left(=\frac{N}{M}\right)=\frac{-s}{a'}$, & $dX(=Mdx+Nda)=M\left(dx-\frac{s\,da}{a'}\right)=Ms\left(\frac{dx}{s}-\frac{da}{a'}\right)$.
Donc X (& par conséquent le temps t) doit être fonction de

$\int\frac{dx}{s}-\int\frac{da}{a'}$, ou de $c^{\int\frac{dx}{s}} : c^{\int\frac{da}{a'}}$; c'est-à-dire, que pour que l'équation B' soit identique, le temps t doit être supposé une fonction quelconque de dimension nulle de deux fonctions pareilles, l'une de x, & l'autre de a. Mais l'équation B' n'étant point identique, peut renfermer une relation entre x, u & a qui satisfasse à l'équation A'. Pour résoudre le problême dans ce cas-ci, je différentie l'équation B' en faisant varier x, u & a, & dans

$\frac{dB'}{dx}\,dx+\frac{dB'}{du}\,du+\frac{dB'}{da}\,da=0$, qui résulte de cette différentiation,

je mets pour du sa valeur $-\frac{p\,dx}{u}-\frac{r\,da}{u}$ tirée de l'équation A', ce qui me donne

$$\left(\frac{dB'}{dx}-\frac{p}{u}\,\frac{dB'}{du}\right)dx+\left(\frac{dB'}{da}-\frac{r}{u}\,\frac{dB'}{du}\right)da=0,$$

équation qui doit être identique, & d'où l'on tire par conséquent

$$\frac{dB'}{dx}-\frac{p}{u}\,\frac{dB'}{du}=0,\quad \frac{dB'}{da}-\frac{r}{u}\,\frac{dB'}{du}=0.$$

Il n'est plus question que de trouver une valeur de p en x & u, qui satisfasse à la fois à ces deux équations & à l'équation B'; mais insensiblement les calculs se compliquent, sans qu'il en résulte rien pour le problême qu'il seroit important de résoudre; nous terminerons donc ici ce que nous nous étions proposé de dire sur les courbes tautochrones.

(312). Nous dirons un mot des équations aux différences partielles des ordres supérieurs. On propose d'intégrer l'équation du second ordre $\frac{d^2z}{dy^2}=P$, P étant une fonction donnée des variables y, x & de constantes; on en tire d'abord $\frac{dz}{dy}=\int P\,dy+F:(x)$, c'est l'intégrale première complète de la proposée; on a ensuite $z=\int dy\int P\,dy+\int dy\,F:(x)+f:(x)$,
ou, parce que dans les intégrations indiquées x est regardé comme constant,

$$z=\int dy\int P\,dy+y\,F:(x)+f:(x).$$

Si on eût proposée $\frac{d^2z}{dy\,dx}=P$, on auroit eu pour intégrale première com-

plète $\frac{dz}{dy} = \int P\,dx + F:(y)$, & ensuite

$z = \int dy \int P\,dx + \int dy\, F:(y) + f:(x) = \int dy \int P\,dx + F:(y) + f:(x)$;

ou bien on auroit eu d'abord $\frac{dz}{dx} = \int P\,dy + f:(x)$, & ensuite

$z = \int dx \int P\,dy + f:(x) + F:(y)$.

L'équation $\frac{d^2 z}{dy^2} + N\frac{dz}{dy} = P$ peut aisément se ramener au premier ordre, en faisant $\frac{dz}{dy} = u$, d'où $\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{du}{dy}$; & on a $\frac{du}{dy} + Nu = P$, d'où l'on tire $u = e^{-\int N dy}\,[\int e^{\int N dy} P\,dy + F:(x)]$. Donc

$z[= \int u\,dy + f:(x)] = \int e^{-\int N dy} dy \int e^{\int N dy} P\,dy + F:(x) \int e^{-\int N dy} dy + f:(x)$.

On intégrera par la même substitution $\frac{d^2 z}{dy\,dx} + N\frac{dz}{dy} = P$, & on aura $\frac{du}{dx} + Nu = P$, d'où l'on tire $u = e^{-\int N dx}\,[\int e^{\int N dx} P\,dx + F:(y)]$, &

$z = [\int u\,dy + f:(x)] = \int e^{-\int N dx} dy \int e^{\int N dx} P\,dx + \int e^{-\int N dx} dy\, F:(y) + f:(x)$.

L'équation d'un ordre quelconque $\frac{d^n z}{dy^n} = P$, a pour intégrale complète de l'ordre immédiatement inférieur $\frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} = \int P\,dy + A:(x)$;

viennent ensuite les intégrales des autres ordres,

$\frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} = \int dy \int P\,dy + y\,A:(x) + B:(x)$,

$\frac{d^{n-3} z}{dy^{n-3}} = \int dy \int dy \int P\,dy + \frac{y^2}{2} A:(x) + y\,B:(x) + C:(x)$, &c.

& enfin on arrivera à la dernière de toutes qui donnera z avec n fonctions arbitraires.

(313). C'est Euler qui le premier, en 1734 (*tome VII* des anciens Mémoires de Pétersbourg), apprit aux géomètres à intégrer complétement les équations aux différences partielles; découverte importante dont Dalembert, quelques années après, fit le plus bel usage dans ses *Recherches sur les vibrations des cordes sonores*, & dans ses *Réflexions sur la cause générale des Vents*. Avant ces époques on ne connoissoit ces équations que comme équations de condition, & on ne s'étoit proposé que d'en trouver des solutions particulières. Depuis, & sur-tout depuis 1752 que parut un autre ouvrage original de Dalembert, qui a pour titre : *Essai d'une nouvelle Théorie sur la résistance des fluides*), les Géomètres virent bien que les solutions qu'ils avoient jusqu'alors regardé comme générales ne l'étoient point; & les sciences physico-mathématiques changèrent absolument de face. Voici comme le problême des cordes vibrantes peut conduire à une équation aux différences partielles.

(314). Soit AMB (*fig. LXVI*) une corde en vibration; je fais $AP = x$;

$PM = y$, $AM = s$ & $AB = a$. Si nous supposons, comme on le fait ordinairement, que les vibrations sont fort petites, nous pourrons faire $ds = dx$, & regarder chaque particule comme animée d'une force accélératrice qui n'agit que dans la direction de PM. Pour comparer cette force accélératrice avec la gravité que je nomme g, soit θ le temps qu'un corps pesant mettroit à tomber de la hauteur h, & t le temps écoulé depuis le commencement du mouvement; on aura $\frac{h}{\theta^2} : \frac{d^2 y}{2 dt^2} :: g : \frac{g\theta^2}{2h} \frac{d^2 y}{dt^2}$. Maintenant si nous nommons q la densité de l'élément ds ou dx, qdx sera la masse de cet élément, qui sera poussée dans la direction de MP par la force accélératrice $\frac{g\theta^2 q dx}{2h} \frac{d^2 y}{dt^2}$. Avant d'aller plus loin, nous remarquerons que y est nécessairement fonction de l'abscisse x & du temps t; & que par conséquent $\frac{d^2 y}{dt^2}$, qui a été trouvé en ne faisant pas varier x, est une différence partielle du second ordre de cette fonction. Cela posé, je conçois que la corde est retenue en A & B par deux forces dont la première $= F$, & qu'elle est tirée de P vers M par une force telle qu'il en résulte vers le point A une tension que je nomme φ; il est clair que tout étant en équilibre, le moment de la force φ, par rapport au point P, est égal au moment de la force accélératrice de l'arc AM, plus au moment de la force F, par rapport au même point. Je prends un autre arc quelconque Am dont je vais chercher le moment de la force accélératrice par rapport au point P. En nommant Am, S, Ap, X, pm, Y; on a la force accélératrice de l'élément dS égale à $\frac{g\theta^2 q dX}{2h} \frac{d^2 Y}{dt^2}$, car on peut prendre dX pour dS; & pour le moment de cette force élémentaire, $\frac{g\theta^2}{2h} q(x - X) dX . \frac{d^2 Y}{dt^2}$. Donc le moment de la force accélératrice de l'arc Am est $\frac{g\theta^2}{2h} \left(\int q x dX \frac{d^2 Y}{dt^2} - \int q X dX \frac{d^2 Y}{dt^2} \right)$, ou parce que x est constant, $\frac{g\theta^2}{2h} \left(x \int q dX \frac{d^2 Y}{dt^2} - \int q X dX \frac{d^2 Y}{dt^2} \right)$; ces intégrales seront prises de manière qu'elles s'évanouissent lorsque $X = 0$. Si je fais dans l'expression que nous venons de trouver $X = x$, j'aurai le moment de la force accélératrice de tout l'arc AM égal à

$$\frac{g\theta^2}{2h} \left(x \int q dx \frac{d^2 y}{dt^2} - \int q x dx \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \frac{g\theta^2}{2h} \int dx \int q dx \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

On aura donc l'équation

$$\varphi y = Fx + \frac{g\theta^2}{2h} \int dx \int q dx \frac{d^2 y}{dt^2};$$

& différentiant deux fois, en regardant x seul comme variable, $\varphi \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g\theta^2}{2h} q \frac{d^2 y}{dt^2}$, ou, faisant pour abréger $\frac{2h\varphi}{g\theta^2} = c^2$, $c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = q \frac{d^2 y}{dt^2}$,

c'eſt l'équation générale des cordes vibrantes, ſoit qu'on les ſuppoſe uniformément épaiſſes ou non. Dans le premier cas q eſt une quantité conſtante qu'on peut prendre pour l'unité, & l'équation des cordes vibrantes devient

$\frac{d^2 y}{d t^2} = c^2 \frac{d^2 y}{d x^2}$, que Dalembert intègre de la manière ſuivante.

(315). On tire de cette équation $\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = c^2 \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$; donc $\frac{dy}{dt} dx + \frac{dy}{dx} c^2 dt$ eſt une différentielle exacte que je puis faire $= du$. A cauſe de $dy = \frac{dy}{dx} dx + \frac{dy}{dt} dt$, on a

$c\,dy + du = \left(c\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dt}\right)(dx + c\,dt)$, &

$c\,dy - du = \left(c\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dt}\right)(dx - c\,dt)$;

ce qui ne peut être vrai, à moins que $cy + u$ & $cy - u$ ne ſoient deux fonctions, l'une de $x + ct$, l'autre de $x - ct$. Donc $cy + u = F:(x + ct)$, & $cy - u = f:(x - ct)$; d'où l'on tire $2cy = F:(x+ct) + f:(x-ct)$, ou plus ſimplement $y = F:(x+ct) + f:(x-ct)$; c'eſt l'intégrale complète de l'équation du ſecond ordre propoſée, puiſqu'elle renferme deux fonctions arbitraires. La vîteſſe à la fin du temps t eſt proportionnelle à $\frac{dy}{dt}$; elle eſt donc auſſi proportionnelle à $F':(x+ct) - f':(x-ct)$.

Au point A où $x = 0$, l'ordonnée doit être nulle; elle doit être nulle encore au point B où $x = a$, quel que ſoit dans l'un & l'autre cas le temps t. La première condition transforme l'intégrale que nous venons de trouver en celle-ci, $y = F:(ct + x) - F:(ct - x)$, car autrement $x = 0$ ne donneroit point $y = 0$; c'eſt-à-dire que y doit être égal à la différence de deux fonctions, compoſée de la même manière, l'une de $ct + x$, l'autre de $ct - x$. Pour ſatisfaire à l'autre condition, où $x = a$ doit donner $y = 0$, on a l'équation $F:(ct + a) = F:(ct - a)$. Soit $ct - a = u$, on aura $ct + a = u + 2a$; & on voit clairement que la nature du problême exige que $F:(u + 2a) = F:(u)$; c'eſt-à-dire, que quelle que ſoit l'ordonnée qui répond à l'abſciſſe u, les ordonnées qui répondent aux abſciſſes $u + 2a$, $u + 4a$, $u + 6a$, &c., $u - 2a$, $u - 4a$, $u - 6a$, doivent lui être égales. Pour trouver la figure que la courbe avoit au commencement du mouvement il faut faire $t = 0$; ſuppoſons qu'alors y devienne $= X$, & la vîteſſe initiale proportionnelle à X'; on aura

$$X = f:(x) - F:(-x), \;\&\; X' = F':(x) - F':(-x).$$

On ajoutera à ces conditions que la courbe doit couper ſon axe aux points où $x = 0$ & $x = a$; que lorſque x devient négatif; elle doit paſſer de l'autre côté

côté de l'axe; & qu'elle doit être composée de parties semblables rapportées à des abscisses de la longueur $2a$. Mais toutes ces conditions remplies, la courbe pourra n'être point assujettie à la loi de continuité.

(316). Euler prétend que rien ne limite la généralité des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales complètes des équations aux différences partielles; qu'on y doit comprendre toutes les fonctions qu'il a nommées irrégulières & discontinues. Cette idée hardie, mais sublime, ouvre un champ bien vaste à ceux qui voudront appliquer le calcul aux sciences physiques. Pour donner un exemple de la nécessité d'introduire dans l'Analyse de semblables fonctions, imaginons une surface courbe quelconque, rapportée à un plan donné de position par trois co-ordonnées x, y, z perpendiculaires entr'elles; nous avons démontré (n°. 250), que quelle que soit la relation entre y & x, soit que les courbes qui terminent les y soient régulières ou non, continues ou discontinues; nous avons, dis-je, démontré qu'on a toujours $dz = \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{dx} dx$, & pour la normale au même point, $z \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}$. Donc si la surface courbe est telle que toutes ses normales soient egales entr'elles, elle aura pour équation

$$z^2 + z^2 \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = a^2.$$

La sphère, dont l'équation est $z^2 = 2ax - x^2 - y^2$, est un des solides réguliers qui ont la propriété dont il s'agit; on tire de son équation $z\frac{dz}{dx} = a - x$; $z\frac{dz}{dy} = -y$; & substituant ces valeurs dans l'équation aux différences partielles, il vient $2ax - x^2 - y^2 + y^2 + (a-x)^2 = a^2$, qui est évidemment identique. Cela posé, si on conçoit une infinité d'anneaux circulaires, sans aucune épaisseur, qui aient tous même diamètre, & que l'on fasse passer par leurs centres une espèce d'axe curviligne qui les joigne tous, & n'en fasse qu'un même solide, qui seroit un cylindre si l'axe étoit une ligne droite; la surface de ce solide aura la propriété d'avoir toutes ses normales égales entr'elles. Cela exige-t-il que l'axe curviligne soit assujetti à la loi de continuité? Ne peut-il pas être un assemblage de lignes droites & de lignes courbes, & même une de ces lignes mixtes que l'on décrit librement avec la main sans suivre aucune loi? Or, si les fonctions arbitraires qui entrent dans les integrales complètes des équations aux différences partielles; n'étoient point telles que Euler le demande, pourrions-nous dire que l'équation

$$z^2 + z^2 \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = a^2,$$

est celle de toutes les surfaces dont nous venons de parler, & d'une infinité d'autres, ayant toutes leurs normales égales entr'elles, quoique non assujetties à la loi de continuité? Je reviens aux problêmes qui conduisent à des équations aux diffé-

rences partielles, & qui font par conféquent fufceptibles d'être réfolus avec toute la généralité dont venons de parler.

(317). Dalembert, dans l'ouvrage cité fur la réfiftance des fluides, démontre qu'un fluide homogène & non élaftique, qui fe meut dans un vafe de figure quelconque, étant arrivé à un état permanent, fi on nomme x & y deux co-ordonnées rectangles qui déterminent la pofition d'une particule de ce fluide par rapport à deux axes fixes perpendiculaires entr'eux, & qu'on défigne par p la viteffe de la particule dans la direction des x, par q la vîteffe de la même particule dans la direction des y; Dalembert, dis-je, démontre qu'on aura $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ & $\frac{dp}{dx} = -\frac{dq}{dy}$. (*Voyez* auffi le n°. 220 de mon aftronomie phyfique).

On tire de ces deux équations $\frac{d^2p}{dy^2} = -\frac{d^2p}{dx^2}$, équations aux différences partielles de la forme de celle des cordes vibrantes. On l'intégrera donc de la même manière, & on aura, à caufe qu'ici $c^2 = 1$ & $c = \pm\sqrt{-1}$,

$$p = F:(x + y\sqrt{-1}) + f:(x - y\sqrt{-1});$$

mais $\frac{dq}{dy}\left(= -\frac{dp}{dx}\right) = -F':(x + y\sqrt{-1}) - f':(x - y\sqrt{-1})$;

donc $q = \sqrt{-1}\,[F:(x + y\sqrt{-1}) - f:(x - y\sqrt{-1})]$.

Dans chaque courbe que les particules décrivent, on a $\frac{p}{q} = \frac{dx}{dy}$;

donc $p\,dy = q\,dx$, d'où l'on tire

$(dx + dy\sqrt{-1})\,F:(x + y\sqrt{-1}) = (dx - dy\sqrt{-1})\,f:(x - y\sqrt{-1})$;

& intégrant $'F:(x + y\sqrt{-1}) - 'f(x - y\sqrt{-1}) =$ conftante.

Par le théorême de Taylor, démontré (n°. 163), on transforme

$'F:(x + y\sqrt{-1})$ en cette férie

$$'F:(x) + y\sqrt{-1}\,F:(x) - \frac{y^2}{2}F':(x) - \frac{y^3\sqrt{-1}}{2\cdot 3}F''(x) + \&c.,$$

& $'f:(x - y\sqrt{-1})$ en cette autre

$$'f:(x) - y\sqrt{-1}\,f:(x) - \frac{y^2}{2}f':(x) + \frac{y^3\sqrt{-1}}{2\cdot 3}f'':(x) + \&c.;$$

alors l'équation précédente devient

$$'F:(x) - 'f:(x) + y\sqrt{-1}\,[F:(x) + f:(x)] - \frac{y^2}{2}[F':(x) - f':(x)] - \frac{y^3\sqrt{-1}}{2\cdot 3}[F'':(x) + f'':(x)] + \&c. = a.$$

Si l'on fuppofe que l'axe des x divife le vafe en deux parties égales & femblables, les y feront égales de part & d'autre de cet axe, & il faudra que l'équation précédente ne contienne aucune puiffance impaire de y (n°. 42). Cela ne peut arriver que dans deux cas. Le premier lorfque $'F:(x) - 'f:(x) = a$;

car on tire delà $F:(x)-f:(x)=0$, $F':(x)-f':(x)=0$, &c. & la somme des autres termes qui sont multipliés chacun par une puissance impaire de y, égale à zéro. En développant $'F:(x-y\sqrt{-1})$ & $'f:(x-y\sqrt{-1})$, on trouve que dans le cas que nous examinons la différence de ces deux fonctions est égale à $'F:(x)-'f:(x)$ ou à la constante a; donc

$$'f:(x-y\sqrt{-1})='F:(x-y\sqrt{-1})-a,$$

& substituant cette valeur dans

$$'F:(x+y\sqrt{-1})-'f:(x-y\sqrt{-1})=a;$$

on a $'F:(x+y\sqrt{-1})='F:(x-y\sqrt{-1})$,

condition qui servira à déterminer quelle espèce de fonction c'est que celle que nous avons désignée par $'F$.

On aura ensuite, à cause de $f:(x-y\sqrt{-1})=F:(x-y\sqrt{-1})$,

$p=F:(x+y\sqrt{-1})+F:(x-y\sqrt{-1})$,

$q=\sqrt{-1}\,[F:(x+y\sqrt{-1})-F:(x-y\sqrt{-1})]$.

Les fonctions impaires disparoîtront encore, lorsque $F:(x)+f:(x)$ sera égale à zéro ; car on tire delà

$$F':(x)+f'(x)=0,\ F'':(x)+f'':(x)=0,\ \&c.$$

Alors les deux fonctions $'F:(x-y\sqrt{-1})$ & $'f:(x-y\sqrt{-1})$ étant développées, on trouvera que leur somme est égale à $'F:(x)+'f:(x)$; mais puisque $F:(x)+f:(x)=0$, on doit avoir $'F:(x)+'f:(x)=$ à une constante b; on a donc aussi $'F:(x-y\sqrt{-1})+'f:(x-y\sqrt{-1})=b$; & substituant pour $'f:(x-y\sqrt{-1})$ sa valeur dans

$$'F:(x+y\sqrt{-1})-'f:(x-y\sqrt{-1})=a,$$

il résulte l'équation

$$'F:(x+y\sqrt{-1})+'F:(x-y\sqrt{-1})=a+b,$$

qui servira à déterminer dans ce second cas la nature de la fonction désignée par $'F$.

De plus, à cause de $F:(x-y\sqrt{-1})=-f:(x-y\sqrt{-1})$, on aura

$p=F:(x+y\sqrt{-1})-F:(x-y\sqrt{-1})$,

$q=\sqrt{-1}\,[F:(x+y\sqrt{-1})+F:(x-y\sqrt{-1})]$.

Dans l'un & l'autre cas, tout se réduit à déterminer la nature de la fonction désignée par $'F$, par cette condition que $'F:(x+y\sqrt{-1})\pm 'F:(x-y\sqrt{-1})=c$. Or, en faisant $x-y\sqrt{-1}=z$, $x+y\sqrt{-1}=z+\Delta z$ (par Δz on entend ce que nous avons nommé dans le chapitre troisième la différence de z, & ce que nous nommerons dans la suite la différence finie de z pour nous conformer à l'usage) & $'F:(z)=Z$; on aura, lorsque le second terme est négatif,

$$'F:(z+\Delta z)-'F:(z)=\Delta 'F:(z)=\Delta Z,\ \&\ \Delta Z=C;$$

lorsque le second terme est positif, on aura

$$'F:(z+\Delta z)-'F:(z)+2'F:(z)=\Delta Z+2Z,\ \&\ \Delta Z+2Z=c.$$

En général, la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les inté-

grales complètes des équations aux différences partielles, peut toujours se réduire à intégrer des équations aux différences finies.

(318). Newton est l'inventeur du calcul des différences; il en a jetté les fondemens dans un ouvrage qui a pour titre *Methodus differentialis*, que plusieurs géomètres, & sur-tout Stirling, ont commenté avec succès. Le théorême de Taylor a beaucoup servi à perfectionner ce calcul, en donnant les moyens d'y appliquer le calcul différentiel. Cependant la méthode inverse du calcul des différences n'a commencé à être traitée avec quelqu'étendue que par Euler dans son Calcul différentiel; on trouve dans cet ouvrage plusieurs belles méthodes pour intégrer des fonctions d'une seule variable aux différences finies. Mais il n'y est point du tout question de l'intégration des équations qui renferment ces différences; & depuis Moivre qui en a intégré plusieurs, ce qui l'a conduit à résoudre plusieurs problêmes intéressans sur les probabilités, personne, que je sache, ne s'en étoit occupé, lorsque Lagrange a fait voir dans le premier volume des Mémoires de l'académie de Turin, que ces sortes d'équations pouvoient être traitées par les mêmes méthodes que les équations différentielles. On trouve dans les Mémoires de l'académie des sciences, années 1770 & 1771, & dans les sixième & septième volumes des Savans étrangers, des recherches très-profondes sur cet objet, qui sont dues à Condorcet & à Laplace; & la manière ingénieuse dont ce dernier en a fait usage dans la Théorie des hasards a eu le plus grand succès parmi les géomètres.

(319). Soit l'équation linéaire aux différences finies du premier ordre

$$Ay\Delta x + B\Delta y = X\Delta x, \text{ ou } Ay + B\Delta y = X,$$

en prenant Δx pour l'unité. Pour séparer les variables dans cette équation, nous ferons, comme dans le (n°. 265), $y = u\rho$, u étant une nouvelle indéterminée quelconque, & ρ une fonction de x & de constantes. Ici où les différences sont finies, $\Delta y = u\Delta\rho + \rho\Delta u + \Delta u\Delta\rho$; ainsi en mettant pour Δy sa valeur dans la proposée, on a la transformée $Au\rho + B(u\Delta\rho + \rho\Delta u + \Delta u\Delta\rho) = X$, dans laquelle il faut faire $A\rho + B\Delta\rho = 0$, & il vient ensuite $B\rho\Delta u + B\Delta u\Delta\rho = X$. On tire de la première $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{-A}{B}$ qu'il s'agit d'intégrer, ce qui exige plus d'attention que lorsqu'il n'étoit question que de différentielles. Pour y parvenir, je fais $\rho = e^\sigma$, & j'ai $\Delta\rho = e^{\sigma + \Delta\sigma} - e^\sigma = e^\sigma(e^{\Delta\sigma} - 1)$; donc $\frac{\Delta\rho}{\rho} = e^{\Delta\sigma} - 1$, d'où l'on tire $e^{\Delta\sigma} = 1 - \frac{A}{B}$; ou, faisant pour abréger $1 - \frac{A}{B} = R$, $\Delta\sigma = \log. R$, ce qui donne $\sigma = \Sigma \log. R$. Si nous désignons, comme dans le (n°. 116), par $'R$, $''R$, $'''R$, &c. les termes qui précèdent R, on aura σ égal à la somme des logarithmes de toutes ces quantités, ou au logarithme du produit continuel de toutes ces quantités. Je désigne ce produit par $(\varpi - 1)R$, c'est-à-dire, que dans cette notation $(\varpi - 1)R$ équivaut à $'R \cdot {''R} \cdot {'''R} \cdot$ &c., ϖR à $R \cdot {'R} \cdot {''R} \cdot {'''R} \cdot$ &c., $(\varpi + 1)R$ à $R' \cdot R \cdot {'R} \cdot {''R} \cdot {'''R} \cdot$ &c. &c.

On

On aura $\sigma = \log. (\varpi - 1) R$, d'où l'on tire $\rho \, (= e^{\sigma}) = (\varpi - 1) R$;
L'équation $B \rho \Delta u + B \Delta u \Delta \rho = X$ donne

$$\Delta u = \frac{X}{B(\rho + \Delta \rho)}, \ \& \ u = c + \Sigma \frac{X}{B(\rho + \Delta \rho)};$$

donc $y \, (= u \rho) = (\varpi - 1) R \left(c + \Sigma \frac{X}{B(\rho + \Delta \rho)} \right)$.

Mais il est clair que $\rho + \Delta \rho \, (= \rho') = R \cdot {}'R \cdot {}''R \cdot {}'''R \cdot \&c. = \varpi R$;
donc $y = (\varpi - 1) R \left(c + \Sigma \frac{X}{B \cdot \varpi R} \right)$.

Je prendrai pour exemple l'équation $y + (x + 1) \Delta y + a (2x + 1) = 0$.
On a $A = 1$, $B = x + 1$, $X = -a (2x + 1)$;
donc $R = \frac{x}{x+1}$, $\varpi R = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \cdot \&c. = \frac{1}{x+1}$,
$(\varpi - 1) R = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \cdot \&c. = \frac{1}{x}$.

On tire delà $y = \frac{1}{x} [c - a \Sigma (2x + 1)] = \frac{c}{x} - 2a \frac{\Sigma x}{x} - a \frac{\Sigma 1}{x}$;

or nous avons démontré (n°. 124) que $\Sigma 1 = x$, & que $\Sigma x = \frac{x^2 - x}{2}$;

donc $y = \frac{c}{x} - a x$, ou $x y + a x^2 = c$.

Si on proposoit de séparer y dans l'équation $A1 \, y + B1 \, y' = X$; à cause de $y' = y + \Delta y$, on la transformeroit en celle-ci $(A1 + B1) y + B1 \Delta y = X$; & faisant pour abréger $-\frac{A1}{B1} = R1$, on auroit $y = (\varpi - 1) R1 \left(c + \Sigma \frac{X}{B1 \, \varpi R1} \right)$.
Un cas particulier, qui mérite d'être examiné, c'est celui où $A1$ & $B1$ sont des quantités constantes; alors les $R1$, ${}'R1$, ${}''R1$, &c. sont égaux entr'eux, & $(\varpi - 1) R$ désigne une puissance de R dont l'exposant est égal au nombre des termes qui précèdent y dans la suite &c. ${}''y$, ${}'y$, y, &c. Si nous supposons que la première de ces ordonnées réponde à $x = 0$, x sera ce nombre de termes; & on aura $(\varpi - 1) R1 = R1^{x}$, $\varpi R1 = R1^{x+1}$.
On a donc dans le cas que nous examinons $y = R1^{x} \left(c + \frac{1}{B1} \Sigma \frac{X}{R1^{x+1}} \right)$.

Si X lui-même est une quantité constante, on fera pour abréger $\frac{X}{B1} = h$, & l'équation précédente deviendra $y = R1^{x} \left(c + h \Sigma \frac{1}{R1^{x+1}} \right)$.

Mais $\Sigma \frac{1}{R1^{x+1}}$ étant la somme de tous les termes qui précèdent $\frac{1}{R1^{x+1}}$, ou la somme de cette progression géométrique $\frac{1}{R1^{x}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{R1^{2}} + \frac{1}{R1}$

eſt égale à $\frac{R1^x - 1}{R1^x(R1 - 1)}$; donc, lorſque X eſt une quantité conſtante, l'intégrale trouvée dans le cas précédent devient $y = cR1^x + \frac{h(R1^x - 1)}{R1 - 1}$.

(320). L'équation linéaire d'un ordre quelconque

$$Ay + B\Delta y + C\Delta^2 y + D\Delta^3 y + \&c. = X,$$

ou A, B, C, D, &c. ſont des coefficiens conſtans, & X une fonction quelconque de x & de conſtantes, pourra être intégrée facilement par la méthode de Dalembert, que nous avons expliquée (n°, 289). Car, ſi l'on propoſoit d'abord l'équation du ſecond ordre $Ay + B\Delta y + C\Delta^2 y = X$, en faiſant $\Delta y = p$, d'où $\Delta^2 y = \Delta p$, on auroit les deux équations

$$\Delta y - p = 0, \; Ay + Bp + C\Delta p = X;$$

dont on multiplieroit la première par un coefficient conſtant ς, & on l'ajouteroit enſuite à la ſeconde, ce qui donneroit

$$Ay + (B - \varsigma)\cdot p + \varsigma\Delta y + C\Delta p = X.$$

Cela poſé, ſoit $\varsigma y + Cp = s$ & $\varsigma\Delta y + C\Delta p = \Delta s$; l'équation précédente deviendra $Ay + (B - \varsigma)\cdot p + \Delta s = X$. Il eſt clair qu'elle ne ſeroit qu'un cas particulier de celle que nous avons intégrée dans l'article précédent, ſi $Ay + (B - \varsigma)\cdot p$ étoit un multiple de s. Je fais donc $Ay + (B - \varsigma)\cdot p = \mathrm{E}s = \varsigma\mathrm{E}y + C\mathrm{E}p$; d'où je tire $A = \varsigma\mathrm{E}$, $B - \varsigma = C\mathrm{E}$; & par conſéquent $\varsigma = B - C\mathrm{E}$, E étant donnée par l'équation du ſecond degré $A - B\mathrm{E} + C\mathrm{E}^2 = 0$. L'équation $\mathrm{E}s + \Delta s = X$ à laquelle nous avons réduit la propoſée, donne, en faiſant pour abréger $1 - \mathrm{E} = R$, $s = R^x\left(c + \Sigma\frac{X}{R^{x+1}}\right)$.

Or ſi nous nommons $\mathrm{E}1$, $\mathrm{E}2$ les deux valeurs de E, & $\varsigma 1$, $\varsigma 2$ les deux valeurs de ς, $s1$, $s2$ les deux valeurs de s, correſpondantes, nous aurons les deux équations $\varsigma 1 y + Cp = s1$, $\varsigma 2 y + Cp = s2$; & éliminant p, $y = \frac{s1 - s2}{\varsigma 1 - \varsigma 2}$.

Le cas où les racines de l'équation du ſecond degré ſont égales, ſe réſoudra par la méthode de Dalembert, expliquée dans l'article cité; celui où les racines ſont imaginaires ne peut non plus ſouffrir de difficulté, après les détails où nous ſommes entrés à ce ſujet. Si on eût propoſé l'équation $A1y + B1y' + C1y'' = X$; à cauſe de $y' = y + \Delta y$, $y'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$, on auroit eu

$$(A1 + B1 + C1)y + (B1 + 2C1)\Delta y + C1\Delta^2 y = X,$$

équation qu'on réſoudra en faiſant dans l'intégrale précédente

$$A = A1 + B1 + C1, \; B = B1 + 2C1, \; C = C1.$$

(321). Étant propoſée l'équation du troiſième ordre

$$Ay + B\Delta y + C\Delta^2 y + D\Delta^3 y = X,$$

on fera $\Delta y = p$, $\Delta p = q$, & on aura les trois équations

$$\Delta y - p = 0, \; \Delta p - q = 0, \; Ay + Bp + Cq + D\Delta q = X.$$

Je multiplie la première par ς, la seconde par ς', puis je les ajoute toutes les trois ensemble, ce qui donne

$$Ay + (B - \varsigma)\cdot p + (C - \varsigma')\cdot q + \varsigma\,\Delta y + \varsigma'\,\Delta p + D\,\Delta q = X.$$

Soit $\varsigma y + \varsigma' p + Dq = s$ & $\varsigma\,\Delta y + \varsigma'\,\Delta p + D\,\Delta q = \Delta s$; l'équation précédente deviendra

$$Ay + (B - \varsigma)\cdot p + (C - \varsigma')\cdot q + \Delta s = X,$$

qu'on intégreroit facilement si $Ay + (B - \varsigma)\cdot p + (C - \varsigma')\cdot q$ étoit un multiple de s. Je fais donc

$$Ay + (B - \varsigma)\cdot p + (C - \varsigma')\cdot q = \text{E}s = \varsigma\text{E}y + \varsigma'\text{E}p + D\text{E}q;$$

d'où je tire $A = \varsigma\text{E}$, $B - \varsigma = \varsigma'\text{E}$, $C - \varsigma' = D\text{E}$;

& par conséquent $\varsigma' = C - D\text{E}$, $\varsigma = B - C\text{E} + D\text{E}^2$;

E étant donné par l'équation du troisième degré $A - B\text{E} + C\text{E}^2 - D\text{E}^3 = 0$. Nommons $\text{E}1$, $\text{E}2$, $\text{E}3$ les trois valeurs de E, & $\varsigma 1, \varsigma 2, \varsigma 3$; $\varsigma' 1, \varsigma' 2, \varsigma' 3$; $s1, s2, s3$ les trois valeurs correspondantes de chacune des quantités ς, ς' & s; on aura les trois équations

$$\varsigma 1 y + \varsigma' 1 p + Dq = s1,\ \varsigma 2 y + \varsigma' 2 p + Dq = s2,\ \varsigma 3 y + \varsigma' 3 p + Dq = s3.$$

On en tire visiblement

$$(\varsigma 1 - \varsigma 2)y + (\varsigma' 1 - \varsigma' 2)p = s1 - s2,\ (\varsigma 1 - \varsigma 3)y + (\varsigma' 1 - \varsigma' 3)p = s1 - s3;$$

& les ôtant l'une de l'autre après les avoir multipliées, la première par $\varsigma' 1 - \varsigma' 3$, la seconde par $\varsigma' 1 - \varsigma' 2$, on aura $y = \frac{(\varsigma' 1 - \varsigma' 3)(s1 - s2) - (\varsigma' 1 - \varsigma' 2)(s1 - s3)}{(\varsigma 1 - \varsigma 2)(\varsigma' 1 - \varsigma' 3) - (\varsigma 1 - \varsigma 3)(\varsigma' 1 - \varsigma' 2)}$.

Si on eût proposé l'équation $A1\,y + B1\,y' + C1\,y'' + D1\,y''' = X$, on auroit eu, à cause de $y' = y + \Delta y$, $y'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$, $y''' = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$, l'équation

$$(A1 + B1 + C1 + D1)y + (B1 + 2C1 + 3D1)\Delta y + (C1 + 3D1)\Delta^2 y + D1\,\Delta^3 y = X,$$

qu'on résoudra en faisant dans l'intégrale précédente $A = A1 + B1 + C1 + D1$, $B = B1 + 2C1 + 3D1$, $C = C1 + 3D1$, $D = D1$.

En général, si on vouloit intégrer complètement l'équation de l'ordre n,

$$Ay + B\,\Delta y + C\,\Delta^2 y + \text{\&c.} = X,$$

on commenceroit par résoudre l'équation du degré n, $A - B\text{E} + C\text{E}^2 - \text{\&c.} = 0$, & nommant $\text{E}1$, $\text{E}2$, &c. les valeurs de E, $R1$, $R2$, &c. les valeurs correspondantes de $R = 1 - \text{E}$, $s1$, $s2$, &c. celles de s qu'on trouvera en mettant dans $s = R^x\left(c + \Sigma \frac{X}{R^{x+1}}\right)$ pour R successivement $R1$, $R2$, &c., & pour c successivement $c1$, $c2$, &c., ces lettres désignant différentes constantes arbitraires, on aura $y = (A)\,s1 + (B)\,s2 + (C)\,s3 + \text{\&c.}$, (A), (B), (C), &c. étant des co-efficiens constans faciles à déterminer.

De plus, il est clair qu'on trouvera la valeur complète de y dans l'équation de l'ordre n,

$$A\,1\,y + B\,1\,y' + C\,1\,y'' + \text{\&c.} = X,$$

en faisant dans la valeur de y que nous venons de trouver

$$A = A\,1 + B\,1 + C\,1, + \text{\&c.},\ B = B\,1 + 2\,C\,1 + 3\,D\,1 + \text{\&c.};$$
$$C = C\,1 + 3\,D\,1 + \text{\&c. \&c.}$$

(322). Moivre appelle suite récurrente (n°. 95) une suite dont un terme quelconque est égal à un certain nombre de termes précédens multipliés chacun par un co-efficient constant ; & il a donné le nom d'échelle de relation à l'assemblage des co-efficiens constans qui servent à former la suite. D'après cette définition, si la suite &c., $''y, 'y, y, y', y''$, &c. est telle que $A\,1\,y + B\,1\,y' + C\,1\,y'' + \ldots + U\,1\,y^{n\,1} = 0$, elle sera recurrente ; & une suite semblable étant proposée, on en trouvera facilement le terme général par la méthode précédente. Soit pris pour exemple la suite

$$1 + 2\,z^2 + 2\,z^3 + 6\,z^4 + 10\,z^5 + 22\,z^6 + 42\,z^7 + 86\,z^8 + \text{\&c.},$$

qui est le développement de la fraction rationnelle $\frac{1 - z}{1 - z - 2\,z^2}$. On aura, en nommant y le terme général de la suite numérique 1, 0, 2, 2, 6, &c., & $'y$, $''y$ les deux termes qui précèdent y ; on aura, dis-je, $y = 'y + 2\,''y$; cette suite est donc récurrente, & a pour échelle de relation $1 + 2$. Au lieu de l'équation précédente, j'écris celle-ci $2\,y + y' - y'' = 0$, & tout se réduira à faire $A = 2$, $B = -1$, $C = -1$, $X = 0$, dans l'intégrale complète que nous avons trouvée (n°. 320). On formera d'abord l'équation du second degré $2 + E - E^2 = 0$, d'où l'on tire $E\,1 = 2$, $E\,2 = -1$, & ensuite $C\,1 = 1$, $C\,2 = -2$, $R\,1 = -1$, $R = 2$. On a aussi, en nommant a & b les deux constantes arbitraires qu'il faut ajouter en intégrant, $s\,1 = a(-1)^x$, $s\,2 = b\,2^x$; donc $y = \frac{a(-1)^x - b\,2^x}{3}$. Pour déterminer les deux constantes arbitraires, je remarque que $x = 0$ doit donner $y = 1$, & que $x = 1$ doit donner $y = 0$, on a donc les deux équations $3 = a - b$, $-a - 2\,b = 0$, d'où l'on tire $b = -1$ & $a = 2$. Il est clair maintenant que la suite proposée a pour terme général $\frac{2^x + 2(-1)^x}{3} \cdot z^x$; ou mieux $\frac{2^x \pm 2}{3}\,z^x$, & l'on prendra le signe + lorsque x sera pair, & le signe − lorsqu'il sera impair.

Je prendrai pour second exemple la suite

$$1 + 8\,z + 27\,z^2 + 64\,z^3 + 125\,z^4 + 216\,z^5 + \text{\&c.}$$

qui a été développée de la fraction rationnelle $\frac{1 + 4\,z + z^2}{(1 - z)^4}$. Or je vois qu'en nommant y le terme général de la suite numérique 1, 8, 27, &c., & $'y$, $''y$, $'''y$, $''''y$, les quatre termes qui précèdent, on a

$$y = 4\,'y - 6\,''y + 4\,'''y - ''''y;$$

c'est-à-dire,

c'eſt-à-dire, que cette ſuite eſt récurrente, & a pour échelle de relation $4-6+4-1$. On a auſſi $y-4y'+6y''-4y'''+y^{iv}=0$, ou $\Delta^4 y=0$, qui a pour intégrale complète $y=a+bx+cx^2+dx^3$. Pour déterminer les quatre conſtantes arbitraires, je remarque qu'en faiſant x ſucceſſivement égal à $0, 1, 2, 3$, on a pour les valeurs correſpondantes de y, $1, 8, 27, 64$; & que par conſéquent on a les quatre équations

$$a=1,\ 8=a+b+c+d,\ 27=a+2b+4c+8d,$$
$$64=a+3b+9c+27d;$$

d'où l'on tire $a=1$, $b=3$, $c=3$, $d=1$. On trouve donc de cette manière que la ſuite propoſée a pour terme général $(1+x)^3 z^x$.

(323). Nous avons tâché de donner dans ce chapitre une idée générale du calcul integral, & nous y avons tracé le plan que nous nous propoſons de ſuivre dans la ſeconde partie de cet ouvrage. Nous traiterons d'abord de la méthode des quadratures, ou de l'intégration des formules différentielles qui ne renferment qu'une ſeule variable; car le principal but que l'on doive ſe propoſer, eſt de ramener à des intégrations de cette eſpèce toutes les queſtions qui dépendent du calcul intégral. Nous nous occuperons enſuite des équations différentielles. Il y a, comme nous l'avons remarqué, deux méthodes bien diſtinctes de les intégrer; l'une conſiſte dans la ſéparation des variables; l'autre à rendre exactes ces équations différentielles, en les multipliant par des facteurs convenables. Cette ſeconde méthode conduit à des équations aux différences partielles auxquelles il eſt queſtion de ſatisfaire. Mais ce n'eſt pas cela ſeul qui nous a déterminés à traiter ce genre d'équations avec quelqu'étendue, puiſque nous avons fait voir qu'il n'y avoit point d'autres moyens d'attaquer, avec eſpérance de ſuccès, la plupart des problêmes de phyſique, principalement ceux où il eſt queſtion du mouvement des fluides. Les intégrales complètes des équations aux différences partielles, renferment toujours des fonctions arbitraires qu'il s'agit de déterminer par les conditions du problême; pour parvenir à ces déterminations, nous avons été conduits à des équations aux différences finies; ce troiſième genre d'équations eſt de plus d'un très-grand uſage dans la théorie des ſéries; nous nous en occuperons dans un chapitre particulier.

Mais avant tout, il eſt néceſſaire d'expoſer les principes fondamentaux de la méthode des variations, qui eſt la plus générale qu'on ait encore imaginé pour réſoudre les problêmes. Quand même cette méthode n'auroit ſervi qu'à réſoudre généralement toutes les queſtions relatives à celui des iſopérimètres, ce problême eſt ſi célèbre, que nous ne pourrions pas la paſſer ſous ſilence. La ſolution que Jacques Bernoulli en donna en 1701, eſt un des plus beaux ouvrages de ce temps-là. Brook Taylor ne fit que la copier dans l'Ouvrage, imprimé en 1715, qui a pour titre: *Methodus incrementorum directa & inverſa;* & perſonne n'avoit oſé aller plus loin, lorſque Euler s'occupa de ces ſortes de queſtions. Ce grand Géomètre publia en 1744 un Ouvrage qui a pour titre: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, ſive ſolutio problematis iſoperimetrici latiſſimo ſenſu accepti.* Cet Ouvrage, qui eſt un chef-d'œuvre, paroiſſoit ne rien laiſſer

à desirer; cependant Lagrange, dans le volume des Mélanges de la société de Turin, qui parut en 1762, donna une méthode de résoudre tous les problêmes de ce genre, qui le conduisit à des résultats encore plus généraux. Il est vrai que le Chevalier de Borda, dans un Mémoire imprimé dans le volume de l'Académie des sciences pour l'année 1767, démontre que par la méthode d'Euler, on pourroit arriver aux mêmes résultats; mais cela n'ôte rien au mérite de l'Ouvrage de Lagrange, comme on le verra bientôt.

CHAPITRE IV.

De la Méthode des Variations.

(324). Les théorêmes que nous avons démontrés n°s 117 & 118 seront encore vrais, si au lieu de supposer que les différences sont finies, on les suppose infiniment petites. Nous aurons donc $\delta d z = d \delta z$; c'est-à-dire que la variation de la différentielle d'une fonction quelconque, est égale à la différentielle de la variation de la même fonction. On tire de-là

$$\delta d^2 z = d \delta d z = d^2 \delta z, \quad \delta d^3 z = d \delta d^2 z = d^2 \delta d z = d^3 \delta z,$$
$$\delta d^4 z = d \delta d^3 z = d^2 \delta d^2 z = d^3 \delta d z = d^4 \delta z, \text{ \&c.}$$

Nous aurons aussi $\delta \int C dx = \int \delta (C dx)$, $\int C dx$ étant une formule intégrale quelconque; & par conséquent $\delta \int\int C dx^2 = \int \delta \int C dx^2 = \int\int \delta (C dx^2)$, &c. Fontaine est, je crois, le premier qui ait remarqué ces deux théorêmes; on les trouve dans la solution qu'il a donnée du problême des tautochrones en 1734; mais ce n'a été que quatre ans après qu'il en a fait l'usage que nous allons voir.

Soient $M dy + N dx$ deux termes de la différentielle de z; si nous nous servons de la caractéristique d pour marquer la différentielle d'une fonction quelconque prise en ne faisant varier que y, & de $\int N dx$ pour désigner l'intégrale de $N dx$ prise par rapport à x seulement; à cause de $\mathrm{d} \int N dx = \int \mathrm{d} (N dx)$, nous aurons pour la différentielle de $\int N dx$, en ne faisant varier que y, $\int \frac{dN}{dy} dy dx$ ou $dy \int \frac{dN}{dy} dx$, puisque c'est par rapport à x seul que l'intégrale doit être prise. On démontreroit de la même manière que la différentielle de $\int M dy$, en ne faisant varier que x, est égale à $dx \int \frac{dM}{dx} dy$.

Mais $z = \int M dy + A$, A étant une fonction de toutes les variables qui entrent dans z, excepté y; on a aussi $z = \int N dx + B$, B étant une fonction de toutes les variables qui entrent dans z excepté x; donc $\int M dy + A = \int N dx + B$.

En différentiant par rapport à y, & divisant par dy, on tire de cette équation $M = \int \frac{dN}{dy} dx + \frac{dB}{dy}$; différentiant ensuite par rapport à x, & divisant par dx, il vient $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$. Fontaine auroit pu déduire le théorême précédent directement du sien de la manière suivante. Nous nous servirons des deux caractéristiques d & δ, pour désigner deux manières différentes de différentier une fonction quelconque, l'une en ne faisant varier que y, l'autre en ne faisant varier que x, & nous aurons $d z = M dy$, $\delta z = N dx$. Mais $\delta d z = d \delta z$; donc $\delta (M dy) = d (N dx)$, ou, ce qui est la même chose, $\frac{dM}{dx} dx dy = \frac{dN}{dy} dy dx$; d'où l'on tire $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy}$.

Après cette courte digression occupons-nous du problême de trouver la variation d'une fonction quelconque.

(325). Nous remarquerons d'abord que le calcul différentiel & celui des variations diffèrent essentiellement; le premier est, comme on sait, assujetti à des loix fixes & invariables; celles du second sont arbitraires. Dans le calcul des variations, on peut supposer qu'une ordonnée varie, quoique l'abscisse correspondante reste toujours la même; on peut ne faire varier qu'une certaine portion de la courbe, & alors on n'attribuera de variations qu'aux ordonnées qui y répondent. Du reste, le calcul des variations a les mêmes règles que le calcul différentiel. En effet, quelle que soit la différence marquée par d, si elle est infiniment petite, on aura $d . xy = y dx + x dy$; donc, d étant toujours la caractéristique du calcul différentiel & δ celle du calcul des variations, on doit avoir

$$d . xy = y dx + x dy \ \& \ \delta . xy = y \delta x + x \delta y;$$

à moins que la variation de la relation ne soit telle qu'on ne doive attribuer aucune variation à l'une des variables, à x par exemple, ce qui réduira la variation de xy à $x \delta y$. En général, étant donnée la différentielle d'une fonction quelconque, si on demande la variation de cette fonction, il suffira de changer un d en δ dans chaque terme de la différentielle; à moins que par l'hypothèse il n'y ait certaines quantités qui ne doivent pas varier, ce qui rendra nuls certains termes; ou que cette hypothèse n'exige de faire varier d'autres quantités qui, dans l'expression de la différentielle, sont regardées comme constantes, ce qui donnera de nouveaux termes, qu'on trouvera aisément si l'on cherche la différentielle de la fonction proposée en regardant ces quantités comme variables. Cela posé, on demande la variation d'une fonction quelconque ζ des variables y, x, &c. & de $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$, $\frac{dr}{dx} = s$, &c. &c.?

(326). Si nous supposons

$$d\zeta = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \&c. + \&c.$$

& que la variation de la relation affecte toutes ces variables, nous aurons

$$\delta \zeta = M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + S \delta s + \&c. + \&c.;$$

il ne s'agit plus que de trouver δp, δq, δr, δs, &c. A cause de

$p = \frac{dy}{dx}$, on aura $\delta p = \frac{dx\, \delta dy - dy\, \delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y - p\, d\delta x}{dx}$;

$q = \frac{dp}{dx}$; $\quad \delta q = \frac{dx\, \delta dp - dp\, \delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta p - q\, d\delta x}{dx}$;

$r = \frac{dq}{dx}$; $\quad \delta r = \frac{dx\, \delta dq - dq\, \delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta q - r\, d\delta x}{dx}$;

$s = \frac{dr}{dx}$, $\quad \delta s = \frac{dx\, \delta dr - dr\, \delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta r - s\, d\delta x}{dx}$;

& ainsi des autres. Il ne sera pas aussi facile de trouver la variation de la formule intégrale $\int \zeta dx$.

On a $\delta \int \zeta dx = \int \delta (\zeta dx) = \int (dx\, \delta \zeta + \zeta d\delta x)$.

Mais $\int \zeta d\delta x = \zeta \delta x - \int d\zeta \delta x$; donc

$\delta \int \zeta dx = \zeta \delta x + \int (dx\, \delta \zeta - d\zeta \delta x) = \zeta \delta x + \int [N(dx\, \delta y - dy\, \delta x) + P(dx\, \delta p - dp\, \delta x) + Q(dx\, \delta q - dq\, \delta x) + \&c. + \&c.]$.

En faisant, pour abréger $\delta y - p\, \delta x = \mathrm{d} y$, &c. il vient

$dx\, \delta y - dy\, \delta x = dx\, \mathrm{d} y$,

$dx\, \delta p - dp\, \delta x = d\delta y - p\, d\delta x - dp\, \delta x = d(\delta y - p\, \delta x) = d\mathrm{d} y$,

$dx\, \delta q - dq\, \delta x = d\delta p - q\, d\delta x - dq\, \delta x = d(\delta p - q\, \delta x) = d\left(\frac{1}{dx} d\mathrm{d} y\right)$;

&c.; donc $\delta \int \zeta dx = \zeta \delta x + \int [N dx\, \mathrm{d} y + P d\mathrm{d} y + Q d\left(\frac{1}{dx} d\mathrm{d} y\right) + \&c. + \&c.]$

De plus, on trouvera par une transformation dont nous avons déjà fait usage

$\int P d\mathrm{d} y = P\mathrm{d} y - \int dP\mathrm{d} y$,

$\int Q d\left(\frac{1}{dx} d\mathrm{d} y\right) = \frac{1}{dx} Q d\mathrm{d} y - \int \frac{1}{dx} dQ d\mathrm{d} y = \frac{1}{dx} Q d\mathrm{d} y - \frac{1}{dx} dQ\mathrm{d} y + \int d\left(\frac{1}{dx} dQ\right)\mathrm{d} y$,

$\int R d\left(\frac{1}{dx} d\left(\frac{1}{dx} d\mathrm{d} y\right)\right) = \frac{1}{dx} R d\left(\frac{1}{dx} d\mathrm{d} y\right) - \int \frac{1}{dx} dR d\left(\frac{1}{dx} d\mathrm{d} y\right) = \frac{1}{dx} R d\left(\frac{1}{dx} d\mathrm{d} y\right) - \frac{1}{dx^2} dR d\mathrm{d} y + \int \frac{1}{dx} d\left(\frac{1}{dx} dR\right) d\mathrm{d} y = \frac{1}{dx} R d\left(\frac{1}{dx} d\mathrm{d} y\right) - \frac{1}{dx^2} dR d\mathrm{d} y + \frac{1}{dx} d\left(\frac{1}{dx} dR\right)\mathrm{d} y - \int d\left(\frac{1}{dx} d\left(\frac{1}{dx} dR\right)\right)\mathrm{d} y$, &c.

On

On aura donc, en substituant toutes ces valeurs,

$$\delta \int Z\,dx = \text{constante} + \int \Big[\Big(N - \frac{1}{dx}\,dP + \frac{1}{dx}\,d\Big(\frac{1}{dx}\,dQ\Big) - \frac{1}{dx}\,d\Big(\frac{1}{dx}\,d\Big(\frac{1}{dx}\,dR\Big)\Big) + \text{\&c.}\Big)\,dx\,\text{d}y + \text{\&c.}\Big]$$

$$+ Z\delta x + \Big(P - \frac{1}{dx}\,dQ + \frac{1}{dx}\,d\Big(\frac{1}{dx}\,dR\Big) - \text{\&c.}\Big)\,\text{d}y + \text{\&c.}$$

$$+ \Big(Q - \frac{1}{dx}\,dR + \text{\&c.}\Big)\,\frac{1}{dx}\,d\text{d}y + \text{\&c.}$$

$$+ \Big(R - \text{\&c.}\Big)\,\frac{1}{dx}\,d\Big(\frac{1}{dx}\,d\text{d}y\Big) + \text{\&c.} + \text{\&c.}$$

En faisant dx constant, l'expression précédente devient beaucoup plus simple ; & on a $\delta \int Z\,dx$ = constante $+ \int \Big[\Big(N - \frac{1}{dx}\,dP + \frac{1}{dx^2}\,d^2Q - \frac{1}{dx^3}\,d^3R + \text{\&c.}\Big)\,dx\,\text{d}y + \text{\&c.}\Big]$

$$+ Z\delta x + \Big(P - \frac{1}{dx}\,dQ + \frac{1}{dx^2}\,d^2R - \text{\&c.}\Big)\,\text{d}y + \text{\&c.}$$

$$+ \Big(Q - \frac{1}{dx}\,dR + \text{\&c.}\Big)\,\frac{1}{dx}\,d\text{d}y + \text{\&c.}$$

$$+ \Big(R - \text{\&c.}\Big)\,\frac{1}{dx^2}\,d^2\text{d}y + \text{\&c.} + \text{\&c.}$$

Nous représenterons l'une & l'autre expression de la variation de $\int Z dx$ par $\int\Psi + \Pi +$ constante, en désignant par $\int\Psi$ tous les termes qui sont sous le signe intégral, & par Π tous ceux qui sont hors du signe ; & il est à remarquer que $\int\Psi$ n'est plus susceptible de réduction.

(327). Si $\int Z\,dx$ doit être *un plus grand* ou un moindre, on aura $\int\Psi + \Pi +$ constante $= 0$, ou $\int\Psi + \Pi =$ constante. La constante doit être égale à ce que devient Π lorsque $\int\Psi = 0$; d'où il suit que si nous nommons (Π) la valeur de Π au commencement de l'intégrale $\int\Psi$, nous aurons $\int\Psi + \Pi = (\Pi)$. De plus, si nous donnons à $\int\Psi$ une certaine étendue déterminée, en nommant $[\Pi]$ ce que devient Π à la fin de cette intégrale, nous aurons pour l'équation du *maximum* ou du *minimum* $\int\Psi + [\Pi] = (\Pi)$.

Soient a, b, &c. les valeurs de x, y, &c. au commencement de l'intégrale $\int\Psi$, & f, g, &c. les valeurs de ces co-ordonnées à la fin de la même intégrale. On peut supposer que Z renferme a, b, &c. f, g, &c. & même les rapports $\frac{db}{da} = b'$, $\frac{db'}{da} = b''$, &c. $\frac{dg}{df} = g'$, $\frac{dg'}{df} = g''$, &c. &c.

Or, quoique ces quantités soient regardées comme constantes dans l'expression de la différentielle de Z, la nature du problême peut exiger qu'elles aient une

variation ; alors $\delta\zeta$ contiendra néceſſairement des termes de cette forme

$$A\,\delta a + B\,\delta b + B'\,\delta b' + B''\,\delta b'' + \&c. + F\,\delta f + G\,\delta g + G'\,\delta g' + G''\,\delta g'' + \&c.$$

A, B, &c. F, G, &c. étant des fonctions de toutes les quantités qui entrent dans ζ. Il ſuit delà que $\int dx\,\delta\zeta$ peut contenir les termes

$$\delta a\int A\,dx + \delta b\int B\,dx + \&c. + \delta f\int F\,dx + \delta g\int G\,dx + \&c.;$$

en ſorte que ſi l'on nomme (A), (B), &c. (F), (G), &c. ce que deviennent les intégrales $\int A\,dx$, $\int B\,dx$, &c. $\int F\,dx$, $\int G\,dx$, &c. (priſes de manière qu'elles ſoient nulles lorſque $x=a$, $y=b$, &c.) lorſqu'on fait $x=f$, $y=g$, &c. ; au lieu de l'équation précédente, on aura celle-ci

$$\int\psi + [\,\Pi\,] + (F)\,\delta f + (G)\,\delta g + \&c. = (\Pi) - (A)\,\delta a - (B)\,\delta b - \&c.$$

Donc, en nommant (ζ), (P), (Q), (R), &c. ce que deviennent les fonctions ζ, P, Q, R, &c. lorſqu'on fait $x=a$, $y=b$, &c. & $[\zeta]$, $[P]$, $[Q]$, $[R]$, &c. ce que deviennent les mêmes fonctions lorſqu'on fait $x=f$, $y=g$, &c. ; nous aurons pour l'équation du *maximum* ou du *minimum*,

$$\begin{aligned}\int\psi = {} & [(\zeta)-(A)]\,\delta a + \left[(P) - \frac{1}{da}d(Q) + \frac{1}{da}d\left(\frac{1}{da}d(R)\right) - \&c.\right]db - (B)\,\delta b + \&c.\\ & + \left[(Q) - \frac{1}{da}d(R) + \&c.\right]\frac{1}{da}ddb - (B')\,\delta b' + \&c.\\ & + [(R) - \&c.]\,\frac{1}{da}d\left(\frac{1}{da}ddb\right) - (B'')\,\delta b'' + \&c.\\ & - [[\zeta]+(F)]\,\delta f - \left[[P] - \frac{1}{df}d[Q] + \frac{1}{df}d\left(\frac{1}{df}d[R]\right) - \&c.\right]dg - (G)\,\delta g + \&c.\\ & - \left[[Q] - \frac{1}{df}d[R] + \&c.\right]\frac{1}{df}ddg - (G')\,\delta g' - \&c.\\ & - [[R] - \&c]\,\frac{1}{df}d\left(\frac{1}{df}ddg\right) - (G'')\,\delta g'' - \&c.\end{aligned}$$

Au premier point de la courbe dont la propriété eſt que $\int\zeta\,dx$ ſoit *un plus grand* ou *un moindre*, répondent les co-ordonnées a, b, &c. au point ſuivant répondent $a+da$, $b+db$, &c. & ainſi de ſuite juſqu'au dernier point auquel répondent les co-ordonnées f, g, &c. Or, comme la variation de chaque point eſt entièrement indépendante de celle de tout autre point ; l'équation précédente doit donner d'abord $\psi=0$, qui a lieu dans toute l'étendue de $\int\psi$; puis elle doit donner ces deux ſuites d'équations déterminées, dont les unes appartiennent aux premiers points, & les autres aux derniers points de la courbe en queſtion.

$$(a)\ldots[(\zeta)-(A)]\,\delta a+\left[(P)-\frac{1}{da}d(Q)+\frac{1}{da}d\left(\frac{1}{da}d(R)\right)-\&c.\right]\mathrm{d}b-(B)\,\delta b+\&c.=0,$$

$$(b)\ldots\ldots\ldots\ldots\left[(Q)-\frac{1}{da}d(R)+\&c.\right]\frac{1}{da}d\,\mathrm{d}b-(B')\,\delta b'+\&c.=0,$$

$$(c)\ldots\ldots\ldots\ldots[(R)-\&c.]\,\frac{1}{da}d\left(\frac{1}{da}d\,\mathrm{d}b\right)-(B'')\,\delta b''+\&c.=0,\ \&c.;$$

$$(a')\ldots[[\zeta]+(F)]\,\delta f+\left[[P]-\frac{1}{df}d[Q]+\frac{1}{df}d\left(\frac{1}{df}d[R]\right)-\&c.\right]\mathrm{d}g+(G)\,\delta g+\&c.=0,$$

$$(b')\ldots\ldots\ldots\ldots\left[[Q]-\frac{1}{df}d[R]+\&c.\right]\frac{1}{df}d\,\mathrm{d}g+(G')\,\delta g'+\&c.=0,$$

$$(c')\ldots\ldots\ldots\ldots[[R]-\&c.]\,\frac{1}{df}d\left(\frac{1}{af}d\,\mathrm{d}g\right)+(G'')\,\delta g''+\&c.=0;\ \&c.$$

S'il n'y a pas de relation donnée entre x, y, &c. les variations de ces co-ordonnées feront indépendantes l'une de l'autre, & l'équation $\Psi=0$ donnera

$$(A)\ldots N-\frac{1}{dx}dP+\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}dQ\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}dR\right)\right)+\&c.=0,\ \&c.;$$

il y aura autant de ces équations que de variables moins une, qui eſt celle dont la différentielle première eſt le dénominateur des rapports p, q, &c. &c.

(328). Il eſt à remarquer que ces équations ſont celles qui, comme nous l'avons démontré (n°. 240), feroient identiques, ſi ζdx étoit la différentielle de quelque fonction de l'ordre immédiatement inférieur. Dans l'article cité, nous avons fait pour ſimplifier dx conſtant; en le ſuppoſant variable, nous aurions trouvé dans le cas où ζ ne renferme que y, x, p, q:

$$N=\frac{1}{dx}d\frac{d\zeta}{dy},$$

$$\frac{1}{dx}dP=\frac{1}{dx}d\frac{d\zeta}{dy}+\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d\frac{d\zeta}{dp}\right),$$

$$\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}dQ\right)=\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d\frac{d\zeta}{dp}\right);$$

& par conſéquent $N-\frac{1}{dx}dP+\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}dQ\right)=0$, &c.

(329). Mais ſi, en ne ſuppoſant que trois variables y, x, u, il exiſtoit entre ces trois variables une relation telle que l'on eût $\alpha dy+\beta dx+\nu du=0$, on auroit auſſi $\alpha\,\delta y+\beta\,\delta x+\nu\,\delta u=0$, & $\delta x=-\frac{\alpha}{\beta}\delta y-\frac{\nu}{\beta}\delta u$.

Repréſentons l'équation $\Psi=0$ par $\Pi\,\mathrm{d}y+\Pi'\mathrm{d}u=0$; & dans $\mathrm{d}y=\delta y-p\,\delta x$, $\mathrm{d}u=\delta u-p'\,\delta x$, mettons pour δx ſa valeur; cette équation deviendra

$$(\Pi\beta+\Pi\alpha p+\Pi'\alpha p')\,\delta y+(\Pi\nu p+\Pi'\beta+\Pi'\nu p')\,\delta u=0.$$

Au lieu des équations $\Pi = 0$, $\Pi' = 0$, nous aurons celles-ci

$$\Pi \zeta + \Pi \alpha p + \Pi' \alpha p' = 0,\quad \Pi \varkappa p + \Pi' \zeta + \Pi' \varkappa p' = 0.$$

En général, il faudra réduire les variations δy, δx, &c. au plus petit nombre possible, & égaler ensuite à zéro le co-efficient de chacune de celles qui restent.

(330). Nous ferons sur les équations déterminées a, b, c, &c. a', b', c', &c. les mêmes remarques que sur l'équation $\psi = 0$, relativement à l'indépendance mutuelle des variations des quantités a, b, &c. f, g, &c. lorsqu'il n'y a pas entr'elles de relations données. Si, par exemple, la seule condition étoit que la courbe pour laquelle $\int \zeta dx$ doit être *un plus grand* ou *un moindre*, fût terminée par deux courbes données; à l'exception des variations δa, δb, &c. qui, appartenant à la courbe qui passe par le premier point, feroient nécessairement liées entr'elles par l'équation a, & des variations δf, δg, &c. qui, appartenant à la courbe qui passe par le dernier point, feroient nécessairement liées entr'elles par l'équation a'; on égaleroit à zéro le co-efficient de chacune de celles qui entrent dans les équations b, c, &c., b', c', &c.

Si le premier point de la courbe est l'origine des co-ordonnées, les quantités a, b, &c. seront nulles, & les termes $(A)\,\delta a$, $(B)\,\delta b$, &c. n'entreront point dans les équations a, b, c, &c. Mais ce premier point n'étant point supposé fixe, les co-ordonnées x, y, &c. auront en conséquence une variation en sens contraire de celle qui est relative au mouvement de tout autre point, ce qui introduira dans $\delta \zeta$ les termes $- M \delta a - N \delta b -$ &c. Nous avons représenté par δa, δb, &c. les variations de x, y, &c. qui sont dues au mouvement du premier point, comme nous représenterons par $\delta d a$, $\delta d b$, &c. celles qui seront dues au mouvement du second point, & ainsi des autres; on verra aisément que la variation du premier point ne doit influer en aucune manière sur celle des rapports p, q, &c. Ainsi, pour avoir les équations déterminées dans l'hypothèse actuelle, il suffira d'écrire dans l'équation a, au lieu de (A), (B), &c. ce que deviennent les intégrales $\int - M d x$, $\int - N d x$, &c., prises de manière qu'elles soient nulles lorsque y, x, &c. sont chacun égal à zéro, lorsqu'on fait $x = f$, $y = g$, &c.; & d'effacer dans les équations b, c, &c. les termes $(B')\,\delta b'$, $(B'')\,\delta b''$, &c. Telle est à-peu-près la solution que Lagrange a donné de ce problême; on va voir que celle de Euler conduit au même résultat.

(331). Si on veut que la formule intégrale $\int \zeta dx$ ait toute l'étendue dont elle est susceptible, on fera

$$\int \zeta dx = \&c. + {}'''\zeta d'''x + {}''\zeta d''x + {}'\zeta d'x + \zeta dx + \zeta' dx' + \zeta'' dx'' + \zeta''' dx''' + \&c.;$$

donc, à cause de $\delta(\zeta dx) = dx\,\delta\zeta + \zeta\,\delta dx$, on aura

$$\delta \int \zeta dx = \&c. + d'''x\,\delta'''\zeta + d''x\,\delta''\zeta + d'x\,\delta'\zeta + dx\,\delta\zeta + dx'\,\delta\zeta' + dx''\,\delta\zeta'' + dx'''\,\delta\zeta''' + \&c. + {}'''\zeta\,\delta d'''x + {}''\zeta\,\delta d''x + {}'\zeta\,\delta d'x + \zeta\,\delta dx + \zeta'\,\delta dx' + \zeta''\,\delta dx'' + \zeta'''\,\delta dx''' + \&c.$$

Mais

Mais $\delta d x = \delta x' - \delta x$ &c.; en faisant ces substitutions, la seconde partie de l'expression précédente deviendra

$$\&c. - {}'''\zeta \delta''' x - ({}''\zeta - {}'''\zeta)\delta'' x - ({}'\zeta - {}''\zeta)\delta' x - (\zeta - {}'\zeta)\delta x - (\zeta' - \zeta)\delta x' - (\zeta'' - \zeta')\delta x'' - (\zeta''' - \zeta'')\delta x''' + \zeta''' \delta x'' + \&c.;$$

& nommant a l'abscisse qui répond au commencement de $\int \zeta d x$, f celle qui répond à la fin de la même formule intégrale, (ζ) ce que devient ζ lorsque $x = a$, $[\zeta]$ ce que devient la même fonction lorsque $x = f$, on voit que cette même seconde partie n'est autre chose que

$$-(\zeta)\delta a + [\zeta]\delta f - \&c. - d''\zeta \delta'' x - d'\zeta \delta' x - d\zeta \delta x - d\zeta \delta x' - d\zeta' \delta x'' - d\zeta'' \delta x''' - \&c.$$

Au lieu de &c. $- d''\zeta \delta'' x -$ &c., on peut écrire

$$\&c. - d'''\zeta \delta''' x - \&c. - \&c. - d'''\zeta \delta d''' x - \&c.,$$

car $''x = {}'''x + d''' x$, & ainsi des autres. De plus, si pour simplifier nous supposons $d x$ constant, les différentielles &c. $d''' x$, $d'' x$, &c. seront chacune égale à $d x$, & on aura

$$-\&c. - d'''\zeta \delta d''' x - \&c. = -\frac{\delta d x}{d x} d(\&c. + {}'''\zeta d x + \&c.) = -\frac{\delta d x}{d x} d \int \zeta d x = 0;$$

la raison de cela est que cette formule intégrale ayant par l'hypothèse toute l'étendue dont elle est susceptible, sa différentielle doit être nulle. Donc enfin

$$\delta \int \zeta d x = -(\zeta)\delta a + [\zeta]\delta f + \&c. + d x \delta''' \zeta - d''' \zeta \delta''' x + d x \delta'' \zeta - d'' \zeta \delta'' x + d x \delta' \zeta - d' \zeta \delta' x + d x \delta \zeta - d \zeta \delta x + d x \delta \zeta' - d \zeta' \delta x' + d x \delta \zeta'' - d \zeta'' \delta x'' + d x \delta \zeta''' - d \zeta''' \delta x''' + \&c.$$

Je supposerai

$$d \zeta = M d x + N d y + P d p + Q d q + R d r + \&c. + \&c.;$$

d'où je tire

$$\delta \zeta = M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \&c. + \&c.;$$

& j'aurai par conséquent

$$d x \delta \zeta - d \zeta \delta x = N (d x \delta y - d y \delta x) + P (d x \delta p - d p \delta x) + Q (d x \delta q - d q \delta x) + R (d x \delta r - d r \delta x) + \&c. + \&c.$$

En faisant comme ci-dessus $\delta y - p \delta x = \mathrm{d} y$, &c. il vient

$$d x \delta \zeta - d \zeta \delta x = N d x \, \mathrm{d} y + P d \mathrm{d} y + \frac{1}{d x} Q d^2 \mathrm{d} y + \frac{1}{d x^2} R d^3 \mathrm{d} y + \&c. + \&c.;$$

&, à cauſe de

$$d\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y' - \mathrm{d}y,$$
$$d^2\mathrm{d}y = \mathrm{d}y'' - 2\,\mathrm{d}y' + \mathrm{d}y,$$
$$d^3\mathrm{d}y = \mathrm{d}y''' - 3\,\mathrm{d}y'' + 3\,\mathrm{d}y' - \mathrm{d}y, \text{ \&c.}$$

je pourrai transformer l'expreſſion précédente de $dx\,\delta\zeta - d\zeta\,\delta x$ en celle-ci

$$\left(N\,dx - P + \frac{1}{dx}Q - \frac{1}{dx^2}R + \text{\&c.}\right)\mathrm{d}y +$$
$$\left(P - \frac{2}{dx}Q + \frac{3}{dx^2}R + \text{\&c.}\right)\mathrm{d}y' +$$
$$\left(\frac{1}{dx}Q - \frac{3}{dx^2}R + \text{\&c.}\right)\mathrm{d}y'' +$$
$$\left(\frac{1}{dx^2}R - \text{\&c.}\right)\mathrm{d}y''' + \text{\&c.};$$

les co-efficiens numériques ſont, dans la ſeconde ligne, les nombres naturels; dans la troiſième, les nombres triangulaires, & ainſi de ſuite.

(332). Je fais pour abréger

$$N\,dx - P + \text{\&c.} = N_{,},\quad P - \frac{2}{dx}Q + \text{\&c.} = P_{,},\ \text{\&c.};$$

& parce que

$$dx\,\delta\zeta - d\zeta\,\delta x = N_{,}\mathrm{d}y + P_{,}\mathrm{d}y' + Q_{,}\mathrm{d}y'' + R_{,}\mathrm{d}y''' + \text{\&c.} + \text{\&c.};$$

j'ai $\delta\int\zeta\,dx = -(\zeta)\,\delta a + [\zeta]\,\delta f + \text{\&c.} +$

$$'''N_{,}\mathrm{d}'''y + '''P_{,}\mathrm{d}''y + '''Q_{,}\mathrm{d}'y + '''R_{,}\mathrm{d}y + \text{\&c.}$$
$$+ ''N_{,}\mathrm{d}''y + ''P_{,}\mathrm{d}'y + ''Q_{,}\mathrm{d}y + ''R_{,}\mathrm{d}y' + \text{\&c.}$$
$$+ 'N_{,}\mathrm{d}'y + 'P_{,}\mathrm{d}y + 'Q_{,}\mathrm{d}y' + \text{\&c.}$$
$$+ N_{,}\mathrm{d}y + P_{,}\mathrm{d}y' + \text{\&c.}$$
$$+ N'_{,}\mathrm{d}y' + \text{\&c. \&c.}$$

On remarquera que $N_{,} + 'P_{,} + ''Q_{,} + '''R_{,} + \text{\&c.} =$

$$N\,dx - P + \frac{1}{dx}Q - \frac{1}{dx^2}R + \text{\&c.} = N\,dx - d'P + \frac{1}{dx}d^2\,''Q - \frac{1}{dx^2}d^3\,'''R + \text{\&c.},$$
$$+ 'P - \frac{2}{dx}'Q + \frac{3}{dx^2}'R - \text{\&c.}$$
$$+ \frac{1}{dx}''Q - \frac{3}{dx^2}''R + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{1}{dx^2}'''R - \text{\&c.}$$

que $N'_{,} + P_{,} + 'Q_{,} + ''R' + \text{\&c.} = N'\,dx - dP + \frac{1}{dx}d^2\,'Q - \frac{1}{dx^2}d^3\,''R + \text{\&c.},$

& ainſi de ceux qui ſuivent. Mais pour fixer les idées, ſuppoſons deux variables y & x ſeulement ; que la fonction ς n'eſt que du troiſième ordre, c'eſt-à-dire, que $d\varsigma = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr$; que ${}'''\varsigma$ eſt le premier terme, & ς' le dernier terme de la ſuite des ς. Cela ſuppoſé, le co-efficient de $d'y$ dans l'expreſſion de $\delta \int \varsigma\, dx$, ne ſera effectivement que ${}'N_{,} + {}''P_{,} + {}'''Q_{,} =$

$${}'N dx - {}'P + \frac{1}{dx}\,{}'Q - \frac{1}{dx^2}\,{}'R = {}'N dx - d''P + \frac{1}{dx}\, d^2\,{}'''Q - \frac{1}{dx^2}\, d^3\,{}^{iv}R - \frac{1}{dx^2}\,{}^{iv}R\,;$$

$$+ {}''P - \frac{2}{dx}\,{}''Q + \frac{3}{dx^2}\,{}''R$$

$$+ \frac{1}{dx}\,{}'''Q - \frac{3}{dx^2}\,{}'''R$$

celui de $d''y$ ſera

$${}''N_{,} + {}'''P_{,} = {}''N dx - {}''P + \frac{1}{dx}\,{}''Q - \frac{1}{dx^2}\,{}''R = {}''N dx - d'''P + \frac{1}{dx}\, d^2\,{}^{iv}Q - \frac{1}{dx^2}\, d^3\,{}^{v}R =$$

$$+ {}'''P - \frac{2}{dx}\,{}'''Q + \frac{3}{dx^2}\,{}'''R$$

$$\frac{1}{dx}\,{}^{iv}Q + \frac{3}{dx^2}\,{}^{iv}R - \frac{1}{dx^2}\,{}^{v}R = {}''N dx - d'''P + \frac{1}{dx}\, d^2\,{}^{iv}Q -$$

$$\frac{1}{dx^2}\, d^3\,{}^{v}R - \frac{1}{dx}\,{}^{iv}Q + \frac{1}{dx^2}\, d\,{}^{v}R + \frac{2}{dx^2}\,{}^{iv}R\,;$$

celui de $d'''y$ ſera

$${}'''N_{,} = {}'''N dx - {}'''P + \frac{1}{dx}\,{}'''Q - \frac{1}{dx^2}\,{}'''R = {}'''N dx - d\,{}^{iv}P + \frac{1}{dx}\, d^2\,{}^{v}Q -$$

$$\frac{1}{dx^2}\, d^3\,{}^{vi}R - {}^{iv}P + \frac{2}{dx}\,{}^{iv}Q - \frac{1}{dx}\,{}^{v}Q - \frac{3}{dx^2}\,{}^{iv}R + \frac{3}{dx^2}\,{}^{v}R -$$

$$\frac{1}{dx^2}\,{}^{vi}R = {}'''N dx - d^{iv}P + \frac{1}{dx}\, d^2\,{}^{v}Q - \frac{1}{dx^2}\, d^3\,{}^{vi}R - {}^{iv}P + \frac{1}{dx}\, d\,{}^{v}Q -$$

$$\frac{1}{dx^2}\, d^2\,{}^{vi}R + \frac{1}{dx}\,{}^{iv}Q - \frac{1}{dx^2}\, d\,{}^{v}R - \frac{1}{dx^2}\,{}^{iv}R.$$

Le co-efficient de dy'' ſera

$$P'_{,} + Q_{,} + {}'R_{,} = P' - \frac{2}{dx}\, Q' + \frac{3}{dx^2}\, R' =$$

$$+ \frac{1}{dx}\, Q - \frac{3}{dx^2}\, R$$

$$+ \frac{1}{dx^2}\,{}'R$$

$$P' - \frac{1}{dx}\, d\, Q + \frac{1}{dx^2}\, d^2\,{}'R - \frac{1}{dx}\, Q' + \frac{1}{dx^2}\, d R + \frac{1}{dx^2}\, R'\,;$$

celui de $\mathrm{d}y'''$ sera

$$Q_{,}' + R_{,} = \frac{1}{dx} Q' - \frac{1}{dx^2} R' = \frac{1}{dx} Q' - \frac{1}{dx^2} dR - \frac{2}{dx^2} R';$$
$$+ \frac{1}{dx^2} R$$

enfin celui de $\mathrm{d}y^{iv}$ sera $R_{,}' = \frac{1}{dx^2} R'$.

Rapprochons tout cela, & nous trouverons, en faisant pour abréger

$$Ndx - d'P + \frac{1}{dx} d^2 {}''Q - \frac{1}{dx^2} d^3 {}'''R = \Pi,$$

pour cette partie de la variation de $\int \zeta\, dx$, premiérement

$$+ {}'''\Pi\, \mathrm{d}'''y - \left({}^{v}P - \frac{1}{dx} d^{v}Q + \frac{1}{dx^2} d^2 {}^{v}R\right) \mathrm{d}'''y +$$
$$+ {}''\Pi\, \mathrm{d}''y \qquad -$$
$$+ {}'\Pi\, \mathrm{d}'y$$
$$\frac{1}{dx}\left({}^{v}Q - \frac{1}{dx} d^{v}R\right) \mathrm{d}'''y - \frac{1}{dx^2} {}^{v}R\, \mathrm{d}'''y =$$
$$\frac{1}{dx}\left({}^{v}Q - \frac{1}{dx} d^{v}R\right) \mathrm{d}''y + \frac{2}{dx^2} {}^{v}R\, \mathrm{d}''y$$
$$- \frac{1}{dx^2} {}^{v}R\, \mathrm{d}'y$$

$$''\Pi\, \mathrm{d}'''y + {}''\Pi\, \mathrm{d}''y + {}'\Pi\, \mathrm{d}'y - \left({}^{v}P - \frac{1}{dx} d^{v}Q + \frac{1}{dx^2} d^2 {}^{v}R\right) \mathrm{d}'''y -$$
$$\left(Q^{v} - \frac{1}{dx} d^{v}R\right) \frac{d\,\mathrm{d}'''y}{dx} - {}^{v}R\, \frac{d^2\,\mathrm{d}'''y}{dx^2};$$

secondement, ces deux termes $\Pi\, \mathrm{d}y + \Pi'\, \mathrm{d}y'$; & troisiémement,

$$+ \left(P' - \frac{1}{dx} dQ + \frac{1}{dx^2} d^2 {}'R\right) \mathrm{d}y' -$$
$$+$$
$$\frac{1}{dx}\left(Q' - \frac{1}{dx} dR\right) \mathrm{d}y' + \frac{1}{dx^2} R'\, \mathrm{d}y''' =$$
$$\frac{1}{dx}\left(Q' - \frac{1}{dx} dR\right) \mathrm{d}y''' - \frac{2}{dx^2} R'\, \mathrm{d}y'''$$
$$+ \frac{1}{dx^2} R'\, \mathrm{d}y''$$

$$\left(P' - \frac{1}{dx} dQ + \frac{1}{dx^2} d^2 {}'R\right) \mathrm{d}y' + \left(Q' - \frac{1}{dx} dR\right) \frac{d\,\mathrm{d}y''}{dx} + R' \frac{d^2\,\mathrm{d}y''}{dx^2}.$$

Or, dans l'hypothèse actuelle $'''\zeta\delta'''x$ est la même chose que $(\zeta)\,\delta a$, & $\zeta'\,\delta x''$ la même chose que $[\zeta]\,\delta f$; on aura donc

$\delta \int \zeta dx$

$$\delta\int\zeta\, dx = {}'''\Pi d'''y + {}''\Pi d''y + {}'\Pi d'y + \Pi dy + \Pi' dy'$$
$$- {}'''\zeta\,\delta'''x - \left({}^{\text{iv}}P - \frac{1}{dx}d\,{}^{\text{v}}Q + \frac{1}{dx^2}d^2\,{}^{\text{iv}}R\right)d'''y$$
$$- \left({}^{\text{v}}Q - \frac{1}{dx}d\,{}^{\text{v}}R\right)\frac{dd'''y}{dx}$$
$$- \quad {}^{\text{iv}}R\,\frac{d^2d'''y}{dx^2}$$
$$+ \zeta'\,\delta x' + \left(P' - \frac{1}{dx}dQ + \frac{1}{dx^2}d^2\,{}'R\right)dy'$$
$$+ \left(Q' - \frac{1}{dx}dR\right)\frac{ddy'}{dx}$$
$$+ \quad R'\,\frac{d^2dy'}{dx^2}.$$

(333). Maintenant si $\int\zeta dx$ doit être un plus grand ou un moindre, on a $\delta\int\zeta dx = 0$; & parce que la variation de chaque point de la courbe, pour laquelle cette formule intégrale est un plus grand ou un moindre, est absolument indépendante de celle de tout autre point; on aura chacun des termes de cette suite &c., $'\Pi$, Π, Π', &c. égal à zéro; c'est-à-dire, que pour un point quelconque, par exemple pour celui qui répond à l'ordonnée y, on aura

$$N dx - d\,P + \frac{1}{dx}d^2\,{}'Q - \frac{1}{dx^2}d^3\,'''R = 0.$$

Si dans cette équation on met $P - dP$ pour $'P$, &c. & qu'on efface les termes qui doivent être regardés comme nuls relativement aux autres, on aura

$$N dx - dP + \frac{1}{dx}d^2 Q - \frac{1}{dx^2}d^3 R = 0,$$

équation qui doit avoir lieu dans toute l'étendue de la courbe, & qui par conséquent en détermine la nature. On trouvera ensuite, en réduisant comme nous venons de faire, & en faisant usage de la notation que nous avons adoptée (n°. 327) les six équations déterminées que voici :

$$(\zeta)\,\delta a + \left[(P) - \frac{1}{da}d(Q) + \frac{1}{da^2}d^2(R)\right]db = 0,$$
$$(Q) - \frac{1}{da}d(R) = 0,$$
$$(R) = 0;$$
$$[\zeta]\,\delta f + \left([P] - \frac{1}{df}d[Q] + \frac{1}{df^2}d^2[R]\right)dg = 0;$$
$$[Q] - \frac{1}{df}d[R] = 0,$$
$$[R] = 0.$$

La fonction ζ n'ayant été supposée que du troisième ordre, on n'a trouvé que six équations déterminées; on en auroit trouvé huit, si on l'eût supposée du

quatrième ordre, & ainsi de suite. Cette même fonction C étant toujours du troisième ordre, l'équation

$$Ndx - dP + \frac{1}{dx} d^2 Q - \frac{1}{dx^2} d^3 R = 0$$

est du sixième ordre; car R pouvant contenir $r = \frac{d^3 y}{dx^3}$, on doit supposer que généralement $d^3 R$ contiendra $\frac{d^6 y}{dx^6}$. Or l'intégrale complète d'une équation du sixième ordre doit nécessairement renfermer six constantes arbitraires, que les six équations que nous venons de trouver serviront à déterminer. Tel est la solution de Euler; on doit voir qu'il nous seroit facile de l'appliquer à un cas plus général, en supposant que C est d'un ordre quelconque, & renferme un nombre quelconque de variables; que même il contient les quantités a, b, b', &c. f, g, g', &c. Nous dirons cependant que cette solution, de la manière que son célèbre auteur l'a présentée dans l'ouvrage dont nous avons parlé plus haut, ne peut donner que l'équation $\Psi = 0$; que Lagrange a remarqué le premier qu'outre cette équation, il y en avoit d'autres qui appartenoient à des points déterminés de la courbe; de plus, on ne peut disconvenir que la solution de Lagrange, que Euler lui-même a adoptée, ne soit beaucoup plus simple. Il nous reste à faire usage des formules que nous venons de trouver; nous choisirons pour cela les problêmes qui ont paru mériter davantage l'attention des géomètres.

(334). Celui de trouver *la ligne de la plus vîte descente*, ou *la brachystochrone*, est un des plus célèbres. Voici l'énoncé de ce problême, tel que Jean Bernoulli le proposa aux géomètres en 1697. Deux points A & B (*fig. LXVII*) étant donnés, lesquels soient dans un plan vertical, & ne soient cependant ni dans la même ligne horisontale ni dans la même ligne verticale, trouver une courbe qui passe par ces deux points, & dont la propriété soit telle, qu'un corps pesant descendant le long de sa concavité, mette moins de temps à la parcourir, que toute autre ligne droite ou courbe, passant par les mêmes points. Le temps donné pour résoudre ce problême étant expiré, on n'en vit paroître que quatre solutions, qui étoient de Newton, Leibnitz, Jacques Bernoulli & le marquis de l'Hôpital.

Sur la verticale AD je prends une partie $AP = x$; & supposant que AMB soit la courbe cherchée, je lui mène l'ordonnée horisontale PM que je nomme y. J'ai démontré (n°. 295) que le temps par l'arc infiniment petit $M\mu$, lorsque la vîtesse est nulle au point A, est proportionnel à $\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{x}}$, ou à $\frac{dx\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{x}}$; ainsi tout est réduit à trouver la courbe pour laquelle la formule intégrale $\int \frac{dx\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{x}}$ est un *minimum*. Je ferai $C = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{x}}$, d'où je tirerai $N = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{(1+p^2)}}$; &, à cause de $Ndx - dP = 0$, j'aurai

pour l'équation de la brachyſtochrone $d P = 0$, ou $P \left(= \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{(1+p^2)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{(a1)}}$, $\frac{1}{\sqrt{(a1)}}$ étant la conſtante arbitraire ajoutée en intégrant. Donc $a1p^2 = x(1+p^2)$, & $p \left(= \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a1-x)}}$; cette équation eſt celle d'une cycloïde décrite ſur une baſe horiſontale AC par un cercle qui a $a1$ pour diamètre.

Ainſi dans un milieu non réſiſtant, la brachyſtochrone, comme la tautochrone, eſt une cycloïde; Galilée croyoit que la première étoit un cercle, & ce grand homme n'avoit pas trouvé dans la Géométrie de ſon temps des ſecours ſuffiſans pour réſoudre ce problême.

(335). Si on l'eut propoſé de cette manière: Deux courbes aAb, mBn (*fig. LXVIII*) étant données dans un même plan, en trouver une troiſième AB ſur laquelle un corps peſant puiſſe deſcendre de l'une des courbes données à l'autre dans le moindre temps poſſible; alors les points A & B n'étant plus fixes, on auroit pour le point A, qui eſt toujours l'origine des abſciſſes, & où la viteſſe eſt nulle; on auroit, dis-je, pour le point A,

$$[(C) - \int - M dx] \delta a + (P) d b - \int - N dx \cdot \delta b = 0,$$

& pour le point B, $[C] \delta f + [P] dg = 0$.

En repréſentant par $\frac{db}{da}$ & $\frac{dg}{df}$ ce que devient le rapport $\frac{dy}{dx}$ aux points A & B, & mettant $\delta b - \frac{db}{da} \delta a$ & $\delta g - \frac{dg}{df} \delta f$ pour db & dg, on auroit, à cauſe de $N = 0$, $[(C) - \frac{db}{da}(P) + \int M dx] \delta a + (P) \delta b = 0$ & $([C] - \frac{dg}{df}[P]) \delta f + [P] \delta g = 0$.

Maintenant, puiſque P eſt conſtant, l'équation $dC = M dx + P dp$ donne $\int M dx = C - Pp +$ conſtante; & comme cette conſtante doit être telle que $\int M dx$ ſoit nulle au point A, elle eſt égale à ce que devient, au même point, $C - Pp$ pris négativement; cette conſtante eſt donc égale à $-(C) + \frac{db}{da}(P)$. Mais l'intégrale $\int M dx$ doit être priſe de manière qu'elle ſoit nulle au point A, & qu'elle ait ſa valeur complète au point B; ainſi la quantité qu'il faut ſubſtituer à $\int M dx$ dans la première équation eſt

$$[C] - \frac{dg}{df}[P] - (C) + \frac{db}{da}(P),$$

& par-là cette équation devient

$$([C] - \frac{dg}{df}[P]) \delta a + (P) \delta b = 0.$$

La feconde étant toujours $([C] - \frac{dg}{df}[P])\delta f + [P]\delta g = 0$, on tire de l'une & de l'autre $(P)\frac{\delta b}{\delta a} = [P]\frac{\delta g}{\delta f}$; & parce que P eft conftant, ce qui donne $(P) = [P]$, on a $\frac{\delta b}{\delta a} = \frac{\delta g}{\delta f}$; cette équation fait voir que la tangente AT menée à la courbe aAb par le point où commence la brachyftochrone doit être parallèle à la tangente Bt menée à la courbe mBn par le point où la brachyftochrone fe termine. De plus, $C - Pp = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{P}{p}$; donc $[C] - \frac{dg}{df}[P]$, qui eft ce que devient $C - Pp$ au point B eft égal à $[P] : \frac{dg}{df}$; & la feconde équation fe change en celle-ci

$$\left([P] : \frac{dg}{df}\right)\delta f + [P]\delta g = 0,$$

ou divifant par $[P]$, en celle-ci $\frac{\delta f}{\delta g} = -\frac{dg}{df}$. Nous avons vu (n°. 292) que cette dernière équation étoit celle des trajectoires orthogonales; d'où il fuit que la brachyftochrone doit couper la courbe mBn à angles droits.

(336). Si on n'eut point fuppofé que le point A fût l'origine des co-ordonnées, & qu'à ce point la vîteffe fût nulle; en nommant a & b les valeurs de x & y à ce point, h la hauteur dont il faudroit que le corps tombât pour acquérir la vîteffe que nous lui fuppofons au point A, & faifant la gravité $= 1$, on auroit eu $u^2 = 2x +$ conftante; & parce qu'au point A, $u^2 = 2h$ & $x = a$, on auroit eu la conftante $= 2h - 2a$ & $u = \sqrt{2}\sqrt{(x+h-a)}$. Donc dans l'hypothèfe préfente, la formule intégrale, qui doit être un *minimum*, eft $\int \frac{dx\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(x+h-a)}}$. A caufe de $C = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{(x+h-a)}}$, on a

$$\delta C = -\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{2(x+h-a)^{\frac{3}{2}}}\delta x + \frac{p\delta p}{\sqrt{(1+p^2)}\sqrt{(x+h-a)}} - \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{2(x+h-a)^{\frac{3}{2}}}(\delta h - \delta a).$$

Mais h ne peut être fonction que de a & b, & nous avons fait

$$\delta C = Mdx + N\delta y + P\delta p + A\delta a + B\delta b;$$

donc, en fuppofant $dh = h1\delta a + h2\delta b$, on aura

$N = 0$, $P = p : \sqrt{(1+p^2)}\sqrt{(x+h-a)}$, $A = M(h1 - 1)$, $B = h2M$.

L'équation de la brachyftochrone fera

$$p = \sqrt{(a1)}\sqrt{(1+p^2)}\sqrt{(x+h-a)};$$

il nous refte à trouver celle qui convient au premier point, & celle qui convient au dernier point de la courbe. On a pour la première

$$[(C) - (A)]\delta a + (P)db - (B)\delta b = 0,$$

uo

ou mettant $\delta b - \frac{db}{da}\delta a$ pour db,

$$[(C) - \frac{db}{da}(P) - (A)]\delta a + [(P) - (B)]\delta b = 0.$$

Pour trouver (A) & (B), je remarque que $dC = M dx + P dp$ donne, P étant constant, $\int M dx = C - Pp$; donc l'intégrale $\int M dx$, prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $x = a$ & $y = b$, devient lorsqu'on fait $x = f$ & $y = g$, égale à $[C] - \frac{dg}{df}[P] - (C) + \frac{db}{da}(P)$ que je suppose $= K$. Donc, à cause de $\int A dx = (h1 - 1)\int M dx$ & de $\int B dx = h2 \int M dx$, on a $(A) = (h1 - 1)K$, $(B) = h2K$; & notre équation devient

$$[(C) - \frac{db}{da}(P) - (h1 - 1)K]\delta a + [(P) - h2K]\delta b = 0;$$

celle du dernier point est

$$([C] - \frac{df}{dg}[P])\delta f + [P]\delta g = 0.$$

Sans rien diminuer de la généralité de l'hypothèse actuelle, je puis supposer que $h = a$, c'est-à-dire que la vîtesse au point A a été acquise en descendant depuis l'origine des abscisses; cela donne $h1 = 1$, $h2 = 0$; & par-là notre première équation est changée en celle-ci

$$[(C) - \frac{db}{da}(P)]\delta a + (P)\delta b = 0.$$

Mais $C - Pp = \frac{P}{p}$; donc $(C) - \frac{db}{da}(P)$, qui est ce que devient $C - Pp$ au point A, est égal à $(P) : \frac{db}{da}$, & $[C] - \frac{dg}{df}[P]$, qui est ce que devient $C - Pp$ au point B, est égal à $[P] : \frac{dg}{df}$. Par ces substitutions, nos deux équations se changent en celles-ci

$$(P)\frac{da}{db}\delta a + (P)\delta b = 0 \text{ \& } [P]\frac{df}{dg}\delta f + [P]\delta g = 0;$$

d'où l'on tire $\frac{\delta a}{\delta b} - = \frac{db}{da}$ & $\frac{\delta f}{\delta g} = -\frac{dg}{df}$. Donc si la vîtesse au point A n'est pas nulle, la brachystochrone doit couper à angles droits les deux courbes données.

(337). Nous avons supposé que la brachystochrone devoit être toute dans un même plan; cette supposition, qui pourroit n'être pas exacte, mérite d'être examinée. En nommant x, y, z les co-ordonnées de la brachystochrone, regardée comme courbe à double courbure, on aura le temps que le corps mettra à décrire l'arc $M\mu$ $(= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)})$ proportionnel

à $\frac{u\,dx}{\sqrt{x}}$; on a supposé l'origine des co-ordonnées au point A, & on a fait pour abréger $\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}=u$. Donc la formule intégrale qui doit être un *minimum* est $\int \frac{u\,dx}{\sqrt{x}}$; &, à cause de

$$dC=(u:2x\sqrt{x})dx+\left(\frac{dy}{dx}:u\sqrt{x}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dx}:u\sqrt{x}\right)d\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

on a pour l'équation de la brachystochrone

$$d\left(\frac{dy}{dx}:u\sqrt{x}\right)\mathrm{d}y+d\left(\frac{dz}{dx}:u\sqrt{x}\right)\mathrm{d}z=0.$$

S'il n'y a pas de relation donnée entre x, y, z, on tire de cette équation les deux suivantes $\frac{dy}{dx}=u\sqrt{(a\,1\,x)}$, $\frac{dz}{dx}=u\sqrt{(b\,1\,x)}$; & par conséquent $\frac{dy}{dx}:\frac{dz}{dx}=\frac{\sqrt{(a\,1)}}{\sqrt{(b\,1)}}$, ce qui fait voir bien clairement que la brachystochrone doit être toute dans un même plan.

Proposons-nous maintenant de déterminer la brachystochrone dans une surface courbe; en prenant pour l'équation de cette surface $dz=m\,dy+n\,dx$, on auroit

$$\delta z=m\delta y+n\delta x,\ \&\ \mathrm{d}z\left(=dz-\frac{dz}{dx}\delta x\right)=m\delta y+\left(n-\frac{dz}{dx}\right)\delta x.$$

L'équation générale que nous venons de trouver se changeroit en celle-ci :

$$d\left(\frac{dy}{dx}:u\sqrt{x}\right)\left(\delta y-\frac{dy}{dx}\delta x\right)+d\left(\frac{dz}{dx}:u\sqrt{x}\right)\left(m\delta y+\left[n-\frac{dz}{dx}\right]\delta x\right)=0.$$

Alors les variations étant réduites au plus petit nombre possible, on égaleroit à zéro le co-efficient de chacune, & on auroit pour résoudre le problême les deux équations

$$d\left(\frac{dy}{dx}:u\sqrt{x}\right)+m\,d\left(\frac{dz}{dx}:u\sqrt{x}\right)=0,$$

$$-\frac{dy}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}:u\sqrt{x}\right)+\left(n-\frac{dz}{dx}\right)d\left(\frac{dz}{dx}:u\sqrt{x}\right)=0.$$

On remarquera que si l'on multiplie par $-\frac{dy}{dx}$ & que l'on mette ensuite pour $-m\frac{dy}{dx}$ sa valeur $n-\frac{dz}{dx}$, la première équation deviendra identiquement la même chose que la seconde ; il suffira donc d'en prendre une, & de la combiner avec l'équation $dz=m\,dy+n\,dx$ pour avoir la brachystochrone demandée.

(338). Avant que Bernoulli proposât aux géomètres le problême de la plus vîte descente, Newton en avoit résolu un du même genre dans le scholie de la trente-quatrième proposition du second livre de son admirable ouvrage, qui a pour titre : *Philosophiæ naturalis Principia Mathematica*. Voici l'énoncé de ce problême. Par deux points donnés A & b (*fig. LXIX*), on imagine une infinité de courbes qui, dans la révolution de la figure autour de l'axe BD, décrivent les surfaces des différens solides ; & on suppose que ces solides sont mus de D vers B, dans un fluide en repos, tous avec la même vitesse ; cela posé, il s'agit de trouver celui de ces solides qui doit rencontrer la moindre résistance. Je suppose que bMA soit la courbe cherchée ; & ayant pris une partie infiniment petite Mm, j'abaisse sur l'axe BD les ordonnées perpendiculaires MP, mp ; puis je tire $M\mu$ parallélement au même axe. Selon l'hypothèse commune, la résistance qu'éprouve Mm est à celle qu'éprouve $m\mu :: (m\mu)^2 : (Mm)^2$; mais la résistance qu'éprouve $m\mu$ est comme cette petite ligne elle-même ; donc, en nommant BP, x, PM, y, on a $dx^2 + dy^2 : dy^2 :: dy : \frac{dy^3}{dx^2+dy^2}$, & ce quatrième terme est la résistance qu'éprouve le petit arc Mm en se mouvant de D vers B dans un fluide en repos. On trouvera donc que la résistance qu'éprouve toute la zone, engendrée par Mm dans sa révolution autour de l'axe DB, est proportionnelle à $\frac{y\,dy^3}{dx^2+dy^2}$; & que par conséquent la formule intégrale $\int\frac{y\,dy^3}{dx^2+dy^2}$ doit être un *minimum*. En faisant $\frac{dy}{dx} = p$, cette formule devient $\int\frac{p^3y\,dx}{1+p^2}$; ainsi $C = \frac{p^3y}{1+p^2}$, $M = 0$, $N = \frac{p^3}{1+p^2}$, $P = \frac{3p^2+p^4}{(1+p^2)^2}y$.

On a l'équation $N\,dx - dP = 0$, &, à cause de $M = 0$, on a aussi $dC = N\,dy + P\,dp$; donc $N = \frac{1}{dx}dP$, & $dC = p\,dP + P\,dp$; d'où l'on tire $C = pP - a1$, $a1$ étant la constante arbitraire qu'on doit ajouter en intégrant. On a donc, pour déterminer la nature de la courbe bMA, l'équation $\frac{p^3y}{1+p^2} = \frac{3p^3+p^5}{(1+p^2)^2}y - a1$, qu'on réduit à $2p^3y - a1(1+p^2)^2 = 0$, & de laquelle on tire $y = \frac{a1(1+p^2)^2}{p^3}$. On en tire aussi cette proportion $y : \frac{a1\sqrt{(1+p^2)}}{p} :: \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3} : \frac{1}{p}$; or si sur Bb on prend une partie $Be = 4a1$, & qu'on mène ef parallélement à la tangente MT, les triangles semblables eBf, MPT donneront $Bf = \frac{4a1}{p}$, $ef = \frac{4a1\sqrt{(1+p^2)}}{p}$; & la proportion précédente se réduira à celle-ci : $MP : ef :: (ef)^3 : 4Bf.(Be)^2$, qui est celle que Newton a donnée dans le scholie cité.

L'équation $dx = \frac{dy}{p}$, donne $x = \frac{y}{p} + \int \frac{y\,dp}{p^2}$. Mais, à cauſe de $y = \frac{a\,1\,(1+p^2)^2}{p^3}$, $\frac{y\,dp}{p^2} = a\,1 \left(\frac{dp}{p^5} + \frac{2\,dp}{p^3} + \frac{dp}{p}\right)$, dont l'intégrale complète eſt $a\,1 \left(-\frac{1}{4p^4} - \frac{1}{p^2} + \log. p\right) + b\,1$; donc

$$x = b\,1 + a\,1 \left(\frac{(1+p^2)^2}{p^4} - \frac{1}{4p^4} - \frac{1}{p^2} + \log. p\right).$$

Ces deux équations

$$x = b\,1 + a\,1 \left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \log. p\right), y = \frac{a\,1\,(1+p^2)^2}{p^3}$$

ſerviront à conſtruire la courbe, & on déterminera les conſtantes $a\,1$ & $b\,1$ par la condition qu'elle doit paſſer par les deux points donnés.

(339). Dans les deux problêmes précédens, C ne s'eſt trouvé être que du premier ordre ; en voici un de géométrie pure, où C eſt du ſecond ordre. On demande de trouver la courbe AM (*fig. LXX*) qui avec ſa développée AK & un rayon de courbure MK, renferme un eſpace AMK qui ſoit un *minimum.* Si l'on nomme AP, x, & l'ordonnée perpendiculaire PM, y, on aura pour l'élément de l'eſpace, $\frac{MK}{2} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Mais en faiſant dx conſtant, on a (n°. 242) $MK = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\mp dx\,d^2y}$; donc le petit eſpace en queſtion eſt égal à $\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{\mp 2\,dx\,d^2y}$, & $\int \frac{dx\,(1+p^2)^2}{q}$ eſt la formule intégrale qui doit être un *minimum.* Ainſi $C = \frac{(1+p^2)^2}{q}$; d'où l'on tire

$$M = 0,\ N = 0,\ P = \frac{4p\,(1+p^2)}{q},\ Q = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}.$$

L'équation $N\,dx - dP + \frac{1}{dx}\,d^2Q = 0$ devient $dP = \frac{1}{dx}\,d^2Q$, & donne $P = a\,1 + \frac{1}{dx}\,dQ$; de plus, $dC = P\,dp + Q\,dq$, & mettant pour P ſa valeur, $dC = a\,1\,dp + q\,dQ + Q\,dq$, donc $C = b\,1 + a\,1\,p + q\,Q$, ou $2\,(1+p^2)^2 = b\,1\,q + a\,1\,pq$. Maintenant, à cauſe de $q = \frac{dp}{dx}$, on a $dx = \frac{(b\,1 + a\,1\,p)\,dp}{2\,(1+p^2)^2}$, & $x = c\,1 - \frac{a\,1 - b\,1\,p}{4\,(1+p^2)} + \frac{b\,1}{4} \int \frac{dp}{1+p^2} = c\,1 - \frac{a\,1 - b\,1\,p}{4\,(1+p^2)} + \frac{b\,1}{4}\,A\,\text{tang}.\,p.$

On

On a aussi $dy = p\,dx$ & $y = px - \int x\,dp = px - c1\,p + \frac{a1}{4} A \text{ tang. } p - \frac{b1}{8} \log. (1 + p^2) - \frac{b1}{4} (p\,A \text{ tang. } p - \frac{1}{2} \log. (1 + p^2))$, car $\int dp\,A \text{ tang. } p$ ou $\int dp \int \frac{dp}{1+p^2} = p \int \frac{dp}{1+p^2} - \int \frac{p\,dp}{1+p^2} = p\,A \text{ tang. } p - \frac{1}{2} \log. (1 + p^2)$.

Ainsi $x = c1 - \frac{a1 - b1\,p}{4(1+p^2)} + \frac{b1}{4} A \text{ tang. } p$

& $y = d1 - \frac{a1\,p - b1\,p^2}{4(1+p^2)} + \frac{a1}{4} A \text{ tang. } p$;

avec ces deux équations j'élimine A tang. p, & il me vient en mettant $a2$ pour $a1\,c1 - b1\,d1$, $\frac{(a1 - b1\,p)^2}{4(1+p^2)} = a2 - a1\,x + b1\,y$.

A p je substitue sa valeur $\frac{dy}{dx}$, & je nomme s l'arc AM de la courbe cherchée; par-là je change l'équation précédente en celle-ci : $ds = \frac{a1\,dx - b1\,dy}{2\sqrt{(a2 - a1\,x + b1\,y)}}$, d'où je tire aisément $s = e1 - \sqrt{(a2 - a1\,x + b1\,y)}$. J'ai démontré (n°. 186) que cette équation étoit celle d'une cycloïde; de plus, les quatre constantes arbitraires à déterminer exigent que la courbe passe par quatre points donnés; ainsi entre toutes les courbes qui peuvent passer par quatre points, la cycloïde est la seule qui satisfasse au problême proposé.

(340). Dans le problême des isopérimètres, proposé aux géomètres par Jacques Bernoulli en 1697, on suppose que des courbes ont entr'elles quelques propriétés communes, & on demande de trouver celle de ces courbes pour laquelle une certaine formule intégrale soit un plus grand ou un moindre. Par exemple, la propriété commune à toutes ces courbes est que la formule intégrale $\int \lambda\,dx$ soit une quantité constante, & on propose de trouver entr'elles celle pour laquelle la formule intégrale $\int \zeta\,dx$ soit un plus grand ou un moindre. On a les deux équations $\delta \int \zeta\,dx = 0$ & $\delta \int \lambda\,dx = 0$; or, si pour abréger nous ne supposons que deux variables y & x, nous pourrons représenter ces deux équations par

$$\&c. + {}'\Pi\,d'y + \Pi\,dy + \Pi'\,dy' + \&c. = 0, \&$$
$$\&c. + {}'\Sigma\,d'y + \Sigma\,dy + \Sigma'\,dy' + \&c. = 0.$$

Ces deux équations doivent être combinées l'une avec l'autre ; pour cela je multiplie la première par σ, & je l'ajoute ensuite à la seconde, ce qui donne

$$\&c. + (\sigma\,{}'\Pi + {}'\Sigma) \cdot d'y + (\sigma\,\Pi + \Sigma) \cdot dy + (\sigma\,\Pi' + \Sigma') \cdot dy' + \&c. = 0.$$

Maintenant je puis égaler à zéro le co-efficient de chaque dy, mais n'ayant d'inconnues que σ, je ne prendrai, pour déterminer la nature de la courbe

cherchée, que les deux équations $\sigma \Pi + \Sigma = 0$, $\sigma \Pi' + \Sigma' = 0$; d'où je tire $\frac{\Sigma'}{\Sigma} = \frac{\Pi'}{\Pi}$, ou $\frac{d\Sigma}{\Sigma} = \frac{d\Pi}{\Pi}$, & par conséquent $a\,l\,\Sigma = \Pi$ qui est l'équation de la courbe cherchée. Si on suppose que les courbes en question ont encore pour propriété commune que la formule intégrale $\int \mu\, dx$ soit une quantité constante; on aura les trois équations

$$\delta \int \zeta\, dx = 0,\ \delta \int \lambda\, dx = 0,\ \delta \int \mu\, dx = 0,$$

qu'on représentera par ces trois-ci :

$$\&c. + {'\Pi}\, d\,{'y} + \Pi\, dy + \Pi'\, dy' + \&c. = 0,$$
$$\&c. + {'\Sigma}\, d\,{'y} + \Sigma\, dy + \Sigma'\, dy' + \&c. = 0,$$
$$\&c. + {'T}\, d\,{'y} + T\, dy + T\, dy' + \&c. = 0.$$

Ayant multiplié la première par σ, la seconde par τ, on les ajoutera à la troisième, ce qui donnera

$$\&c. + (\sigma' \Pi + \tau' \Sigma + {'T}) \cdot d'y + (\sigma \Pi + \tau \Sigma + T) \cdot dy + (\sigma \Pi' + \tau \Sigma' + T')\, dy' + \&c. = 0.$$

On formera ensuite les trois équations

$$\sigma' \Pi + \tau' \Sigma + {'T} = 0,\ \sigma \Pi + \tau \Sigma + T = 0,\ \sigma \Pi' + \tau \Sigma' + T' = 0;$$

d'où l'on tirera, en éliminant σ & τ,

$$\left(\frac{\Sigma'}{\Pi'} - \frac{\Sigma}{\Pi}\right)\left(\frac{T}{\Pi} - \frac{'T}{'\Pi}\right) = \left(\frac{\Sigma}{\Pi} - \frac{'\Sigma}{'\Pi}\right)\left(\frac{T'}{\Pi'} - \frac{T}{\Pi}\right),$$ ou

$d\left(\frac{\Sigma}{\Pi}\right) d^2\left(\frac{T}{\Pi}\right) = d\left(\frac{T}{\Pi}\right) d^2\left(\frac{\Sigma}{\Pi}\right)$; en intégrant on trouvera $d\left(\frac{T}{\Pi}\right) = a\,l\,d\left(\frac{\Sigma}{\Pi}\right)$, & $\frac{T}{\Pi} = b\,l + a\,l\,\frac{\Sigma}{\Pi}$.

Sans pousser plus loin ces calculs, je crois qu'on peut regarder comme démontrée la règle générale que voici pour résoudre toutes les questions relatives au problême des isopérimétres. On cherchera, par les méthodes données précédemment, pour chacune des propriétés, le co-efficient qu'on égaleroit à zéro si cette propriété seule avoit lieu; puis ayant multiplié tous ces co-efficiens moins un, chacun par une quantité constante, on en fera une somme, qui, égalée à zéro, fera l'équation de la courbe cherchée. Cette formule paroîtra bien plus simple encore, lorsque nous en aurons fait usage pour résoudre quelques problêmes particuliers.

(341). On demande de trouver, entre toutes les courbes de même longueur, celle qui dans sa revolution autour de l'axe AC (*fig.* LIV), decrit la surface qui soit un plus grand ou un moindre. La propriété commune à toutes ces courbes est qu'elles doivent être de même longueur; on a donc $\delta \int dx \sqrt{(1 + p^2)} = 0$; & pour le co-efficient qu'on égaleroit à zéro si cette propriété seule avoit lieu, $d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)$. [illegible] la courbe cherchée doit

décrire, dans sa révolution autour de l'axe AC, une surface qui soit un plus grand ou un moindre: on a donc aussi $\delta \int y\, dx \sqrt{(1+p^2)} = 0$; & pour le co-efficient qu'on égaleroit à zéro si cette seule propriété avoit lieu,

$dx\sqrt{(1+p^2)} - d\left(\frac{py}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)$. Donc

$$a1\, d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) + dx\sqrt{(1+p^2)} - d\left(\frac{py}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) = 0$$

est l'équation demandée. Je donne à cette équation la forme suivante

$$(a1 - y)\, d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) - \frac{p\,dy}{\sqrt{(1+p^2)}} + dx\sqrt{(1+p^2)} = 0,$$

& elle devient, en mettant $p\,dx$ pour dy,

$$(a1 - y)\, d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) + \frac{dx}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0.$$

On en tire, en multipliant par p, & mettant dans le second terme dy pour $p\,dx$;

$$p\sqrt{(1+p^2)}\, d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) + \frac{dy}{a1-y} = 0.$$

Pour intégrer le premier terme, je fais $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = u$, & j'ai

$$p\sqrt{(1+p^2)}\, d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) = \frac{u\,du}{1-u^2},$$

dont l'intégrale est $-\frac{1}{2}\log.(1-u^2)$. Donc $(1-u^2)(a1-y) = b1$;

d'où l'on tire $\frac{b1}{1-u^2} = a1 - y$, ou $b1\sqrt{(1+p^2)} = a1 - y$.

Cette équation donne $dx = \frac{b1\,dy}{\sqrt{(a1-y)^2 - b1^2}}$ qui est celle de la chaînette ou catenaire (n°. 216).

(342). Nous nous proposerons pour second problême de trouver entre toutes les courbes qui répondent à la même abscisse BC (*fig. LXX*), & qui étant de même longueur, renferment des espaces égaux ABD, celle qui dans sa révolution autour de l'axe BC engendrera le solide de plus grand ou de moindre volume. En nommant BP, x, PM, y, on exprimera les propriétés qui sont communes à toutes ces courbes par les deux équations $\delta \int y\,dx = 0$ & $\delta \int dx\sqrt{(1+p^2)} = 0$; on a aussi $\delta \int y^2 dx = 0$. Les co-efficiens qu'on égaleroit à zéro, si chacune de ces propriétés avoit lieu seule, sont dx, $d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)$ & $2y\,dx$; on formera donc l'équation

$d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) = b1\,dx + 2a1\,y\,dx$, qui étant multipliée par p, devient $p\,d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) = b1\,dy + 2a1\,y\,dy$.

En supposant $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = u$, on a $p\,d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) = \frac{u\,du}{\sqrt{(1-u^2)}}$; & pour

l'intégrale du premier membre de notre équation $-\sqrt{(1-u^2)} = \frac{-1}{\sqrt{(1+p^2)}}$.
Donc $\frac{\mp 1}{\sqrt{(1+p^2)}} = c1 + b1y + a1y^2$, & $p = \frac{\sqrt{[1-(c1+b1y+a1y^2)^2]}}{c1+b1y+a1y^2}$;
d'où l'on tire $dx = \frac{(c1+b1y+a1y^2)dy}{\sqrt{[1-(c1+b1y+a1y^2)^2]}}$; à cause de l'ambiguité des signes qui précèdent nécessairement le radical, on aura les deux courbes, dont l'une convient au *maximum* & l'autre au *minimum*. Ces courbes sont celles auxquelles on a donné le nom de courbes élastiques (n°. 218).

(343). Toutes ces questions de *maximis* & *minimis* se réduisent à trouver la variation d'une formule intégrale telle que $\int \zeta\, dx$. Pour généraliser ce problême, nous supposerons que ζ, outre les quantités y, x, p, q, &c. renferme encore une formule intégrale $\int V dx$, V étant une fonction des mêmes quantités y, x, p, q, &c. Nous ferons $\delta\zeta = L\delta\int V dx + \delta K$, δK étant égal à $M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q +$ &c. & $\delta V = M1\delta x + N1\delta y + P1\delta p + Q1\delta q +$ &c.
Cela posé, à cause de $\delta\int\zeta dx = \zeta\delta x + \int(dx\delta\zeta - d\zeta\delta x)$, nous trouverons, en faisant attention que $d\zeta = LVdx + dK$,
$\delta\int\zeta dx = \zeta\delta x + \int(Ldx\delta\int Vdx + dx\delta K - dK\delta x - Ldx \cdot V\delta x)$.
Mais $\delta\int Vdx = V\delta x + \int(dx\delta V - dV\delta x)$; en substituant cette valeur, il vient, $\delta\int\zeta dx = \zeta\delta x + \int(Ldx\int[dx\delta V - dV\delta x] + dx\delta K - dK\delta x)$.
Nous changerons $\int(Ldx\int[dx\delta V - dV\delta x]$ en
$\int Ldx \cdot \int[dx\delta V - dV\delta x] - \int(\int Ldx \cdot [dx\delta V - dV\delta x])$;
or si nous nommons (L) ce que devient l'intégrale $\int Ldx$ (prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $x = a$ & $y = b$) lorsqu'on fait $x = f$ & $y = g$, (L) sera une quantité constante, & au lieu de $\int Ldx \cdot \int[dx\delta V - dV\delta x]$ nous pourrons écrire $\int((L)[dx\delta V - dV\delta x])$.
Donc $\int(Ldx\int[dx\delta V - dV\delta x]) = \int([(L) - \int Ldx][dx\delta V - dV\delta x])$.
Nous mettrons cette valeur dans l'expression de $\delta\int\zeta dx$, &, après avoir fait pour abréger $(L) - \int Ldx = \mu$, nous aurons
$\delta\int\zeta dx = \zeta\delta x + \int(\mu[dx\delta V - dV\delta x] + dx\delta K - dK\delta x)$.
Mais on verra aisément que

$$\begin{aligned}\int(dx\delta K - dK\delta x) = \int\Big[\Big(N - \tfrac{1}{dx}dP + \tfrac{1}{dx}d\Big(\tfrac{1}{dx}dQ\Big) - \\ \tfrac{1}{dx}d\Big(\tfrac{1}{dx}d\Big(\tfrac{1}{dx}dR\Big)\Big) + \&c.\Big)dx\,\mathrm{d}y + \&c.\Big] \\ + \Big(P - \tfrac{1}{dx}dQ + \tfrac{1}{dx}d\Big(\tfrac{1}{dx}dR\Big) - \&c.\Big)\mathrm{d}y + \&c. \\ + \Big(Q - \tfrac{1}{dx}dR + \&c.\Big)\tfrac{1}{dx}d\mathrm{d}y + \&c. \\ + (R - \&c.)\tfrac{1}{dx}d\Big(\tfrac{1}{dx}d\mathrm{d}y\Big) + \&c. + \&c.\end{aligned}$$

Il

Il ne sera pas plus difficile de voir que

$$\int(\mu[dx\delta V - dV\delta x]) = \int\Big[\Big(\mu N1 - \frac{1}{dx}d\cdot\mu P1 + \frac{1}{dx}d\Big(\frac{1}{dx}d\cdot\mu Q1\Big) -$$
$$\frac{1}{dx}d\Big(\frac{1}{dx}d\frac{1}{dx}d\cdot\mu R1\Big)\Big) + \&c.\Big)dx\,dy + \&c.\Big]$$
$$+ \Big(\mu P1 - \frac{1}{dx}d\cdot\mu Q1 + \frac{1}{dx}d\Big(\frac{1}{dx}d\cdot\mu R1\Big) - \&c.\Big)dy + \&c.$$
$$+ \Big(\mu Q1 - \frac{1}{dx}d\cdot\mu R1 + \&c.\Big)\frac{1}{dx}ddy + \&c.$$
$$+ \Big(\mu R1 - \&c.\Big)\frac{1}{dx}d\Big(\frac{1}{dx}ddy\Big) + \&c. + \&c.$$

C'est pourquoi si l'on fait pour abréger $N + \mu N1 = N(1)$, $P + \mu P1 = P(1)$, &c. on aura la variation de $\int\zeta dx$ par cette équation

$$\delta\int\zeta dx = \text{constante} + \int\Big[\Big(N(1) - \frac{1}{dx}dP(1) + \frac{1}{dx}d\Big(\frac{1}{dx}dQ(1)\Big) -$$
$$\frac{1}{dx}d\Big(\frac{1}{dx}d\Big(\frac{1}{dx}dR(1)\Big)\Big) + \&c.\Big)dx\,dy + \&c.\Big]$$
$$+ \zeta\delta x + \Big(P(1) - \frac{1}{dx}dQ(1) + \frac{1}{dx}d\Big(\frac{1}{dx}dR(1)\Big) - \&c.\Big)dy + \&c.$$
$$+ \Big(Q(1) - \frac{1}{dx}dR(1) + \&c.\Big)\frac{1}{dx}ddy + \&c.$$
$$+ \Big(R(1) - \&c.\Big)\frac{1}{dx}d\Big(\frac{1}{dx}ddy\Big) + \&c. + \&c.,$$

qui est précisément de la même forme que celle que nous avons trouvée lorsque ζ ne renfermoit point la formule intégrale $\int V dx$.

(344). Je supposerai que V lui-même renferme la formule intégrale $\int U dx$; par U j'entends une fonction de y, x, p, &c. telle que

$$\delta U = M2\delta x + N2\delta y + P2\delta p + Q2\delta q + \&c.;$$

& je ferai $\delta V = L1\delta\int U dx + \delta K1$, $\delta K1$ étant égal à

$$M1\delta x + N1\delta y + P1\delta p + Q1\delta q + \&c.$$

Maintenant, à cause de $dV = L1 U dx + dK1$, cette expression $dx\delta V - dV\delta x$ deviendra $L1 dx\delta\int U dx + dx\delta K1 - dK1\delta x - L1 dx\cdot U\delta x$. Mais $\delta\int U dx = U\delta x + \int(dx\delta U - dU\delta x)$; donc $dx\delta V - dV\delta x = L1 dx\int[dx\delta U - dU\delta x] + dx\delta K1 - dK1\delta x$; & substituant cette valeur dans l'équation

$$\delta\int\zeta dx = \zeta\delta x + \int(\mu[dx\delta V - dV\delta x] + dx\delta K - dK\delta x),$$

j'aurai $\delta\int\zeta dx = \zeta\delta x + \int(\mu L1 dx\int[dx\delta U - dU\delta x] + \mu[dx\delta K1 - dK1\delta x] + dx\delta K - dK\delta x)$.

Je transformerai $\int(\mu L 1 dx \int[dx\delta U - dU\delta x])$ en

$\int \mu L 1 dx \cdot \int[dx\delta U - dU\delta x] - \int(\int \mu L 1 dx \cdot [dx\delta U - dU\delta x])$,

qui devient, en nommant $(\mu L 1)$ cette intégrale $\int \mu L 1 dx$ prise comme nous avons fait plus haut celle-ci $\int l\, dx$, qui devient, dis-je,

$$\int([(\mu L 1) - \int \mu L 1 dx][dx\delta U - dU\delta x]).$$

Je mettrai ces valeurs dans l'expression de $\delta\int \zeta dx$, &, après avoir fait pour abréger $(\mu L 1) - \int \mu L 1 dx = \mu 1$, j'aurai

$\delta\int \zeta dx = \zeta\delta x + \int(\mu 1[dx\delta U - dU\delta x] + \mu[dx\delta K 1 - dK 1\delta x] + dx\delta K - dK\delta x)$.

Donc, en faisant encore pour abréger

$N + \mu N 1 + \mu 1 N 2 = N(2)$, $P + \mu P 1 + \mu 1 P 2 = P(2)$, &c.

on aura

$$\delta\int \zeta dx = \text{constante} + \int\Big[\Big(N(2) - \frac{1}{dx} dP(2) + \frac{1}{dx} d\Big(\frac{1}{dx} dQ(2)\Big) - \frac{1}{dx} d\Big(\frac{1}{dx} d\Big(\frac{1}{dx} dR(2)\Big)\Big) + \&c.\Big) dx\, dy + \&c.\Big]$$

$$+ \zeta\delta x + \Big(P(2) - \frac{1}{dx} dQ(2) + \frac{1}{dx} d\Big(\frac{1}{dx} dR(2)\Big) - \&c.\Big) dy + \&c.$$

$$+ \Big(Q(2) - \frac{1}{dx} dR(2) + \&c.\Big) \frac{1}{dx} ddy + \&c.$$

$$+ \Big(R(2) - \&c.\Big) \frac{1}{dx} d\Big(\frac{1}{dx} ddy\Big) + \&c. + \&c. \&c.$$

(345). On demande la variation de $\int \zeta dx$, en supposant que ζ, outre y, x, p, q, &c. renferme une quantité θ qui n'est donnée que par une équation de cette forme $d\theta = \varpi dx$, par ϖ on entend une fonction de y, x, p, q, &c. & de θ. On a $\theta = \int \varpi dx$; or si l'on représente par $\int \Pi dx$ la formule intégrale indéfinie qui entre dans l'expression de θ, & si l'on suppose $\delta\zeta = L\delta\int \Pi dx + \delta K$, δK étant égal à $M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q +$ &c. on aura

$\delta\int \zeta dx\, (= \zeta\delta x + \int(dx\delta\zeta - d\zeta\delta x)) = \zeta\delta x + \int(L dx\delta\int \Pi dx + dx\delta K - dK\delta x - L\Pi dx\delta x)$.

Mais $\delta\int \Pi dx = \Pi\delta x + \int(dx\delta\Pi - d\Pi\delta x)$;

donc $\delta\int \zeta dx = \zeta\delta x + \int(L dx \int[dx\delta\Pi - d\Pi\delta x] + dx\delta K - dK\delta x)$.

A cause que Π doit renfermer $\int \Pi dx$, je supposerai $\delta\Pi = L 1 \delta\int \Pi dx + \delta K 1$, $\delta K 1$ étant égal à $M 1 \delta x + N 1 \delta y + P 1 \delta p + Q 1 \delta q +$ &c. & j'aurai

$dx\delta\Pi - d\Pi\delta x = L 1 dx\, (\delta\int \Pi dx - \Pi\delta x) + dx\delta K 1 - dK 1\delta x$,

qui devient, en mettant pour $\delta\int \Pi dx$ sa valeur,

$dx\delta\Pi - d\Pi\delta x = L 1 dx \int[dx\delta\Pi - d\Pi\delta x] + dx\delta K 1 - dK 1\delta x$.

Or si je fais $\int[dx\delta\Pi - d\Pi\delta x] = \varpi$, j'aurai $dx\delta\Pi - d\Pi\delta x = d\varpi$, & l'équation $d\varpi - L 1 \varpi dx = dx\delta K 1 - dK 1\delta x$;

d'où l'on tire ϖ ou

$\int[dx\delta\Pi - d\Pi\delta x] = e^{\int L1dx}(\text{conft.} + \int e^{-\int L1dx}[dx\delta K1 - dK1\delta x])$.

Donc $\delta\int\zeta dx = \zeta\delta x + \int[Ldx\, e^{\int L1dx}(\text{conft.} + \int e^{-\int L1dx}[dx\delta K1 - dK1\delta x]) + dx\delta K - dK\delta x]$.

Je transformerai la formule intégrale

$\int(Ldx\, e^{\int L1dx}\int e^{-\int L1dx}[dx\delta K1 - dK1\delta x])$

en celle-ci :

$\int e^{\int L1dx}Ldx \cdot \int e^{-\int L1dx}[dx\delta K1 - dK1\delta x] - \int(\int e^{\int L1dx}Ldx \cdot e^{-\int L1dx}[dx\delta K1 - dK1\delta x])$;

ou, nommant H ce que devient l'intégrale $\int e^{\int L1dx}Ldx$ (prife de manière qu'elle foit nulle lorfque $x = a$ & $y = b$) lorfqu'on fait $x = f$ & $y = g$, je transmerai cette même formule intégrale en celle-ci :

$\int([H - \int e^{\int L1dx}Ldx] \cdot e^{-\int L1dx}[dx\delta K1 - dK1\delta x])$.

En mettant cette valeur dans l'expreffion de $\delta\int\zeta dx$, & faifant pour abréger $e^{-\int L1dx}[H - \int e^{\int L1dx}Ldx] = \mu$, il viendra

$\delta\int\zeta dx = \text{conft.} + \zeta\delta x + \int(\mu[dx\delta K1 - dK1\delta x] + dx\delta K - dK\delta x)$.

On fuppofera que δK & $\delta K1$ contiennent, l'un $A\delta a + B\delta b +$ &c., l'autre $A1\delta a + B1\delta b +$ &c.; & on fera

$N + \mu N1 = N(1)$, $P + \mu P1 = P(1)$, &c. $A + \mu A1 = A(1)$, &c.

Cela pofé, fi $\int\zeta dx$ doit être un plus grand ou un moindre, on trouvera, en raifonnant comme nous avons fait (n°. 327), premiérement l'équation

$$(\Psi) \ldots\ldots\ \left(N(1) - \frac{1}{dx}dP(1) + \frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}dQ(1)\right) - \frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}dR(1)\right)\right) + \text{\&c.}\right)dy + \text{\&c.} = 0,$$

qui fervira à déterminer la nature de la courbe pour laquelle $\int\zeta dx$ eft un plus grand ou un moindre; fecondement, ces deux fuites d'équations déterminées, dont les unes appartiennent aux premiers points, & les autres aux derniers points de la courbe en queftion.

$$(a) \ldots\ldots\ [(\zeta) - (A(1))]\delta a + [(P(1)) - \frac{1}{da}d(Q(1)) + \frac{1}{da}d\left(\frac{1}{da}d(R(1))\right) - \text{\&c.}]\,\mathrm{d}b - (B(1))\delta b + \text{\&c.} = 0,$$

$$(b) \ldots\ldots\ [(Q(1)) - \frac{1}{da}d(R(1)) + \text{\&c.}]\frac{1}{da}d\mathrm{d}b - (B'(1))\delta b' + \text{\&c.} = 0,$$

$$(c) \ldots\ldots\ [(R(1)) - \text{\&c.}]\frac{1}{da}d\left(\frac{1}{da}d\mathrm{d}b\right) - (B'')\delta b'' + \text{\&c.} = 0, \text{\&c.};$$

$(a') \ldots\ldots [[\mathfrak{C}] + (F(1))]\delta f + [[P(1)] - \frac{1}{df} d[Q(1)] +$

$(b') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [[Q(1)] - \frac{1}{df} d[R(1)] +$

$(c') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [[R(1)] - \&c.] \frac{1}{df} d\left(\frac{1}{df} ddg\right)$

$\frac{1}{df} d\left(\frac{1}{df} d[R(1)]\right) - \&c.] dg + (G(1))\delta g + \&c. = 0,$

$\&c.] \frac{1}{df} ddg + (G'(1))\delta g' + \&c. = 0,$

$+ (G''(1))\delta g'' + \&c. = 0, \&c.$

Nous allons faire usage de ces équations pour résoudre deux problêmes qui méritent attention.

(346). On demande de trouver la courbe de la plus vîte descente dans un milieu qui résiste comme une fonction quelconque de la vitesse. On aura, en nommant y une ordonnée à un point quelconque de la courbe, l'abscisse correspondante, x, la vîtesse au même point, u, V cette fonction de la vîtesse à laquelle la résistance est proportionnelle, & supposant la gravité $= 1$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} [= dx \sqrt{(1+p^2)}] = ds$; on aura, dis-je, comme nous l'avons démontré (n°. 298) $u\,du = dx - V\,ds$. Je fais $\frac{u^2}{2} = \theta$, & par conséquent $u = \sqrt{2\theta}$; ainsi la formule intégrale $\int \frac{ds}{u}$, qui doit être un *minimum*, deviendra $\int \frac{dx \sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{\theta}}$, & θ sera donné par l'équation $d\theta = dx - V\,dx \sqrt{(1+p^2)}$, d'où l'on tirera

$$\theta = \text{constante} + x - \int V\,dx \sqrt{(1+p^2)}.$$

Donc $\mathfrak{C} = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{\theta}}$, $L = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{2\theta\sqrt{\theta}}$, $M = -\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{2\theta\sqrt{\theta}}$, $N = 0$; $P = \frac{p}{\sqrt{\theta}\sqrt{(1+p^2)}}$, $\Pi = V\sqrt{(1+p^2)}$; & supposant $dV = V'\,du = V'\frac{d\theta}{u}$, $L1 = -\frac{V'}{u}\sqrt{(1+p^2)}$, $M1 = \frac{V'}{u}\sqrt{(1+p^2)}$, $N1 = 0$, $P1 = \frac{V'p}{\sqrt{(1+p^2)}}$. Il nous faut trouver μ; or $L\,dx = \frac{ds}{2\theta\sqrt{\theta}}$, $L1\,dx = -\frac{V'ds}{u}$, $\int e^{\int L1 dx} L\,dx = \int e^{-\int \frac{V'ds}{u}} \cdot \frac{ds}{2\theta\sqrt{\theta}}$; donc en prenant cette intégrale de manière qu'elle soit nulle lorsque $x = a$ & $y = b$, puis faisant $x = f$ & $y = g$, on aura H, & par conséquent

$$\mu = e^{\int \frac{V'ds}{u}} \left(H - \int e^{-\int \frac{V'ds}{u}} \frac{ds}{2\theta\sqrt{\theta}}\right).$$

L'équation

L'équation ✠ devient $DP(1) = 0$, ou $d(P + \mu P1) = 0$, d'où l'on tire $P + \mu P1 = a1$, & $\mu = \frac{a1 - P}{P1} = \frac{a1\sqrt{\theta}\sqrt{(1+p^2)} - p}{Vp\sqrt{\theta}}$.

En différentiant on tire de cette équation

$$d\mu = \frac{\frac{Vp^2\,d\theta}{2\sqrt{\theta}} - \frac{a1\,V\theta\,dp}{\sqrt{(1+p^2)}} - (a1\sqrt{\theta}\sqrt{(1+p^2)} - p)\frac{V'p\,d\theta}{\sqrt{2}}}{V^2p^2\theta}.$$

On tire aussi de la première valeur de μ, $d\mu = \frac{\mu V'ds}{\sqrt{2\theta}} - \frac{ds}{2\theta\sqrt{\theta}}$; & mettant pour μ sa seconde valeur, $d\mu = \frac{(a1\sqrt{\theta}\sqrt{[1+p^2]} - p)V'ds}{Vp\theta\sqrt{2}} - \frac{ds}{2\theta\sqrt{\theta}}$.

En mettant dans la première valeur de $d\mu$ pour $d\theta$ ceci $dx - Vds$, on a

$$d\mu = \frac{(a1\sqrt{\theta}\sqrt{[1+p^2]} - p)V'ds}{Vp\theta\sqrt{2}} - \frac{ds}{2\theta\sqrt{\theta}} - \frac{(a1\sqrt{\theta}\sqrt{[1+p^2]} - p)V'dx}{V^2p\theta\sqrt{2}} - \frac{a1\,dp}{Vp^2\sqrt{(1+p^2)}} + \frac{dx}{2V\theta\sqrt{\theta}};$$

d'où l'on voit clairement que

$$-\frac{a1\,dp}{p^2} = \frac{(a1\sqrt{\theta}\sqrt{[1+p^2]} - p)V'ds}{Vp\theta\sqrt{2}} - \frac{ds}{2\theta\sqrt{\theta}} = d\mu,$$

& que par conséquent $\mu = \frac{a1}{p} + b1$. Donc

$$a1\sqrt{\theta}\sqrt{(1+p^2)} - p = V\sqrt{\theta}(a1 + b1p);$$

cette équation & la précédente qu'on peut changer en celle-ci

$$\frac{a1\,dp}{p^2} = \frac{ds}{2\theta\sqrt{\theta}} - \frac{V'ds}{\sqrt{2\theta}}\left(b1 + \frac{a1}{p}\right),$$

suffiront pour éliminer V, V' & θ; car par les conditions du problême V & V' doivent être données en fonctions de θ, & on aura de cette manière l'équation de la brachystochrone dans un milieu résistant, comme une fonction quelconque de la vîtesse. Si, par exemple, la résistance est nulle, V & V' sont chacun égal à zéro, & les équations précédentes deviennent $a1\sqrt{\theta} = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $\frac{a1\,dp}{p^2} = \frac{ds}{2\theta\sqrt{\theta}}$; d'où l'on tire $\frac{a^2 1\,ds}{2} = \frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ & $\frac{a^2 1\,s}{2} + b1 = \frac{-1}{\sqrt{(1+p^2)}}$. Je multiplie de part & d'autre par $dx\sqrt{(1+p^2)}$, ce qui me donne $\frac{a^2 s\,ds}{2} + b1\,ds = -dx$, & intégrant, $a^2 1 s^2 + b1s = c1 - x$; qui est l'équation de la cycloïde.

(347). Le problême seroit résolu si le premier & le dernier point de la brachystochrone étoient supposés fixes. Mais si le corps doit descendre dans le

moindre temps possible d'une courbe donnée à une autre courbe donnée, on aura, en remarquant qu'on peut supposer que C & Π ne renferment que a des co-ordonnées qui appartiennent au premier & au dernier point; on aura, dis-je, les deux équations

$$[(C)-(A(1))]\delta a+(P(1))db=0,\ \&\ [C]\delta f+[P(1)]dg=0,$$

qui deviennent, en mettant $\delta b-\frac{db}{da}\delta a$ & $\delta g-\frac{dg}{df}\delta g$ pour db & dg,

$$[(C)-\frac{db}{da}(P(1))-(A(1))]\delta a+(P(1))\delta b=0,\ \&$$

$$([C]-\frac{dg}{df}[P(1)])\delta f+[P(1)]\delta g=0.$$

Je ne m'occuperai que de la seconde équation qui est celle qui convient au dernier point de la courbe. A ce point $\mu=0$, car la supposition de $x=f$ & de $y=g$ rend $\int e^{-\int\frac{V'\,\delta s}{u}}\frac{ds}{2\theta\sqrt{\theta}}=H$; donc au même point $P(1)=P=\frac{p}{\sqrt{\theta}\sqrt{(1+p^2)}}$, & $C-pP(1)=C-pP=\frac{1}{\sqrt{\theta}\sqrt{(1+p^2)}}$. Donc en désignant par K ce que devient $\frac{1}{\sqrt{\theta}\sqrt{(1+p^2)}}$ au dernier point de la courbe, notre seconde équation se change en celle-ci $K\delta f+K\frac{dg}{df}\delta g=0$; d'où l'on tire $\frac{\delta g}{\delta f}=-\frac{df}{dg}$, & que quelle que soit la fonction de la vîtesse à laquelle la résistance est proportionnelle, la brachystochrone doit couper la courbe qui passe par son dernier point à angles droits. Je passe au second problême que je me suis proposé de résoudre.

(348). Le milieu résistant toujours comme une fonction V de la vîtesse, on demande la courbe le long de laquelle un corps doit descendre, pour avoir à chaque instant la plus grande vîtesse possible. On a l'équation $u\,du=dx-V\,dx\sqrt{(1+p^2)}$, d'où l'on tire en faisant $V\sqrt{(1+p^2)}=\Pi$, $\frac{u^2}{2}(=\theta)=$ const. $+x-\int\Pi\,dx$. Mais si u est un plus grand, u^2 en est un aussi; & le problême est reduit à trouver la variation de la formule intégrale $\int\Pi\,dx$, ou Π renferme une quantité θ donnée par l'équation $d\theta=dx-\Pi\,dx$.

On trouvera, en supposant $dV=V'\,du=V'\frac{d\theta}{u}$,

$$L=L1=-\frac{V'}{u}\sqrt{(1+p^2)},\ M=M1=\frac{V'}{u}\sqrt{(1+p^2)},\ N=N1=0,$$

$$P=P1=\frac{Vp}{\sqrt{(1+p^2)}},\ \mu=e^{\int\frac{V'\,\delta s}{u}}\left(H+\int e^{-\int\frac{V'\,\delta s}{u}}\frac{V'\,ds}{u}\right)=$$

$He^{\int\frac{V'\,\delta s}{u}}-1$. C'est pourquoi, à cause de $P+\mu P1=a1$, ou

aura $HVpe^{\int \frac{V'ds}{u}} = a1\sqrt{(1+p^2)}$, & en différentiant,

$$\frac{dp}{p(1+p^2)} + \frac{V'dx\sqrt{(1+p^2)}}{u} + \frac{V'd\theta}{uV} = 0.$$

On remarquera que $d\theta + Vdx\sqrt{(1+p^2)} = dx$, & on verra aisément que l'équation précédente se réduit à celle-ci : $\frac{dp}{p(1+p^2)} + \frac{V'dx}{uV} = 0$, d'où l'on tire $\frac{dV}{Vudu} = -\frac{dp}{pdx(1+p^2)}$; lorsque la courbe sera connue, cette équation nous donnera la vîtesse du corps à chaque instant. Je supposerai pour simplifier que la résistance du milieu est proportionnelle à au^{2n}, & que par conséquent $\frac{dV}{Vudu} = \frac{2n}{u^2} = \frac{n}{\theta}$; donc $\theta = -\frac{npdx(1+p^2)}{dp}$, &, en faisant $-ndx = tdp$, $\theta = tp(1+p^2)$, d'où $d\theta = p(1+p^2)dt + tdp(1+3p^2)$. L'équation $d\theta = dx(1 - a\theta^n\sqrt{(1+p^2)})$, devient

$d\theta = -\frac{tdp}{n} + \frac{a\theta^n tdp}{n}\sqrt{(1+p^2)}$; & mettant pour θ sa valeur,

$d\theta = -\frac{tdp}{n} + \frac{a}{n}t^{n+1}p^n(1+p^2)^{n+\frac{1}{2}}dp$. J'égalerai les deux valeurs de $d\theta$, & j'aurai $\frac{np(1+p^2)dt + tdp(1+n+3np^2)}{t^{n+1}p^{n+2}(1+p^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{adp}{p^2}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{t^n p^{n+1}(1+p^2)^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{a}{p} + a1$.

On tire aisément delà $\frac{1}{t^n} = p^n(1+p^2)^n \cdot \frac{a + a1p}{\sqrt{(1+p^2)}}$;

& par conséquent $t = \frac{1}{p(1+p^2)}\sqrt[n]{\left[\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{a+a1p}\right]}$, $\theta = \sqrt[n]{\left[\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{a+a1p}\right]}$.

Mais $dx = -\frac{tdp}{n}$, $dy = -\frac{tpdp}{n}$; donc $x = b1 - \int\frac{tdp}{n}$, $y = c1 - \int\frac{tpdp}{n}$; ces deux équations serviront à construire la courbe demandée. On remarquera que dp étant égal à $-\frac{npdx(1+p^2)}{\theta}$, il est nécessairement négatif, & que par conséquent la courbe doit être concave vers son axe; de plus si les valeurs de p vont toujours en décroissant depuis le premier point de la courbe, il faut qu'en ce point p ait sa plus grande valeur, & cette équation servira à déterminer une des constantes arbitraires.

(349). Le corps en descendant le long de la courbe AM (*fig. LXXII*), concave vers l'axe AP, la presse avec une force qui est la différence de la force centrifuge qu'a le corps à chaque instant, & d'une force normale que l'on trouve

en prenant fur la verticale MR une partie MR égale au poids du corps qui eft ici l'unité, & en décompofant cette force MR en deux autres KR & KM, dont l'une agit dans la direction de la tangente au point M, & l'autre perpendiculairement à cette tangente. A caufe des triangles femblables MKR, $m\mu M$, on a la force normale $MK = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}$. Pour comparer cette force à la force centrifuge $\frac{2\theta}{r}$ (n°. 213), on fe rappellera que la courbe étant concave vers fon axe, on a, en fuppofant dx conftant, $r = \frac{dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{-dp}$; donc la force centrifuge $= \frac{-2\theta dp}{dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2np}{\sqrt{(1+p^2)}}$, à caufe de $dp = -\frac{np\,dx(1+p^2)}{\theta}$. En la nommant F & la force normale f on aura $F : f :: 2n : 1$.

Si $n = \frac{1}{2}$, ou fi le milieu réfifte comme la viteffe, $F = f$; c'eft-à-dire, que dans cette hypothèfe la courbe ne fouffrira aucune preffion.

(350). On pourroit être curieux de favoir quelle eft cette courbe; à caufe de $t = \frac{1}{p(a+a1p)^2}$, on a $x = b1 - \int \frac{2dp}{p(a+a1p)^2}$, $y = c1 - \int \frac{2dp}{(a+a1p)^2}$.

1°. L'intégrale de $-\frac{2dp}{(a+a1p)^2} = \frac{2}{a1(a+a1p)}$;

2°. à caufe de $\frac{1}{p(a+a1p)^2} = \frac{1}{a^2 p} - \frac{a1}{a(a+a1p)^2} - \frac{a1}{a^2(a+a1p)}$,

$-\int \frac{2dp}{p(a+a1p)^2} = \frac{2}{a^2} \log. \frac{a+a1p}{p} - \frac{2}{a(a+a1p)}$.

Or fi l'on fuppofe l'origine des co-ordonnées au point A, comme à ce point p doit avoir fa plus grande valeur poffible, on déterminera les conftantes $b1$ & $c1$ de manière qu'en faifant x & y chacun égal à zéro, on ait p infini, ce qui donnera évidemment $b1 = -\log. a1$, & $c1 = 0$; donc

$x = \frac{2}{a^2} \log. \frac{a+a1p}{a1p} - \frac{2}{a(a+a1p)}$, & $y = \frac{2}{a1(a+a1p)}$.

En fubftituant dans la première équation pour p fa valeur tirée de la feconde, on a $x = -\frac{a1y}{a} + \frac{2}{a^2} \log. \frac{1}{1 - \frac{aa1}{2}y}$.

Mais dans l'hypothèfe préfente $\theta = \frac{1+p^2}{(a+a1p)^2}$; fuppofons qu'au point A, $\theta = b$, on aura, à caufe de $p = \frac{1}{0}$, $b = \frac{1}{a^2 1}$ & $a1 = \frac{1}{\sqrt{b}}$;

donc $x = -\frac{y}{a\sqrt{b}} + \frac{2}{a^2} \log. \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \frac{ay}{2}}$ eft l'équation de la courbe cherchée qu'on conftruira facilement en faifant ufages des logarithmes.

L'équation

L'équation $(h^2 \pm 4gx)\,d^2y \pm 2g\,dx\,dy = i\,ds\,dx$ (nº. 215) a pour intégrale complète $dy\sqrt{h^2 \pm 4gx} + n\,ds = \pm \frac{i\,ds}{2g}\sqrt{h^2 \pm 4gx}$, de laquelle on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm \frac{i}{2g}\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n}{h^2 \pm 4gx - (\pm \frac{i}{2g}\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{2g \mp i}{2g}\sqrt{h^2 \pm 4gx} + n} - \frac{1}{\frac{2g \pm i}{2g}\sqrt{h^2 \pm 4gx} - n}\right]$$

qu'on construira comme la précédente en faisant usage des logarithmes.

(351). Le problême de ce genre le plus général que l'on puisse proposer, & qui renferme tous les précédens, consiste à trouver la variation d'une fonction π qui n'est donnée que par une équation différentielle d'un ordre quelconque $\Pi = 0$ entre y x, &c. p, q, &c. & π, $\frac{d\pi}{dx} = \pi'$, $\frac{d\pi'}{dx} = \pi''$, &c. On aura $\delta\Pi = 0$; & il ne s'agira plus que de tirer de cette équation la valeur de $\delta\pi$. Soit

$$\delta\Pi = A\delta\pi + B\delta\pi' + C\delta\pi'' + \text{\&c.} + M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \text{\&c. \&c.};$$

en conservant à la caractéristique d la même signification que dans les articles qui précèdent, on aura

$$dx\delta y = dx\,\mathrm{d}y + dy\,\delta x,\ dx\delta p = d\mathrm{d}y + dp\,\delta x,\ dx\delta q = d\left(\frac{1}{dx}d\mathrm{d}y\right) + dq\,\delta x,\ \text{\&c.},\ dx\delta\pi = dx\,\mathrm{d}\pi + d\pi\,\delta x,\ dx\delta\pi' = d\mathrm{d}\pi + d\pi'\,\delta x,$$
$$dx\delta\pi'' = d\left(\frac{1}{dx}\,d\mathrm{d}\pi\right) + d\pi''\,\delta x,\ \text{\&c.};$$

& par conséquent

$$A\,dx\,\mathrm{d}\pi + B\,d\mathrm{d}\pi + C\,d\left(\frac{1}{dx}\,d\mathrm{d}\pi\right) + \text{\&c.} + N\,dx\,\mathrm{d}y + P\,d\mathrm{d}y + Q\,d\left(\frac{1}{dx}\,d\mathrm{d}y\right) + \text{\&c. \&c.} = 0.$$

Je multiplie cette équation par un facteur ψ, & en intégrant je trouve

$$\int A\psi\,dx\,\mathrm{d}\pi + \int B\psi\,d\mathrm{d}\pi + \int C\psi\,d\left(\frac{1}{dx}\,d\mathrm{d}\pi\right) + \text{\&c.} + \int N\psi\,dx\,\mathrm{d}y + \int P\psi\,d\mathrm{d}y + \int Q\psi\,d\left(\frac{1}{dx}\,d\mathrm{d}y\right) + \text{\&c. \&c.} = \text{constante},$$

équation que je transformerai facilement en celle-ci :

$$\int\left(A\psi - \frac{1}{dx}d\cdot B\psi + \frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d\cdot C\psi\right) - \&c.\right)dx\,d\pi$$
$$+\left(B\psi - \frac{1}{dx}d\cdot C\psi + \&c.\right)d\pi$$
$$+\left(C\psi - \&c.\right)\frac{1}{dx}dd\pi + \&c.$$
$$= \text{conftante} -$$
$$(\Delta)\ldots\ldots\int\left(N\psi - \frac{1}{dx}d\cdot P\psi + \frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d\cdot Q\psi\right) - \&c.\right)dx\,dy\ \&c.$$
$$+\left(P\psi - \frac{1}{dx}d\cdot Q\psi + \&c.\right)dy\ \&c.$$
$$+\left(Q\psi - \&c.\right)\frac{1}{dx}ddy\ \&c.$$
$$+ \&c.\ \&c.$$

Je ferai (A) $\ldots\ldots A\psi - \frac{1}{dx}d\cdot B\psi + \frac{1}{dx}d\left(\frac{1}{dx}d\cdot C\psi\right) - \&c. = 0$,

& cette équation fervira à déterminer ψ; on aura pour trouver $d\pi$ cette autre équation :

$$(B)\ldots\ (B\psi - \frac{1}{dx}d\cdot C\psi + \&c.)d\pi + (C\psi - \&c.)\frac{1}{dx}dd\pi + \&c. = \text{conft.} - \Delta.$$

On remarquera que s'il étoit poffible de trouver au moyen de l'équation A la valeur complète du facteur ψ; comme cette valeur complète renfermeroit néceffairement autant de conftantes arbitraires qu'il y a de lettres A, B, &c. moins une, on auroit autant de valeurs particulières de ψ que de quantités $d\pi$, $dd\pi$, &c. En fubftituant ces valeurs fucceffivement dans l'équation B, on auroit autant d'équations que de quantités $d\pi$, $dd\pi$, &c. & par l'élimination on pourroit trouver $d\pi$.

(352). On propofe, par exemple, de trouver la variation de $\int \zeta dx$, ζ étant donné par l'équation $d\zeta + K\,dx = 0$, où K renferme ζ & y, x, &c., p, q, &c. On fera $\int \zeta dx = \pi$, d'où l'on tirera $\zeta = \pi'$ & $\pi'' + K = \Pi$. Comme K ne renfermera que π', on aura $A = 0$, $C = 1$, D & les fuivantes chacune égale à zéro; & ψ fera donné par l'équation $-d.B\psi + d\left(\frac{1}{dx}d.\psi\right) = 0$,

d'où l'on tire $d\psi - B\psi\,dx = a\,dx$, & en intégrant une feconde fois $\psi = e^{\int Bdx}(b + \int e^{-\int Bdx}a\,dx)$. A caufe des deux conftantes arbitraires, j'ai deux valeurs particulières de ψ, favoir $\psi 1 = e^{\int Bdx}$, $\psi 2 = e^{\int Bdx}\int e^{-\int Bdx}dx$; foient $\Delta 1$ & $\Delta 2$ les deux valeurs correfpondantes de Δ, j'aurai les deux équations

$$(B\psi 1 - \frac{1}{dx}d\psi 1)d\pi + \psi 1\frac{dd\pi}{dx} = a1 - \Delta 1,$$
$$(B\psi 2 - \frac{1}{dx}d\psi 2)d\pi + \psi 2\frac{dd\pi}{dx} = a2 - \Delta 2;$$

d'où il me sera facile de tirer par l'élimination

$$d\pi = a1\int e^{-\int B dx} dx - a2 + \Delta 2 - \Delta 1 \int e^{-\int B dx} dx.$$

J'intègre $\int e^{-\int B dx} dx$ de manière à avoir la constante H, & à cause de $d\pi = \delta\pi - \pi'\delta x = \delta\int\zeta dx - \zeta\delta x$, j'ai $\delta\int\zeta dx = \text{const.} + \zeta\delta x + \Delta 2 - H\Delta 1$. Mais $N\Psi 2 - HN\Psi 1 = -- Ne^{\int B dx}(H - \int e^{-\int B dx} dx)$, & ainsi des autres ; donc si je fais pour abréger $e^{\int B dx}(H - \int e^{-\int B dx} dx) = \mu$, j'aurai

$$\delta\int\zeta dx = \text{const.} + \zeta\delta x - \int(N\mu - \frac{1}{dx} d.P\mu + \&c.) dx\, dy \;\&c.$$
$$- (P\mu - \&c.)\, dy \;\&c.$$
$$- \&c. \&c.$$

Si ζ étoit donné par l'équation du second ordre $d\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) + Kdx = 0$, ou K renferme ζ, $\frac{d\zeta}{dx}$ & y, x, p, q, &c. ; on feroit $\int\zeta dx = \pi$, d'où

$$\zeta = \pi', \frac{d\zeta}{dx} = \pi'', \frac{d\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)}{dx} = \pi''', \pi''' + K = \Pi.$$

Or comme K ne renferme que π', π'' & y, x, &c. on auroit $A = 0$, $D = 1$, E & celles qui suivent chacune égale à zéro ; & Ψ seroit donné par l'équation

$$d.B\Psi - \left(\frac{1}{dx} d.C\Psi\right) + d\left(\frac{1}{dx} d\left(\frac{1}{dx} d\Psi\right)\right) = 0,$$

d'où l'on tireroit

$$(a) \ldots\ldots B\Psi - \frac{1}{dx} d.C\Psi + \frac{1}{dx} d\left(\frac{1}{dx} d\Psi\right) = a.$$

On auroit ensuite, pour trouver $d\pi$, l'équation

$$(b) \ldots a d\pi + \left(C\Psi - \frac{1}{dx} d\Psi\right) \frac{1}{dx} dd\pi + \Psi \frac{1}{dx} d\left(\frac{1}{dx} dd\pi\right) = \text{const.} - \Delta.$$

Si on trouvoit une seule valeur de Ψ qui satisfît à l'équation a dans l'hypothèse de $a = 0$, on auroit par la méthode du (n°. 276) l'intégrale complète de cette équation, & par conséquent la valeur complète de Ψ qui renfermeroit trois constantes arbitraires. On auroit donc trois valeurs particulières de Ψ ; & substituant ces valeurs successivement dans l'équation b, on trouveroit trois équations au moyen desquelles il seroit facile d'avoir $d\pi$. Je ne pousserai pas plus loin ces applications, car on doit voir comment il faudra s'y prendre dans des cas plus compliqués ; & je passe à des problêmes d'un genre différent qui vont nous faire découvrir une autre branche du calcul des variations.

(353). Soit une surface courbe rapportée à un plan fixe par trois co-ordonnées perpendiculaires z, y & x ; je mène à cette surface une normale que nous avons

démontré (n°. 250) être égale à $z\sqrt{(1+m^2+n^2)}$, lorsqu'on suppose $dz = m\,dy + n\,dx$. On verra aisément que l'élément de la surface est au petit rectangle $dx\,dy :: z\sqrt{(1+m^2+n^2)} : z$, d'où l'on tire que l'élément de la surface $= dx\,dy\sqrt{(1+m^2+n^2)}$; quant au petit prisme qui est l'élément du solide enveloppé par cette surface, il est égal à $z\,dx\,dy$. Or si l'on convient de se servir des deux signes S & $\int$ pour indiquer deux manières différentes d'intégrer une fonction proposée, l'une en ne faisant varier que y, l'autre en ne faisant varier que x, on aura la surface entière égale à $\int S\,dx\,dy\sqrt{(1+m^2+n^2)}$, & la solidité à $\int S\,z\,dx\,dy$. Il faut remarquer que si l'on a $\int S\,\zeta\,dx\,dy = V$, on aura aussi $S\int \zeta\,dx\,dy = V$; car on tire de la première équation $\zeta = \frac{d^2 V}{dx\,dy}$, de l'autre $\zeta = \frac{d^2 V}{dy\,dx}$, &, comme je l'ai démontré (n°. 229), ces deux quantités $\frac{d^2 V}{dx\,dy}$, $\frac{d^2 V}{dy\,dx}$ font identiquement les mêmes.

Cela posé, je proposerai de résoudre ce problème: Trouver la surface qui est la moindre de toutes celles qui ont un périmètre donné.

Je fais pour abréger $\sqrt{(1+m^2+n^2)} = u$, & la formule qui doit être un *minimum* est $\int S\,u\,dx\,dy$; donc $\delta\int S\,u\,dx\,dy$ ou $\int S\,dx\,d\delta y\,u = 0$. Mais $\delta u = \frac{m\,\delta m + n\,\delta n}{u}$, ainsi il faut d'abord trouver les variations des différences partielles $m = \frac{dz}{dy}$, $n = \frac{dz}{dx}$. On se rappellera que j'ai démontré au commencement de ce chapitre que la caractéristique d désignant une manière quelconque de différentier une fonction z, on a $\delta d z = d\delta z$; or ce théorême donne évidemment que la variation de la différentielle d'une fonction z, cette différentielle étant prise par rapport à une des variables que la fonction renferme, est la même chose que la différentielle de la variation de z, la différentielle étant prise encore par rapport à la même variable; ou, ce qui revient au même, que $\delta\,\frac{dz}{dx} = \frac{d\delta z}{dx}$, $\delta\,\frac{dz}{dy} = \frac{d\delta z}{dy}$. Donc $\delta u = \frac{1}{u}\left(\frac{dz}{dy}\,\frac{d\delta z}{dy} + \frac{dz}{dx}\,\frac{d\delta z}{dx}\right)$;

& l'équation du *minimum* sera $\int S\,\frac{dx\,dy}{u}\left(\frac{dz}{dy}\,\frac{d\delta z}{dy} + \frac{dz}{dx}\,\frac{d\delta z}{dx}\right) = 0$.

Il ne faut pas perdre de vue que le signe S désigne l'intégrale prise par rapport à y seulement, & comme dans le terme $\frac{dx\,dy}{u}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{d\delta z}{dy}$, c'est y seul qu'on regarde comme variable, on verra qu'on peut se servir ici des mêmes transformations que ci-dessus; & écrire

$$S\,\frac{dx\,dy}{u}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{d\delta z}{dy} = \frac{dx\,dy}{u}\,\frac{dz}{dy}\,\delta z - S\,dx\,dy\,\frac{d\left(\frac{1}{u}\,\frac{dz}{dy}\right)}{dy}\,\delta z;$$

ou

on transformera de la même manière $\int \frac{dx\,dy}{u} \frac{dz}{dx} \frac{d\delta z}{dx}$ en

$\frac{dx\,dy}{u} \frac{dz}{dx} \delta z - \int dx\,dy \frac{d\left(\frac{1}{u}\frac{dz}{dy}\right)}{dx} \delta z$; & on aura

$$\int S \frac{dx\,dy}{u} \left(\frac{dz}{dy} \frac{d\delta z}{dy} + \frac{dz}{dx} \frac{d\delta z}{dx} \right) = \int \frac{dx\,dy}{u} \frac{dz}{dy} \delta z +$$

$$S \frac{dx\,dy}{u} \frac{dz}{dx} \delta z - \int S \left(\frac{d\left(\frac{1}{u}\frac{dz}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{1}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx} \right) dx\,dy\,\delta z = 0.$$

Si on suppose que le premier & le dernier z sont donnés, cette équation se réduira à

$$\int S \left(\frac{d\left(\frac{1}{u}\frac{dz}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{1}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx} \right) dx\,dy\,\delta z = 0,$$

qui devant avoir lieu quelle que soit la variation marquée par δ, donne

$$\frac{d\left(\frac{1}{u}\frac{dz}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{1}{u}\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = 0, \text{ ou } \frac{d(m:u)}{dy} + \frac{d(n:u)}{dx} = 0;$$

& apprend que la surface qui est un *minimum* doit être telle que $\frac{m\,dx - n\,dy}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}}$ soit une différentielle exacte, aussi bien que $m\,dy + n\,dx$.

(354). J'ajouterai cette condition, que la surface cherchée soit un *minimum* entre toutes celles qui forment des solides égaux. On aura cette seconde équation $\int S\,dx\,dy\,\delta z = 0$, & on verra clairement que l'équation qui résoud ce second problême est $\frac{d(m:u)}{dy} + \frac{d(n:u)}{dx} = a$, a étant une constante arbitraire. En général, il s'agira d'intégrer l'équation aux différences partielles

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] \frac{d^2 z}{dy^2} + \left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] \frac{d^2 z}{dx^2} -$$

$$2 \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} \frac{d^2 z}{dx\,dy} = a \left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}};$$

or si on se rappelle ce qu'on a dit (n°s. 301 *& suiv.*) sur la nature de ces sortes d'équations, on verra qu'il doit y avoir une infinité de surfaces qui satisferont à l'un & à l'autre problême.

La surface de la sphère est une des surfaces qui est un moindre entre toutes celles qui ayant un périmètre donné, forment des solides égaux. En effet, son équation est $z^2 = r^2 - x^2 - y^2$, d'où l'on tire

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}, \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3}, \frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3},$$

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = -\frac{xy}{z^3};$$

en substituant ces deux valeurs dans l'équation a, on a

$$-\frac{2(z^2+x^2)(z^2+y^2)}{z^4}+\frac{2x^2y^2}{z^4}=a(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}},$$

ou $z^2+y^2+x^2=\frac{4}{a^2}$ équation d'une sphère dont le rayon est $\frac{2}{a}$.

La surface du cylindre dont l'équation est $z^2=r^2-y^2$ est aussi une de ces surfaces. Car $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}$, $\frac{d^2z}{dx^2}=0$, $\frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}$, $\frac{d^2z}{dxdy}=0$; & en substituant ces valeurs, l'équation a devient

$$-(z^2+y^2)=a(z^2+y^2)^{\frac{3}{2}}, \text{ ou } z^2+y^2=\frac{1}{a^2}.$$

Mais nous ne pourrions pas nous étendre davantage sur cette partie intéressant du calcul des variations, sans auparavant traiter des équations aux différences partielles avec plus d'étendue que nous n'avons encore pu faire. C'est pour les mêmes raisons que nous n'avons dit que très-peu de choses au commencement de ce chapitre sur la manière de trouver les variations des fonctions données par des équations aux différences finies. Nous le terminerons par exposer un principe démontré par Euler à la fin de l'ouvrage sur les Isopérimètres dont nous avons parlé plusieurs fois ; principe que Lagrange a depuis beaucoup généralisé, & dont il a fait les plus belles applications dans le second volume des Mélanges de la Société de Turin.

(355). Un corps dont la masse est M se mouvoit dans la direction Tt (*fig. L*) avec une certaine vîtesse, lorsqu'arrivé au point A, il a été détourné de cette direction par une force tendante vers un centre S, & a été obligé de décrire l'orbite curviligne AP qui est toute dans un même plan. J'imagine le corps en P, & qu'à ce point sa vîtesse est u; puis je nomme le premier rayon vecteur SA, b; celui SP, y; l'angle ASP, x; l'arc AP, s, & φ la force centrale que je suppose être proportionnelle à une fonction de la distance au centre. Cela posé, voici le problème qu'il s'agit de résoudre : Entre toutes les trajectoires que le corps peut décrire, trouver celle pour laquelle la formule intégrale $\int u\,ds$ est un plus grand ou moindre ; on suppose que le premier & le dernier point de cette trajectoire sont donnés.

Dans chaque instant infiniment petit, la force centrale fera parcourir au corps une petite ligne dy; on aura donc $u\,du=-\varphi\,dy$, ou, faisant pour abréger $\frac{u^2}{2}=\theta$, $d\theta=-\varphi\,dy$ & $\theta=c-\int\varphi\,dy$. De plus, on sait que $ds=\sqrt{[(d\cdot AM)^2+(d\cdot MP)^2]}$; d'où l'on tire (à cause du triangle rectangle SMP, qui donne $AM=b-y\cos.x$, $MP=y\sin.x$) $ds=\sqrt{(y^2dx^2+dy^2)}$, ou, faisant $\frac{dy}{dx}=p$, $ds=dx\sqrt{(y^2+p^2)}$. Ainsi la formule intégrale $\int u\,ds$ devient $\int dx\sqrt{2\theta}\sqrt{(y^2+p^2)}$; & comme $\int\varphi\,dy$ n'est pas une formule intégrale indéfinie, puisque par l'hypothèse φ n'est fonction que de y, nous nous servirons pour résoudre le problème des équations du (n°. 327).

On fera $C = \sqrt{2\theta}\sqrt{(y^2+p^2)}$; &, à cause de

$d C = \frac{d\theta}{\sqrt{2\theta}}\sqrt{(y^2+p^2)} + \sqrt{2\theta} \cdot \frac{y\,dy + p\,dp}{\sqrt{(y^2+p^2)}}$, on aura

$M = 0$, $N = \frac{-\phi\sqrt{(y^2+p^2)}}{\sqrt{2\theta}} + \frac{y\sqrt{2\theta}}{\sqrt{(y^2+p^2)}}$, $P = \frac{p\sqrt{2\theta}}{\sqrt{(y^2+p^2)}}$.

M étant égal à zéro, on se servira de l'équation $C = b' + Pp$ (n°. 338), & on aura dans ce cas-ci $\sqrt{2\theta}\sqrt{(y^2+p^2)} = b' + \frac{p^2\sqrt{2\theta}}{\sqrt{(y^2+p^2)}}$, ou

$y^2\sqrt{2\theta} = b'\sqrt{(y^2+p^2)}$.

En nommant g la vitesse au point A, & m le sinus de l'angle que la tangente à ce point fait avec la ligne SA, on aura au point A,

$\frac{d \cdot MP}{d \cdot AM}\left(= \frac{dy\,\text{fin.}\,x + y\,dx\,\text{cos.}\,x}{-dy\,\text{cos.}\,x + y\,dx\,\text{fin.}\,x}\right) = \frac{m}{\sqrt{(1-m^2)}}$, $2\theta = g^2$ & p^2

ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b^4 g^2}{b'^2} - b^2$. Mais à ce point $x = 0$, ce qui donne fin. $x = 0$ & cos. $x = 1$; on y a donc aussi $\frac{b^2 g^2}{b'^2} - 1 = \frac{1-m^2}{m^2}$, d'où l'on tire

$b' = bgm$. Ainsi la courbe demandée aura pour équation

$y^2\sqrt{2\theta} = bgm\sqrt{(y^2+p^2)}$. Nous avons fait voir (n°. 208) que cette équation est celle de toutes les trajectoires décrites en vertu d'une seule force tendante vers un centre.

(356). Non-seulement la formule intégrale $\int u\,ds$ est un plus grand ou un moindre, mais elle est toujours un moindre, ce dont il sera facile de s'assurer en substituant dans cette formule pour y une valeur tirée de toute autre équation que de celle de la trajectoire. C'est pourquoi le principe en question est connu des géomètres sous le nom de principe de la moindre action. Le voici énoncé généralement. Si des corps dont les masses sont M, M', M'', &c., étant animés par des forces quelconques, & agissant de plus les uns sur les autres par une attraction mutuelle, décrivent, dans l'instant dt, des arcs ds, ds', ds'', &c., avec des vîtesses u, u', u'', &c.; la formule intégrale

$$\int(M u\,ds + M'u'ds' + M''u''ds'' + \text{\&c.})$$

sera toujours un moindre.

Nous ne supposerons que trois corps pour simplifier, & nous rapporterons les trois orbites à un même plan, qui sera celui de la planche, au moyen, pour chacun de ces corps, pour le corps M, par exemple, de trois co-ordonnées perpendiculaires (*fig. LVII*) AM (x), MN (y), NP (z); & nous nommerons x', y', z' & x'', y'', z'' les co-ordonnées des orbites des deux autres corps M' & M''. Quelles que soient les forces qui animent le corps M, on peut les réduire à trois, dont l'une P agit dans la direction des x, la seconde Q agit dans dans la direction des y, & la troisième R agit dans la direction des z; soient aussi P', Q', R' & P'', Q'', R'' les trois forces dans lesquelles on décompose toutes celles qui animent les corps M' & M''. Mais nous distinguerons les forces

d'attraction mutuelle, & nous nommerons φ la force d'attraction, & σ la distance entre M & M'; φ' la force d'attraction, & σ' la distance entre M & M''; φ'' la force d'attraction, & σ'' la distance entre M' & M''. Cela posé :

(357). A cause de $\delta\int u\,ds = \int\delta(u\,ds) = \int(u\,d\delta s + \delta u\,ds) =$ (en mettant pour ds sa valeur $u\,dt$) $\int(u\,d\delta s + u\,\delta u\,dt)$, on a l'équation

$$\int(Mud\delta s + M'u'd\delta s' + M''u''d\delta s'' + [Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'']\,dt) = 0;$$

& il s'agit d'abord de trouver la valeur de $Mu\,\delta u + M'u'\,\delta u' + M''u''\,\delta u''$. Par le principe de la conservation des forces vives que nous devons à Huyghens, la somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses à chaque instant, est égale à la somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses initiales, plus les quarrés des vîtesses que les corps auroient acquises, si étant animés par les mêmes puissances, ils s'étoient mûs librement chacun sur la ligne qu'il a décrite. Ce principe donne

$$Mu^2 + M'u'^2 + M''u''^2 = Mg^2 + M'g'^2 + M''g''^2 - 2M\int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) - 2M'\int(P'dx' + Q'dy' + R'dz') - 2M''\int(P''dx'' + Q''dy'' + R''dz'') - 2MM'\int\varphi\,d\sigma - 2MM''\int\varphi'\,d\sigma' - 2M'M''\int\varphi''\,d\sigma'',$$

g, g' & g'' étant les vîtesses initiales de chacun des corps, d'où l'on tire

$$Mu\,\delta u + M'u'\,\delta u' + M''u''\,\delta u'' = -M\delta\int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) - M'\delta\int(P'dx' + Q'dy' + R'dz') - M''\delta\int(P''dx'' + Q''dy'' + R''dz'') - MM'\delta\int\varphi\,d\sigma - MM''\delta\int\varphi'\,d\sigma' - M'M''\delta\int\varphi''\,d\sigma''.$$

Je supposerai que φ est fonction de σ, φ' fonction de σ', φ'' fonction de σ''; que $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ est une différentielle exacte, & ainsi des autres. Cela supposé,

$$\delta\int\varphi\,d\sigma\,(= \int\delta(\varphi\,d\sigma) = \int(\varphi\,d\delta\sigma + \delta\varphi\,d\sigma) = \varphi\,\delta\sigma + \int(\delta\varphi\,d\sigma - d\varphi\,\delta\sigma)) = \varphi\,\delta\sigma,$$

car $\frac{\delta\varphi}{\delta\sigma} = \frac{d\varphi}{d\sigma}$, d'où l'on tire lorsque φ est fonction de σ, $\delta\varphi\,d\sigma - d\varphi\,\delta\sigma = 0$;

on démontrera de la même manière que $\delta\int\varphi'\,d\sigma' = \varphi'\,\delta\sigma'$, $\delta\int\varphi''\,d\sigma'' = \varphi''\,\delta\sigma''$.

Secondement $\delta\int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int(P\,d\delta x + \delta P\,dx + Q\,d\delta y + \delta Q\,dy + R\,d\delta z + \delta R\,dz) = P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z + \int(\delta P\,dx - dP\,\delta x + \delta Q\,dy - dQ\,\delta y + \delta R\,dz - dR\,\delta z)$;

mais si $dP = \frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy + \frac{dP}{dz}dz$, on a

$\delta P = \frac{dP}{dx}\delta x + \frac{dP}{dy}\delta y + \frac{dP}{dz}\delta z$, & ainsi des autres;

donc, à cause de $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$

qui

qui doivent avoir lieu, puisque par l'hypothése $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ est une différentielle exacte, on aura

$$\delta P\,dx - dP\,\delta x = \frac{dQ}{dx}(dx\,\delta y - dy\,\delta x) + \frac{dR}{dx}(dx\,\delta z - dz\,\delta x),$$

$$\delta Q\,dy - dQ\,\delta y = \frac{dQ}{dx}(dy\,\delta x - dx\,\delta y) + \frac{dR}{dy}(dy\,\delta z - dz\,\delta y),$$

$$\delta R\,dz - dR\,\delta z = \frac{dR}{dx}(dz\,\delta x - dx\,\delta z) + \frac{dR}{dy}(dz\,\delta y - dy\,\delta z).$$

Il est clair que la somme de ces quantités est zéro, & que par conséquent

$$\delta\int(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z,$$

lorsque $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ est une différentielle exacte. Il en sera de même des autres, & on aura

$$Mu\,\delta u + M'u'\,\delta u' + M''u''\,\delta u'' = - MP\,\delta x - MQ\,\delta y - MR\,\delta z - M'P'\,\delta x' - M'Q'\,\delta y' - M'R'\,\delta z' - M''P''\,\delta x'' - M''Q''\,\delta y'' - M''R''\,\delta z'' - MM'\varphi\,\delta\rho - MM''\varphi'\,\delta\rho' - M'M''\varphi''\,\delta\rho'';$$

il ne faut pas perdre de vue les hypothèses que nous avons été obligés de faire pour parvenir à cette équation.

(358). Imaginons en P' (*fig. LVII*) le second corps, & que AM', $M'N'$, $N'P'$ sont les co-ordonnées de son orbite; en tirant Nn & $P\varpi$ perpendiculaires, l'une sur $M'N'$, l'autre sur $N'P'$, nous trouverons PP' ou

$$\rho = \sqrt{[(P\varpi)^2 + (P'\varpi)^2]} = (\text{à cause de } P'\varpi = z' - z,\ (P\varpi)^2 = (NN')^2 = (Nn)^2 + (N'n)^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2)\ \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}.$$

On trouvera de la même manière

$$\rho' = \sqrt{[(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2]},$$
$$\rho'' = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]};$$

d'où il sera facile de tirer $\delta\rho$, $\delta\rho'$, $\delta\rho''$.

L'élément ds de l'orbite du premier corps est égal à $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; donc $d\delta s = \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds}$. En substituant cette valeur dans la formule $\int u\,d\delta s$, on aura $\int\left(\frac{u\,dx}{ds}\,d\delta x + \frac{u\,dy}{ds}\,d\delta y + \frac{u\,dz}{ds}\,d\delta z\right)$ qu'on changera facilement en celle-ci

$$\frac{u\,dx}{ds}\,\delta x + \frac{u\,dy}{ds}\,\delta y + \frac{u\,dz}{ds}\,\delta z - \int\left(d.\frac{u\,dx}{ds}\times\delta x + d.\frac{u\,dy}{ds}\times\delta y + d.\frac{u\,dz}{ds}\times\delta z\right);$$

& ainsi de $\int u'\,d\delta s'$ & de $\int u''\,d\delta s''$.

(359). Maintenant nous supposerons que le premier & le dernier point de chacune des trois orbites sont donnés, ce qui nous donnera la facilité de négliger tous les termes qui sont hors du signe intégral ; or, comme il n'y a pas de relation donnée entre les co-ordonnées x, y, z, &c. nous égalerons à zéro les co-efficiens des variations δx, δy, δz, &c. & nous aurons pour déterminer les trois orbites neuf équations qui deviendront, en mettant pour $\frac{u\,dx}{ds}$, &c. leurs valeurs $\frac{dx}{dt}$, &c. & faisant dt constant, celles que voici :

$$d^2x + \left(P - M'\varphi \cdot \frac{x'-x}{\sigma} - M''\varphi' \cdot \frac{x''-x}{\sigma'}\right)dt^2 = 0,$$

$$d^2y + \left(Q - M'\varphi \cdot \frac{y'-y}{\sigma} - M''\varphi' \cdot \frac{y''-y}{\sigma'}\right)dt^2 = 0,$$

$$d^2z + \left(R - M'\varphi \cdot \frac{z'-z}{\sigma} - M''\varphi' \cdot \frac{z''-z}{\sigma'}\right)dt^2 = 0,$$

$$d^2x' + \left(P' - M\varphi \cdot \frac{x'-x}{\sigma} - M''\varphi'' \cdot \frac{x''-x'}{\sigma''}\right)dt^2 = 0,$$

$$d^2y' + \left(Q' - M\varphi \cdot \frac{y'-y}{\sigma} - M''\varphi'' \cdot \frac{y''-y'}{\sigma''}\right)dt^2 = 0,$$

$$d^2z' + \left(R' + M\varphi \cdot \frac{z'-z}{\sigma} - M''\varphi'' \cdot \frac{z''-z'}{\sigma''}\right)dt^2 = 0,$$

$$d^2x'' + \left(P'' + M\varphi' \cdot \frac{x''-x}{\sigma'} + M'\varphi'' \cdot \frac{x''-x'}{\sigma''}\right)dt^2 = 0,$$

$$d^2y'' + \left(Q'' + M\varphi' \cdot \frac{y''-y}{\sigma'} + M'\varphi'' \cdot \frac{y''-y'}{\sigma''}\right)dt^2 = 0,$$

$$d^2z'' + \left(R'' + M\varphi' \cdot \frac{z''-z}{\sigma'} + M'\varphi'' \cdot \frac{z''-z'}{\sigma''}\right)dt^2 = 0.$$

Ces neuf équations sont celles du problême des trois corps pris dans le sens le plus général ; & comme nous n'avons que dix inconnues, nous pourrons toujours parvenir à des équations entre deux variables seulement, qui seront telles qu'elles doivent être pour déterminer le mouvement & la position respective de chacun des corps à chaque instant. Ce problême n'a encore été résolu que dans les hypothèses astronomiques. Les méthodes d'approximation dont on a fait usage pour y parvenir sont le chef-d'œuvre de l'analyse. Nous les avons développées avec quelque soin dans l'introduction à l'Etude de l'Astronomie physique.

(360). Newton nous a appris que les parties de la matière s'attiroient réciproquement en raison inverse du quarré des distances ; & il est démontré maintenant qu'il suffit de supposer cette attraction mutuelle entre les différens corps qui composent le systême planétaire pour rendre raison de leurs mouvemens. Ainsi, pour trouver les vraies équations du problême des trois corps, relativement à l'astronomie physique, il faudra faire dans celles qui précèdent P, Q, R ; P', Q', R' ; P'', Q'', R'' égaux à zéro, & φ, φ', φ'' proportionnels à

$\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r'^3}$, $\frac{1}{r''^3}$. On pourroit, au lieu des co-ordonnées perpendiculaires x, y, z; introduire une droite $SN(Y)$ qui eſt la projection du rayon vecteur de l'orbite ſur le plan donné de poſition, & deux angles $ASN(X)$, $PSN\ Z)$, dont l'un eſt la longitude, & l'autre la latitude de la planète. Or les triangles rectangles SMN, SNP donnent (en nommant SA, b) $x = b - Y \cos. X$, $y = Y \text{ſin.} X$, $z = Y \text{tang.} Z$; donc

$$x' - x = Y \cos. X - Y' \cos. X',$$
$$x'' - x = Y \cos. X - Y'' \cos. X'',$$
$$x'' - x' = Y' \cos. X' - Y'' \cos. X'',$$
$$y' - y = Y' \text{ſin.} X' - Y \text{ ſin.} X,$$
$$y'' - y = Y'' \text{ſin.} X'' - Y \text{ ſin.} X,$$
$$y'' - y' = Y'' \text{ſin.} X'' - Y' \text{ ſin.} X',$$
$$z' - z = Y' \text{tang.} Z' - Y \text{tang.} Z,$$
$$z'' - z = Y'' \text{tang.} Z'' - Y \text{tang.} Z,$$
$$z'' - z' = Y'' \text{tang.} Z'' - Y' \text{tang.} Z'.$$

De toutes les manières on finira par réduire les recherches ſur le ſyſtême du monde à de ſimples problêmes de calcul intégral. Il en ſeroit de même de telle autre queſtion que nous nous ſerions propoſés de réſoudre, en faiſant uſage de la méthode expoſée dans ce chapitre; & nous croyons avoir rempli notre but principal, qui étoit de prouver que pour faire quelques progrès dans l'étude des ſciences phyſico-mathématiques, il faut auparavant s'inſtruire des différentes parties du calcul intégral dont nous avons parlé dans le chapitre précédent. Dans la ſeconde partie de cet Ouvrage nous nous ſommes propoſé d'étendre les méthodes que nous n'avons fait qu'indiquer dans celle-ci & de les rendre plus familières à nos lecteurs. Nous oſons donc eſpérer qu'elle ne ſera pas lue avec moins d'attention que la première.

Fin de la première Partie.

De l'Imprimerie de CELLOT, rue des Grands-Auguſtins, n°. 29.





